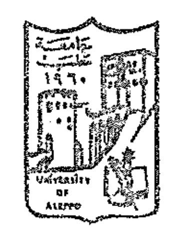
UNIVERSITY OF ALEPPO
ACULTY OF ENGINEERING



جامعة حلب
كلية الهندسة

مقاومة المواد

STRENGTH OF MATERIALS

الصف الاول عمارة

الدكتور المهندس

عبد الرزاق عرعور

دكتوراه في الهندسة الانشائية
دبلوم في الهندسة المدنية
هانوفر - المانيا الغربية

مدرس مقاومة المواد وحساب الانشاءات في كلية الهندسة
جامعة حلب

Dr. - Ing. **ABDOUL-RAZZAK AROUR**
Lecturer of Strength of Materials
and Theory of Structures
Faculty of Engineering, Aleppo University

الطبعة الاولى
١٩٧٥ - ١٩٧٦

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

الإهداء

إلى من ربياني صغيراً
لأخدم وطني كبيراً .
إلى والديَّ الكريمين
أهدي هذا الكتاب .

كلمة المؤلف

إن منزلة حساب الانشاءات بما فيها مقاومة المواد بين العلوم الهندسية هي منزلة الاساس من البناء ومكانها بين هذه العلوم هو مكان الجسر في منتصف الطريـق وهي ضرورية لكافة أقسام الهندسة مدنية كانت أم ميكانيكية ، معمارية كانت أم كهربائية ، لذلك يلزم أثناء التدريس اعطاءها العناية الكافية كما ينبغي عرضها باسلوب يزيل كل غموض ليتمكن طالب الهندسة قبل وبعد التخرج من فهم هذه المادة الرئيسية ذات التطور السريع وليستطيع استخدام تطبيقاتها التي تزداد يوماً عن يوم .

يعود السبب في عدم تمكن طلاب الهندسة من هذه المادة الرئيسية بشكل جيد لامرين اولها هو عدم عرض هذه المادة باسلوب ايضاحي وثانيهما هو الاقلال في الامثلة والتطبيقات العملية ، اذاً ليكون الكتاب من الناحية التدريسية جيداً ينبغي ان يعرض باسلوب ايضاحي وتدعمه في نفس الوقت امثلة متعددة ومتنوعة تنير كل فكرة ترد فيه . وبما ان الهدف من التدريس في كليات الهندسة ليس هو خلق كادر هندسي تطبيقي فحسب وانما هو اضافة على ذلك تزويد البلد بكوادر هندسية علمية ذات كفاءات خاصة ومستو رفيع تستطيع مسايرة ركب العلوم الهندسية المتطورة ، لذلك يلزم تحقيق الشروط السابقة مع الاحتفاظ بالاسلوب العلمي لهـذه المادة ولهذا السبب وايماناً مني بهذه الفكرة فلقد وضعت نصب عيني وقبل البدء بتأليف هـذا الكتاب امران اولهما تحقيق الفكرة الاولى الا وهي الاسلوب الايضاحي مـع الاكثار في الامثلة والتطبيقات العملية وثانيهما تحقيق الفكرة الثانية ألا وهي متابعة تطور هـذه المـادة والاحتفاظ بالرياضيات المتطورة لغة المهندس الاولى .

لقد كان بالامكان وتلبية لرغبة الكثيرين التخلي عن استخدام الرياضيات وبعض اقسام الميكانيك في كثير من الفصول والفقرات ، لكن هذا يساعد على هدم تطور هذه المادة الهامة ويعتبر خطراً بالنسبة للمستقبل الهندسي ، فغايتنا وهدفنا هما البناء وليس الهدم . انطلاقاً من تلك الافكار وبعد ان بذلت قصارى جهدي لتحقيق الهدف المنشود ، أمل أن اكون قد وفقت لما سعيت اليه وبلغت بهذا الكتاب الفكرة التي كنت اسعى اليها . فكلي أمل ان يفي كتابي هذا الغرض الذي وضع من اجله وأقدم اعتذاري عما فيه من نقص او غموض أو اخطاء مطبعية وكل رجائي من طلابي الأحبة وزملائي الكرام ان يكونوا لي عونا باطلاعي على ارائهم السديدة ونقدهم البناء لاستكمال الناقص أو ايضاح الغامض او اصلاح الخاطيء .

لقد زود هذا الكتاب بعدد من الجداول العملية الهامة التي تساعد الطالب والمهندس على السواء من انجاز حلول سريعة باقصر وقت ممكن .

ولقد خص بهذا الكتاب طلاب الصف الاول قسم العمارة .

أخيراً اتمنى ان يجد الطلاب والمهندسون في صفحات هذا الكتاب منطلقاً يساعدهم على توسيع ثقافتهم في هـذا العلم كما اتمنى ان يوفقني الله فى الاستمرار في العمل لمتابعة تأليف كتب أخرى تشرح فيها مواضيع جديدة ومتطورة من هذه المادة .

حلب ١٩٧٥

الدكتور المهندس

عبد الرزاق عرعور

المقـدّمة

تعنى مادة **حساب الانشاءات** بايجاد القوى الداخليـــة في الانشاءات المختلفـــة وكيفية توزيع هذه القوى نتيجة للمؤثرات الخارجية أو الداخلية على إختلاف أنواعها ، كما تعنى أيضاً بما يحدث لهذه **الانشاءات** من تغير في الشكل نتيجة لتلك المؤثرات .

تشقل مادةحسابالانشاءات على **علم السكون** (الذي يشتمل بدوره على **علم سكون القوى** وعلم **سكون الاجسام الحاملة**) وعلم **مقاومة المواد** .

يختص علم سكون الأجسام الحـاملة بايجاد القوى الداخلية في الانشاء (ردود أفعـال القطع أو ما تسمى أيضا بقيم القطع) وكذلك التغيرات التي تنتج عن تأثير المؤثرات الخارجية أو الداخلية عليه . أما علم سكون الأجسام الحاملة فهو الجزء من علم الميكانيك الذي يبحث حالة التوازن الساكنة للانشاءات (للاجسام الحاملة) . ويهتم علم مقاومـة المواد بايجاد توزيـع القوى الداخلية على سطح المقطع العرضي وذلك بعد معرفـة القوى الداخليـة (تحديـد شكل توزيع الاجهادات) كما يهتم بتهيئة القدر الـكافي من المادة (بتعيين الابعاد الـكافيـة للمقـاطع العرضية) لتحمل المؤثرات المطبقة على الانشاء مع توفير عامل الأمان والاقتصاد بالنسبـة لمـا يطلب تصميمه من الانشاء أو التأكد من صلاحية منشأ لتحمل مؤثرات معينة بأمان كاف .

يقصد بكلمة **الانشاءات** كل مادة صلبة (غير سائلة ولا غازية) تتعرض بقصد أو بغير قصد لمؤثرات داخلية أو خارجية من شأنها ان تولد فيها قوى داخلية ومع ذلك فان المعنى المألوف للفظ الانشاءات هو ما انشئ لتحمل قوى معينـة سواءفي البر او البحر او الجو كالمباني بأنواعها المختلفة والالات والسفن والغواصات وكلها امثلة لما تعنيه كلمة الانشاءات وبالتالي تدخل هذه في مجال بحث حساب الانشاءات .

ويقصد بكلمة **المؤثرات** القوى التي تؤثر على الانشاء نتيجة للحمولات الخارجيـة أو وزن الانشاء ذاته (الوزن الذاتي للانشاء) وكـذلك القوى التي تتولد نتيجـة لتغير درجات الحرارة أو لتعرض الانشاء للحركة ؛ سواء أكانت دورانية أم إنتقالية بسرعات متغيرة ، كما تشمل ايضا تلك القوى التي تنشأ عندما تتعرض مواضع إستناد الانشاء الى حركة ، نتيجة لما يتولد عندها من ردود فعل .

يأتي حساب الانشاءات في المقام الأول عند تصميم أي من الانشاءات مهما أختلف نوع المادة التي ستستعمل فى الانشاء (فولاذ ، بيتون مسلح ، خشب . . . والخ) وبقدر ما تكون دراسة الانشاء من هذه الناحية دقيقة بقدر ما تحقق له من وفر وأمان في التصميم.
وقد تطورت أساليب حساب الانشاءات في الثلاثين سنة الاخيرة من القرن العشرين لتساير التطور الذي حدث في الانشاءات ذاتها وما استلزمه هذا من ايجاد طرق للحساب تمتاز بالسهولة والكفاءة والدقة معاً . كما ان انتشار استعمال الانشاءات القشرية الرقيقة (القشريات) على نطاق واسع قد استلزم الاهتمام بدراسة هذه الانشاءات من الناحيه النظرية دراسة مستفيضة .





علم سكون القوى

مقدمة

ان وظيفة علم الميكانيك هي دراسة الحركات الموجودة في الطبيعة . تحتل الحالة الحدية « السكون » في دراسات الميكانيك رقعة كبيرة .

تهدف النتائج الرياضية التي اسست على المراقبة التوصل الى معرفة مسبقة لنتائج الظواهر الفعلية ، حيث يلزم في كثير من الحالات المعقدة لجعل الظواهر مثالية وذلك للتمكن من معالجتها رياضياً .

يمكن تقسيم الميكانيك بالنسبة لطبيعة الاجسام الى الاقسام التالية :

١ - ميكانيك الاجسام غير القابلة للتغير (ميكانيك الاجسام الصلبة).

٢ - ميكانيك الاجسام القابلة للتغير (من الاجسام القابلة للتغير ما هو مرن التغير ومنها ما هو لدن التغير وهناك أنواع اخرى) .

٣ - ميكانيك الاجسام السائلة (ميكانيك السوائل) .

٤ - ميكانيك الاجسام الغازية (ميكانيك الغازات) .

كما يمكن تقسيمه بالنسبة للحركة إلى الاقسام التالية :

١ - علم الحركة (Kinematik) : وهو العلم الذي يدرس الحركة الصلفية (المجردة) دون التعرض للاسباب .

٢ - الديناميك (Dynamik) : وهو يقسم بدوره الى قسمين ، الاول هو علم السكون (Statik) والثاني هو علم التحريك (Kinetik) . أما الاول ، وهو علم السكون فهو العلم الذي يدرس توازن القوى على الاجسام الصلبة الساكنة أو على أجزاء من الجسم الصلب وهو يقسم بدورة ايضاً إلى قسمين أولهما هو علم سكون القوى وثانيهما هو علم سكون الاجسام الحاملة وأما الثاني ، وهو علم التحريك ، فهو العلم الذي يدرس حركة الاجسام الناتجة عن تأثير القوى والمؤثرات .

يدور مجال البحث في هذا الكتاب حول دراسة سكون الاجسام القابلة والاجسام غير القابلة للتغير .

الجسم الصلب (Starre Körper) : هو الجسم الذي لا يتغير شكله بالتحميل (بتأثير القوى) مطلقاً وهو صورة مثالية غير موجودة في الطبيعة ، لكن عالمنا يحتوي على كثير من الاجسام التي تتغير نتيجة للتحميل تغيرا طفيفاً (صغيراً جداً) وذلك بحيث يمكن إعتبـــار تغيرها معدوماً وغير موجود أو بكلام أخر يمكن اعتبارها كجسم صلب .

الاجسام مرنة التغير : هي أجسام قابلة للتغير إذا ما أثرت عليها قوى ومؤثرات لـكن هذا التغير يزول بزوال القوى والمؤثرات ، فاذا زال التغير كلياً سميت بالاجسام مرنة التغير كلياً أما إذا زال بعضه عندئذ تسمي بالاجسام مرنة التغير جزئياً .

الاجسام لدنة التغير : هي اجسام قابلة للتغير إذا ما أثرت عليها قوى ومؤثرات ، لكن هذا التغير لا يزول بزوال القوى والمؤثرات . من بين هذه الاجسام أجسام لا يزول تغيرها كلياً بزوال القوى والمؤثرة بل يبقى جزء منه وتسمى بالاجسام لدنه التغير جزئياً كما ان هناك أجسام يبقى تغيرها بكامله وهي تسمى بالاجسام لدنة التغير كلياً .

الفصل الاول

مجموعة القوى المستوية التي تؤثر على الجسم الصلب

١ ـ ١ القوة

القوة هي العنصر الرئيسي في علم السكون وتعرف في الميكانيك بأنها السبب في تحريك الجسم او تغير حركته أو تغير شكله وتعرف في علم سكون الاجسام الحاملة بأنها السبب في التغيرات . للقوى أنواع عديدة منها قوى الجاذبية ، قوى التماس والخ .

١ ـ ١ ـ ١ تصنيف القوى

ليس بامكان الجسم المتوازن تغير مكانه كما وان القوى هي التي تقوم بتحقيق التوازن . أما القوى فهي اما ان تكون على شكل أفعال (الحمولات) او ان تكون على شكل ردود افعال (قوى الاستناد ، ردود أفعال المساند) . يمكن للحمولات (الافعال) ان تؤثر على الجسم بأشكال مختلفة (على سبيل المثال الوزن الذاتي ، حمولة الرياح ، وزن الثلوج ، ضغط التربة الخ) .

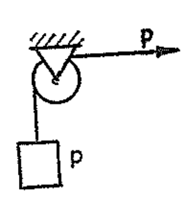
ان كافة القوى التي تؤثر على الجسم هي اما ان تكون قوى حجمية او ان تكون قوى سطحية . عندما يكون السطح ضيقاً عندئذ يقال عنها انها حمولة خطية وفي حالة كون الخط قصير جداً عندئذ يتكلم عن الحمولة الوحيدة او الحمولة النقطية او ما تسمى ايضا بالحمولة المركزة . يلجأ في الحسابات الهندسية غالباً الى تحويل القوى الفعليـة الى قوى ذات شـكل مثـالي وذلك لتسهيل اجراء عملياتها .

ان واحدة القوى الوحيدة هي الكيلوبوند ويرمز له بالاحرف [kp] . اذا نسبت هـذه الواحدة على الطول تم الحصول على واحدة القوى الخطية الا وهي كيلوبوند على المتر ويعبر عنها بالرمز [kp/m] واذا نسبت على السطح تم الحصول على واحدة القوى السطحيـة وهي كيلوبوند على المتر المربع ويعبر عنهـا بالرمز [kp/m^2] اما اذا نسبت على الحجم عندئذ يتم الحصول على واحدة القوى الحجمية وهي كيلوبوند على المتر المكعب ويعبر عنه بالرمز [kp/m^3] .

لاتحدد القوة بقيمتها فقط بل أيضا باتجاهها وهي تمثل بشعاع يسمى شعـاع القوة ويرمز له بحرف أسود غامق هكذا (P) . يرتبط هذا الشعاع بحامله .

١ ـ ١ ـ ٢ القوة الوحيدة والجسم الصلب

للحصول على قوة باتجاه ما يربط جسم بحبل تحرفه عن اتجاهه بكرة يلف عليهـا ذلك الحبل . عندما تثبت البكرة بدون احتـكاك وعندما يهمل وزن الحبل الذاتي فان القوة لن تغير قيمتها المطلقة بتغير الاتجاه المذكور (شكل 1-1) .



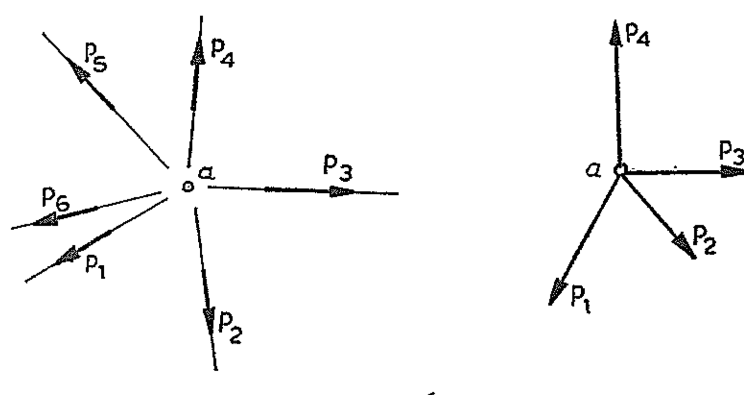
شكل 1-1

ان ازلاق القوة الوحيدة على حاملها لن يغير من تأثيرها الستاتيـكي (السكوني) على الجسم الصلب ما دام الرباط بين القوة والجسم الصلب موجوداً . اذاً القوة هي ، كما ذكر أنفاً شعاع مرتبط بحامله.

ان نقطـة تطبيق (تأثير) القوى الخارجيـة على الجسم الفعلي هي احدى العوامل التي تحدد القوى الداخلية التي ينبغي ان تحقق في كل قطـع يجرى على الجسم مـع القوى الداخليـة حالة التوازن .

١ ـ ٢ مجموعة القوى المستويه المركزية

يقال عن مجموعـة القوى المستوية انها مركزية عندما يكون لها نقـطة تطبيق (تأثير) واحدة أو عندما تتلاقى حواملها في نقطة واحدة (شكل 1-2) .

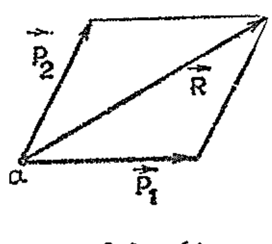


شـكل 1-2

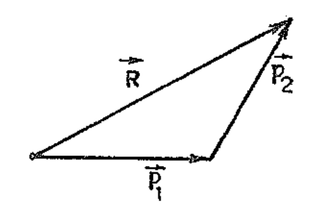
١ ـ ٢ ـ ١ معالجة مجموعة القوى المستوية المركزية تخطيطياً .

تركيب قوتين :

إذا أثرت قوتان P_1 و P_2 في النقطة a من جسم صلب كان تأثير هاتين القوتين مكافئاً لقوة وحيدة R نقطة تأثيرها هي نفس النقطة a وتساوي قطر متوازي الاضلاع (شكل 1-3) كما تساوي الضلع الناقص في مثلث القوى (وتر مثلث القوى) الذي يتشكل نتيجة توالي القوتين (شكل 1-4) يعبر عن ذلك بالقول أن القوة R تكافىء مجموعة القوى P_1 و P_2ويعني إمكانية إستبدال قوتين متلاقيتين بقوة وحيدة تسمى محصلتها والعكس صحيح أي يمكن استبدال قوة وحيدة بمركبتيها .



شكل 1-3

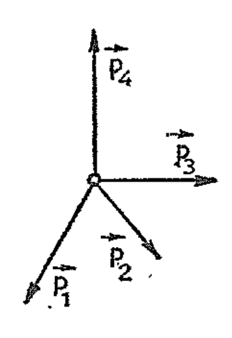


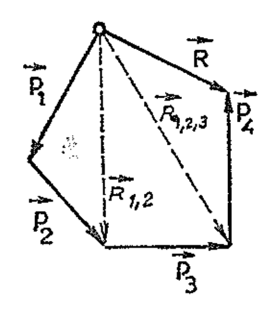
شكل 1-4

تركيب مجموعة قوى :

تؤثر في نقطة واحدة من جسم مجموعة قوى أعطيت قيمتها وإتجاهاتها في مخطط المكان (شكل 1-5). يمكن إيجاد محصلة هذه القوى بواسطة مخطط القوى (شكل 1-6) . ترسم القوى ، بعد استخدام مقياس القوى (1 cm = x kp) ، على شكل مسافة تمثل حسب الشكل (1-6) ، حيث ينبغي إختيار إحدى قوى المجموعة واعطاءها الرمز P_1 واعتبارها قوة أولى ثم تضاف اليها بعد ذلك وبتسلسل ما بقية قوى المجموعة فمثلا إن القوتين $P_1 + P_2$ تعطيا المحصلة $R_{1,2}$ وكذلك فان القوى $R_{1,2} + P_3$ تعطي المحصلة $R_{1,2,3}$ والخ .

إن نقطة البداية الواقعة على القوة الاولى ونقطة النهاية الواقعة على القوة الاخيرة تمثل المحصلة النهائية R لمجموعة القوى التي تؤثر في تلك النقطة . أما المحصلة فتتجه بعكس الاتجاه الذي تشير اليه مجموعة القوى المرسومة في مضلع القوى .





شكل 1-5 شكل 1-6

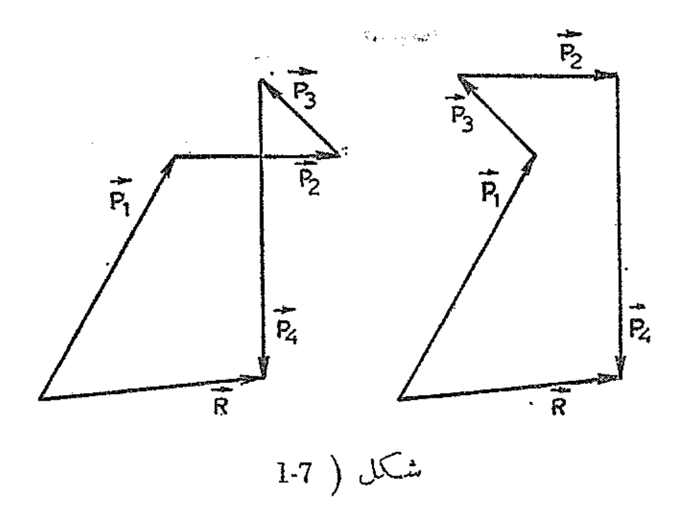
تحليلياً يمكن التعبير عن محصلة القوى التي تم الحصول عليها تخطيطياً بواسطة المعادلة الشعاعية التالية :

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = \sum_{i=1}^{n} P_i \qquad (1\text{-}1)$$

أثناء الجمع الشعاعي لا يؤثر تسلسل الحدود على النتيجة مطلقاً فمثلا :

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P_1 + P_3 + P_2 + P_4$$

والخ . هذا يعني ان تسلسل رسم القوى في مضلع القوى هو كيفي (شكل 1-7) .



شكل (1-7

مثال 1 :

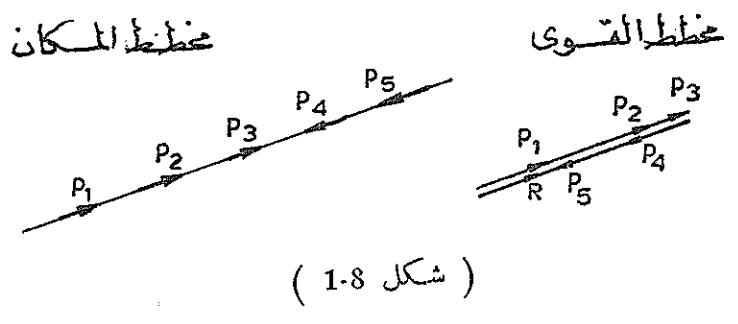
مجموعة قوى مستوية مركزية يحملها حامل واحد (شكل 1-8) .

المعطى : P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 .

المطلوب : ايجاد محصلة مجموعة القوي .

الحل :

لقد تم في مخطط القوى من الشكل (1-8) رسم مضلع القوى ولقد تم فيه ايجاد المحصلة R .



(شكل 1-8)

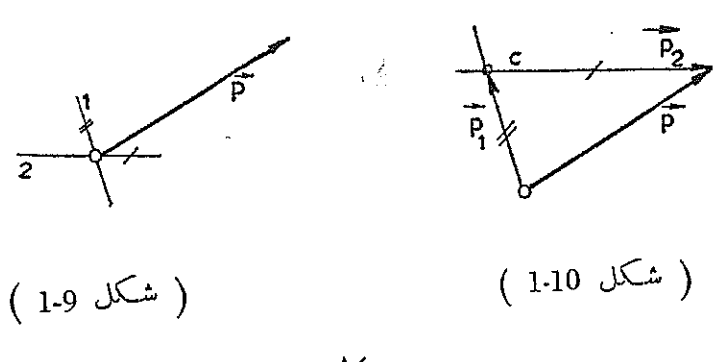
تحليل قوة لمركبتين:

المعطى : القوة P واتجاه كل من المركبتين (شكل 1-9).

المطلوب : تعيين المركبتين P_1 و P_2 (مركبتي القوه P بالاتجاه 1 وبالاتجاه 2) .

الحل :

بنفس الطريق الذي تم بـه تركيب قوتين واعادتها الى قوة واحـدة (المحصلة) يمكن عكسياً تحليل القوة P الى قوتين عرفت حواملها ، تسمي هـذه القـوى بمركبات القوة P (شكل 1-10) .



(شكل 1-9)

(شكل 1-10)

لقد تم في الشكل (1-10) رسم حامل المركبة الاولى 1 ابتداء من احدى نهايتي القوة المعطاة P ثم رسم حامل المركبة الثانية 2 ابتداء من النهاية الثانية . ان نقطة تقاطع حاملي القوتين c تمثل نهاية القوة الاولى وكذلك بداية القوة الثانية .

١ ـ ٢ ـ ٢ معالجة مجموعة القوى المستوية المركزية تحليلياً

انطلاقا من المعادلة الشعاعية (1-1) التي يمكن كتابتها على شكل مركبات كما يلي :

$$\mathbf{R} = \sum_{\nu=1}^{n} (P_{x\nu}\,\mathbf{i} + P_{y\nu}\,\mathbf{j}) = R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j} \qquad (1\text{-}2)$$

(حيث ان i و j هي الاشعة الواحدية ، الاول هو باتجاه المحور x والثاني هو باتجاه المحور y).

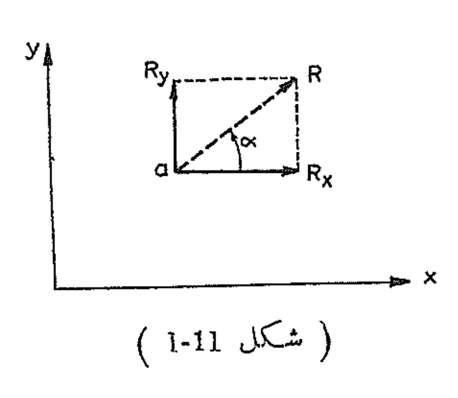
$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$$

يتم ، بمقارنة حدود طرفي العلاقة (1-2) ، التوصل للنتيجة التالية :

$$R_x = \sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu} \quad \text{و} \quad R_y = \sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu} \qquad (1\text{-}3)$$

بالاستعانة بمركبات المحصلة (شكل 1-11) يتم تعين قيمة المحصلة واتجاهها وذلك كالتالي :

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{و} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{R_z}{R_x} \qquad (1\text{-}4)$$



(شكل 1-11)

تقاس الزاوية دائماً ابتداء من المحور x الموجب وتتجه الى القوة بالمفهوم الرياضي الموجب.
فمثلا من اجل القوى الممثلة في الشكل (1.12) يستطاع التعبير عن مركبات المحصلة كما يلي :

$$R_x = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \cos\alpha_\nu$$

(1-5)

$$R_y = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + P_3 \sin\alpha_3 = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \sin\alpha_\nu$$

تعتبر R_x و R_y موجبة عندما تشير باتجاه المحاور الموجبة . تنظم الاشارة في هـذه العلاقـة بواسطة التوابع الزاوية المباشرة ، حيث يلزم اعتبار الزوايا المنفرجة ايضاً .

تمر المحصلة من النقطة المركزية المشتركة للقوى وهي تـكافىء مجموعة القوى المستوية المركزية .

يفضل ان يتم حساب قيمة واتجاه ومنحى المحصلة بواسطة المخطط التالي :

ν	P_ν	α_ν	$\cos\alpha_\nu$	$\sin\alpha_\nu$	$P_{x\nu} = P_\nu \cos\alpha_\nu$	$P_{y\nu} = P_\nu \sin\alpha_\nu$
الواحدة	Mp	°	•	•	Mp	Mp
1						
2						
⋮						
ν						
⋮						
n						
Σ	•	•	•	•	$R_x = \cdots$	$R_y = \cdots$

ان القيم الموجودة على يسار الخط المزدوج هي قيم معطاة . يشتمل السطر الثاني من الجدول على واحدات القيم المدونة في السطر الاول .

اذا كانت ، على سبيل المثال ، نتيجـــة حساب مجموعة القـــوى المركزية هي: $R_x = 0$ و $R_y \neq 0$ عندئذ ينتج ان

$$|R| = |R_y| \quad , \quad \cos\alpha = 0 \, , \, \sin\alpha = \frac{R_y}{R} = \pm 1$$

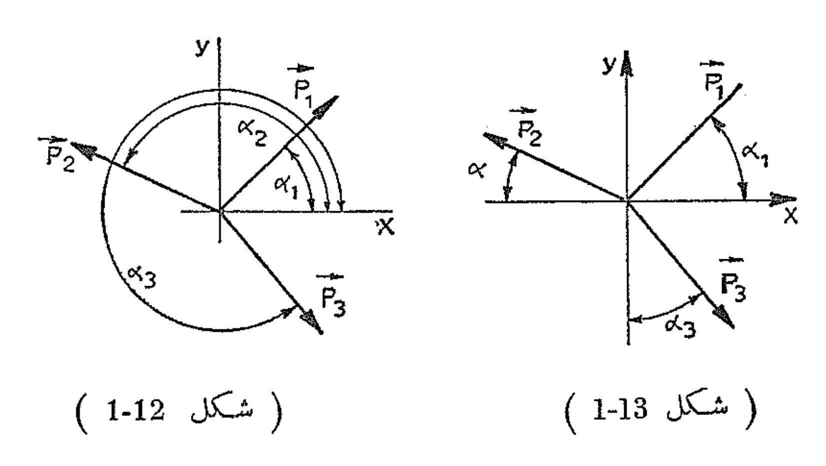
في هذه الحالة يكون حامل المحصلة موازيا للمحور y أما اتجاهها فيعين من اشارة المركبة R_y.

أما اذا كانت ، من اجل مجموعة قوى اخرى ، نتيجة الحساب هي : $R_x \neq 0$ و $R_y = 0$ فان المحصلة توازي المحور x .

لتنظيم اشارة المحصلة يفضل في الحالات العملية استخدام اصغر زاوية (شكـل 1.13) وادخال اشارة المركبات بعـين الاعتبار . فمثلا باعتبار ان القوى التي تشير باتجاه الاحداثيات الموجبة هي موجبة ينتج :

$$R_x = P_1 \cos \alpha_1 - P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 \quad (1\text{-}7)$$
$$R_y = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 - P_3 \cos \alpha_3$$

sin α3



(شكل 1-12)

(شكل 1-13)

١ ـ ٢ ـ ٣ شروط التوازن

أ ـ شروط التوازن التخطيطية

مبدأ توازن قوتين :

تتوازن مجموعة قوى تتألف من قوتين اذا حملها حامل واحد وكانتا متساويتين بالقيمـة ومتعاكستين بالاتجاه (شكل 1-14) .

(شكل 1-14)

شروط توازن مجموعة قوى:

تؤثر في نقطة ما من جسم عدة قوى تسمح بتركيبها واعادتها الى محصـلة . تسيطر على الجسم حالة التوازن عندما تقابل محصلة مجموعة القوى قوة وحيدة لها :

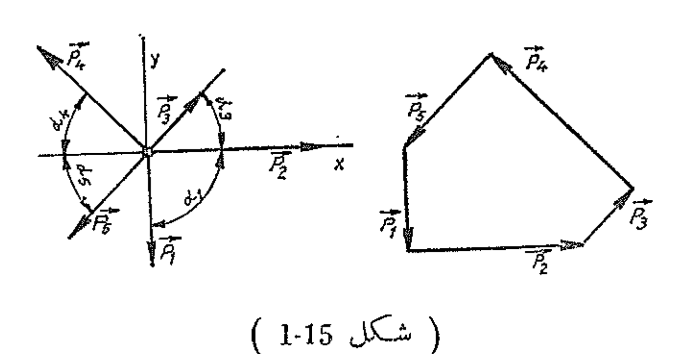
١ ـ نفس القيمة المطلقة و

٢ ـ حامل واحد (يحملها حامل واحد) و

٣ ـ اتجاه يعاكس اتجاهها .

تسمى هذه القوه بقوة التوازن (او قوة رد الفعل) .

على العموم لا حاجة لاعادة مجموعة القوى الى محصلتها وانما يمكن فوراً القول بأن الجسم موجود في حالة توازن عندما تشكل مجموعة القوى المؤثرة عليه مضلع قوى مغلق (مضلعاً مغلقاً للقوى) (شكل 1-15) .



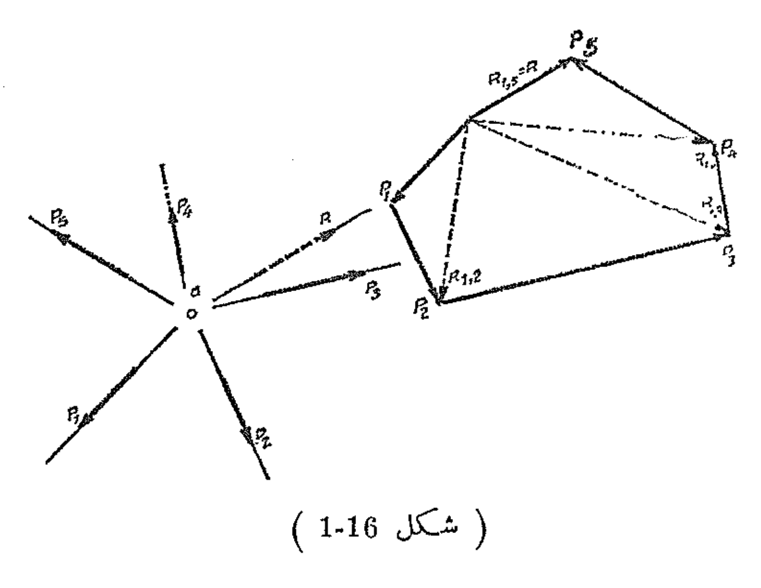
(شكل 1-15)

النتيجة :

أثناء تركيب (جمع) مجموعة القوى المستوية المركزية تم الحصول على النتائج التالية :

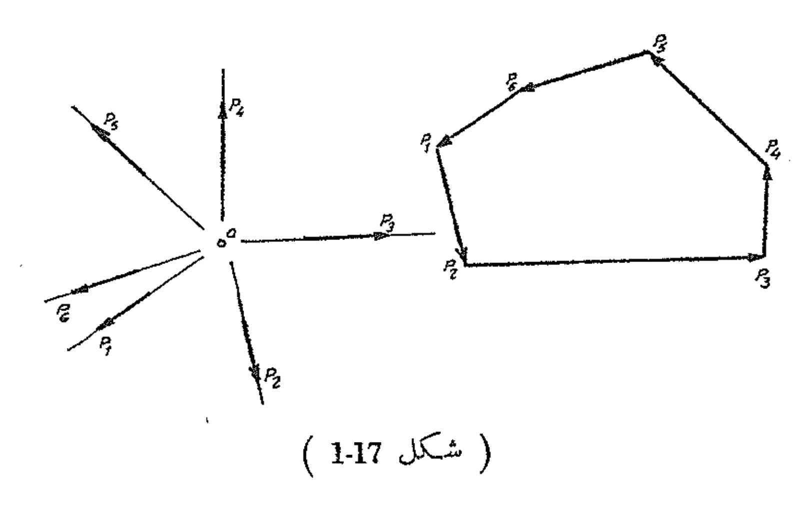
١ ـ تعيد مجموعة القوى نفسها الى قوة واحده تكافئها (لها محصلة) .

العلامة التخطيطية : مضلع القوى مفتوح (شكل 1-16) .



(شكل 1-16)

٢ ـ تسيطر على مجموعة القوى حالة التوازن (ليس لها محصلة) .
العلامة التخطيطية : مضلع القوى مغلق (شكل 1-17) .



(شكل 1-17)

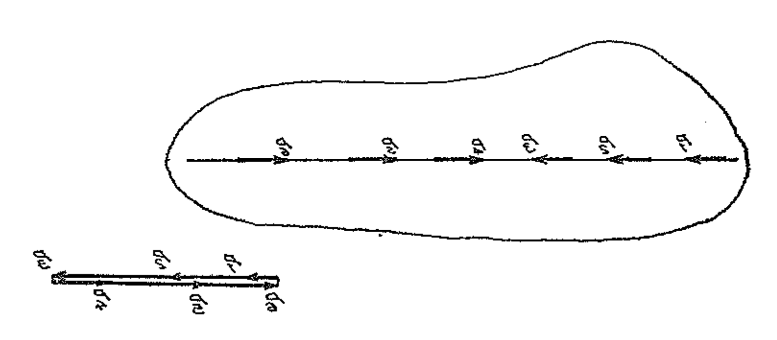
مثـال 2 :

مجموعة قوى مستوية مركزية يحملها حامل واحد (شكل 1-18) .

المعطى P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 .

المطلوب : التأكد من ان مجموعة القوى هي مجموعة متوازنة.

الحـل :



(شكل 1-18)

لقـــد تم في مخطـــط القوى من الشكل (1-18) رسم مضلع القوى ، حيث يلاحـظ انه مضلع مغلق ، اي ان مجموعة القوى هي مجموعة متوازنة .

ب ـ شروط التوازن التحليلية :

كما ذكر سابقاً فلا داعي لاعادة مجموعة القوى الى محصلتها بل يمكن فوراً القول :

بأن حالة التوازن تسيطر على الجسم عندما يكون مجموع كل القوى المؤثرة عليه مساوياً للصفر أو بكلام آخر عندما تنعدم محصلة مجموعة القوى ، اي، ان $R=0$. يعبر عن ذلك تحليلياً بواسطة العلاقة التالية :

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu = 0$$

ان انعدام المحصلة يعني انعدام مركباتها ايضاً ، اي ان :

$$R_x = R_y = 0$$

هنا ايضاً يمكن تحليلياً التعبير عن العلاقة السابقة كما يلي :

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu} = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu} = 0 \qquad (1\text{-}8)$$

ان العلاقة (1-8) التي تشتمل على معادلتين شرطيتين بالاتجاه x والاتجاه y هي معادلات لازمة وكافية لتوازن مجموعة القوى المستوية المركزية .

النتيجة :

تسيطر على مجموعة القوى المستوية المركزية حالة التوازن عندما ينعدم المجموع الجبري لمركبات قوى المجموعة باتجاه الاحداثي x وكذلك باتجاه الاحداثي y . وبما أن إختيار موضع الاحداثيات x و y كان كيفياً لذلك يستطاع التعبير عن شروط التوازن بالشكل العام التالي : تسيطر على مجموعة القوى المستوية المركزية حالة التوازن عندما ينعدم المجموع الجبري لمركبات كل المجموعة باتجاهين ما (شريطة ان لايقع هذين الاتجاهين على استقامة واحدة وباتجاه متعاكس ، اي ان الزاوية التي بينها هي 180° . على العوم يفضل اخذ أي اتجاهين متعامدين) . تسمى شروط التوازن هذه بشروط توازن القوى. اما شرط توازن العزوم فهو هنا محقق من البداية لكون مجموعة القوى المستوية مركزية .

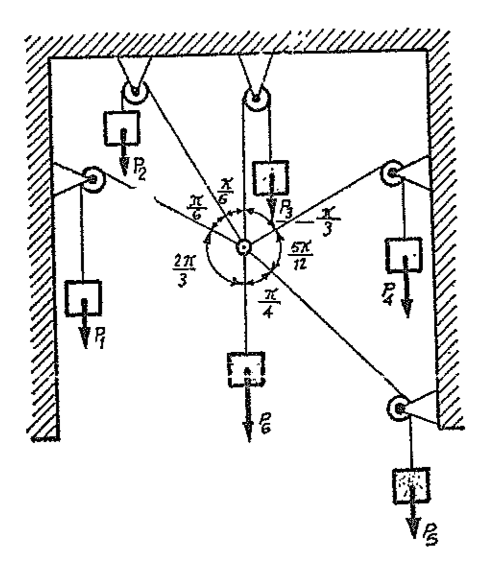
مثـال 3 :

المعطى : قيم بعض قوى المجموعـة المستوية المركزية :

$P_1 = 50{,}0$ kp , $P_2 = 60{,}0$ kp , $P_3 = 100{,}0$ kp , $P_4 = 20{,}0$ kp (شكل 1-19)

المطلوب : ايجاد قيم القوى P_5 و P_6 وذلك حتى تسيطر على المجموعة حالة التوازن .

الحـل :



شـــــكل 1-19

سوف يتم اجراء الحل باستخدام الجدول (1.6) :

ν	P_ν	α_ν	$\cos\alpha_\nu$	$\sin\alpha_\nu$	$P_{x\nu} = P_\nu \cos\alpha_\nu$	$P_{y\nu} = P_\nu \sin\alpha_\nu$
الواحدة	kp	·	·	·	kp	kp
1	50,0	$5\pi/6$	−0,8660	0,5000	−43,3015	25,0000
2	60,0	$2\pi/3$	−0,5000	0,8660	−30,0000	51,9618
3	100,0	$\pi/2$	0	1,0000	0	100,0000
4	20.0	$\pi/6$	0,8660	0,5000	17,3206	10,0000
5	P_5	$7\pi/4$	0,7071	−0,7071	0,7071 P_5	−0,7071 P_5
6	P_6	$3\pi/2$	0	−1,0000	0	$-P_6$
Σ	·	·	·	·	R_x	R_y

$$R_x = -55{,}981 + 0{,}707\, P_5 \quad , \quad R_y = 186{,}962 - 0{,}707\, P_5 - P_6$$

بالاستعانة بشرطي التوازن (1-8) ينتج :

$$-55{,}981 + 0{,}707\, P_5 = 0$$

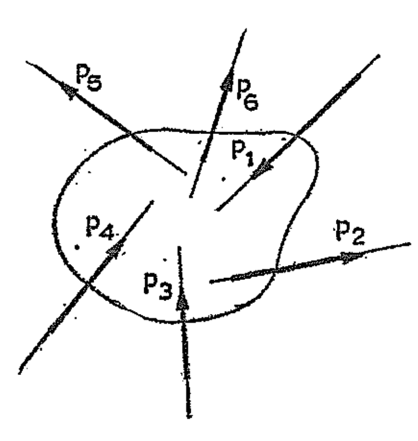
$$186{,}962 - 0{,}707\, P_5 - P_6 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين يتم التوصل للقوى المطلوبة :

$$P_5 = 79{,}12 \text{ kp} \quad , \quad P_6 = 130{,}98 \text{ kp}$$

١ ـ ٣ مجموعة القوى المستوية العامة

يقال عن مجموعة القوى المستوية انها عامة عندما تكون القوى المشكلة للمجوعة واقعة في مستوي واحد ولكنها لاتؤثر في نقطة واحدة كما ان حواملها ايضاً لاتتلاقى في نقطة واحدة (شكل 1-20) .

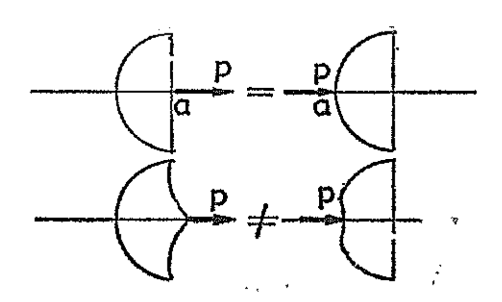


شكل 1-20

الفرض : مجموعة القوى المدروسة في هذه الفقرة تؤثر على الجسم الصلب .

١ ـ ٣ ـ ١ مبدأ زلق القوة على حاملها في الجسم الصلب

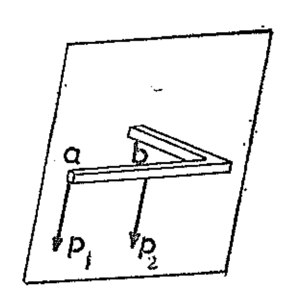
فقط في الجسم الصلب يمكن زلق القوة الوحيدة على حاملها دون ان يتغير تأثيرها. فيما يلي سوف يتم ايضاح هذه الحقيقة على نصف كرة صلبة واخرى قابلة للتغير (شكل 1-21) حيث تؤثر على كلا الجسمين قوة لها نفس القيمة (المطلقة) ونفس الحامل .



شـــكل 1-21

فمن أجل نصف الكرة الصلبة لا أهمية لنقطة تطبيق القوة a الواقعة على الحـامل . أما من أجل نصف الكرة المتغيرة فعلى عكس ذلك فان تأثير القوة P مرتبط بنقطة تطبيقها .
يمكن التعبير عن هذه الحقيقة بالـكلام كما يلي :

ان تأثير القوة الوحيدة على الجسم غير مرتبط بنقطة تطبيقها الواقعة على حاملها . في حالة انتقال القوة انتقالاً موازياً على نفسها يتغير تأثيرها على الجسم الصلب بشـكل واضح .
فبسهولة يمكن ايضاح هذه الحقيقة على قبضة الباب (1-22) ، ففي الفقرة ١ - ٣ - ٦ سوف يتم شرح ذلك بالتفصيل



شـكل 1-22

١ - ٣ - ٢ معـالجة مجموعة القوى المستوية العامة تخطيطياً

α - تركيب (جمع) قوتين :

المعطى : القوة P_1 ونقطة تأثيرها على الجسم الصلب a .
القوة P_2 ونقطة تأثيرها على الجسم الصلب b .

المطلوب : ايجاد محصلة القوتين .

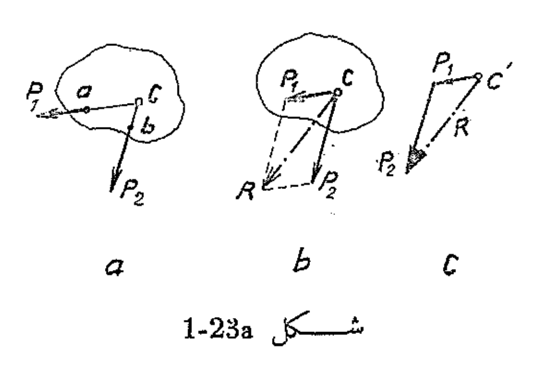
الحل :

أ ـ بطريقـة متوازي اضلاع القوى (شـكل 1-23a) :

أ ـ ١ يمدد حاملي القوتين P_1 و P_2 حتى يتلاقوا في نقطة واحدة هي النقطة c .

أ ـ ٢ تزلق القوتين P_1 و P_2 على حواملها حتى النقطة c .

أ ـ ٣ يرسم متوازي اضلاع القوى وتعين المحصلة R التي تمثل قطره .



شـــكل 1-23a

ب ـ بطريقة مضلع القوى (مثلث القوى) (شـكل 1-23b) :

ب ـ ١ ترسم القوة P_1 (في مخطط القوى) .

ب ـ ٢ ترسم من نهاية القوة P_1 القوة P_2 .

ب ـ ٣ تعين المحصـلة R التي تمثل الخط الواصل بين بـداية P_1 ونهـاية P_2 (خط اغلاق مضلع القوى) .

ب ـ ٤ يمدد ، في مخطط المكان ، حاملي القوتين P_1 ، P_2 فيتلاقوا في النقطة c .

ب ـ ٥ يرسم ، في مخطط المكان ، موازياً للمحصلة R بحيث يمر من النقطة c .

β ـ تركيب (جمع) ثلاثة قوى (بواسطة المحصلة الجزئية) :

المعطى : القوى الثلاثة P_1 و P_2 و P_3 ونقاط تطبيقها على الجسم الصلب a , b , c .

المطلوب : ايجاد محصلة هذه القوى .

الحـــل :

١ ـ تجمع القوتين P_1 و P_2 ، في مخطط القوى ، فيتم الحصول على المحصلة $R_{1,2}$.

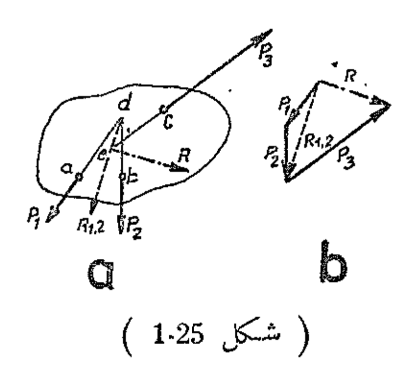
$$P_1 + P_2 = R_{1,2}$$

٢ ـ تجمع القوتين $R_{1,2}$ و P_3 فيتم الحصول على المحصلة النهائية R .

$$P_3 + R_{1,2} = R$$

٣ ـ يمدد حاملي القوتين P_1 و P_2 ، في مخطط المكان،فيتلاقوا في النقطة d ثم يرسم منها موازيا للمحصلة الجزئية $R_{1,2}$.

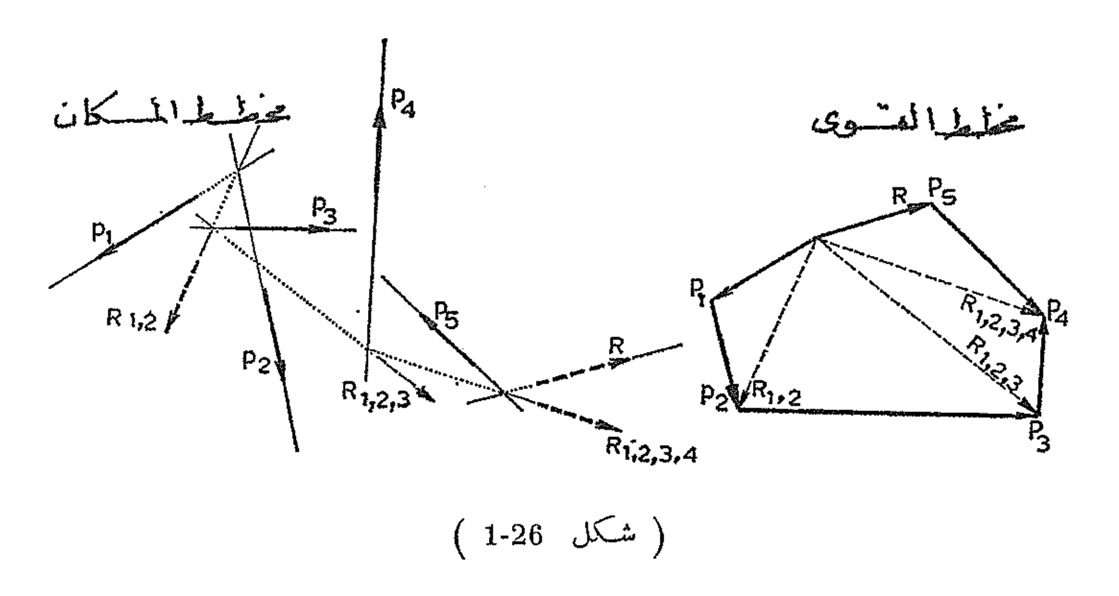
٤ ـ يمدد حاملي القوتين $R_{1,2}$ و P_3 فيتلاقوا في النقطة e ثم يرسم منها موازياً للمحصلة النهائية R (شكل 1-25) .



(شكل 1-25)

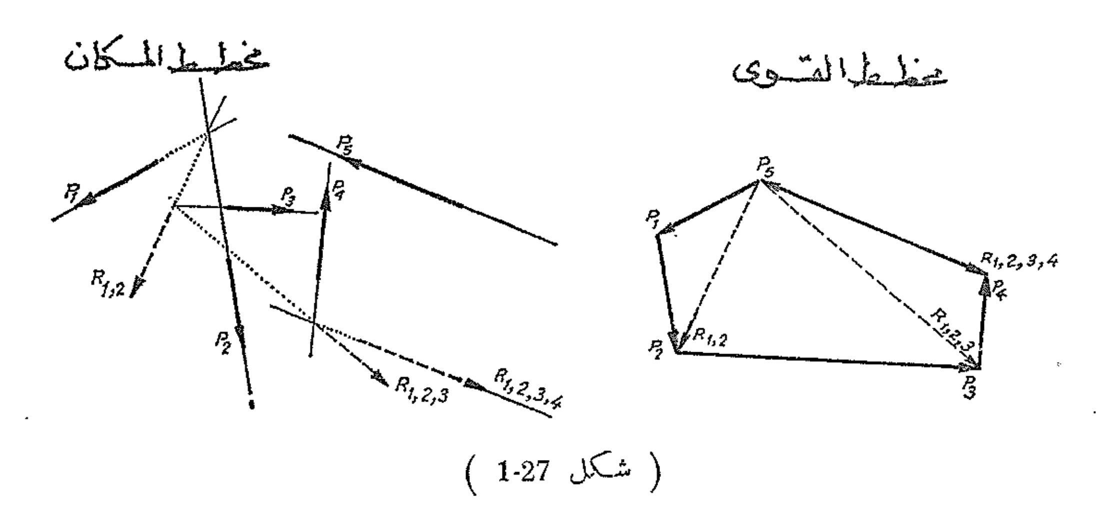
نتيجة :

١ ـ مضلع القوى مفتوح ، هذا يعني ان لمجموعة القوى المستوية محصلة تكافئها (شكل 1-26) .



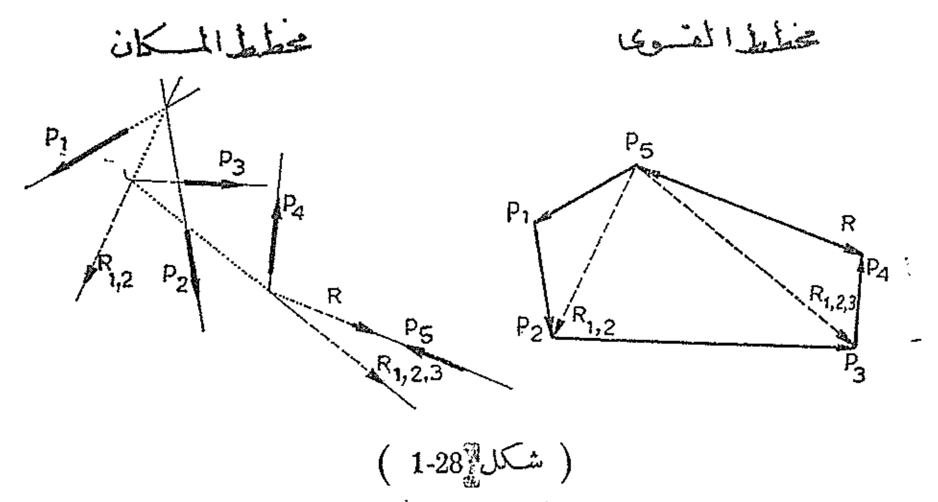
(شكل 1-26)

٢ ـ مضلع القوى مغلق ، هذا يعني انه يمكن الاستعاضة عن مجموعة القوى المستوية بمزدوجة قوى ، عزمها المحصل هو M (شكل 1-27) .



(شكل 1-27)

٣ ـ مضلع القوى مغلق ، وفي نفس الوقت لا تتشكل ، في مخطط المكان مزدوجة قوى ، وهذا يعني ان مجموعة القوى المستوية هي مجموعة متوازنة (شكل 1-28) .



(شكل 1-28)

٧ ـ تركيب (جمع) مجموعة القوى المستوية العامة بطريقة المضلع الحبلي :

يصعب استعمال الطريقة السابقة التي تم استعمالها في تركيب ثلاثة قوى (طريقة المحصلة الجزئية) لتعين محصلة مجموعة قوى مستوية عامة وذلك عندما تقع نقطة تقاطع حوامل القوى خارج ورقة الرسم وتصبح غير ممكنة عندما تتوازى قوى المجموعة كما وانها تفقد وضوحها عندما تتألف المجموعة

المدروسة من عدد كبير من القوى . للاسباب المذكورة يفضل دائماً استخـــدام طريقة المضلع الحبلي التي تقود دائماً للهدف والتي سوف يتم شرحها على مجموعة القوى الممثلة في الشكل (1-29a).

المعطى : مجموعة القوى الممثلة في الشكل (1-29a) .

المطلوب : ايجاد محصلة مجموعة القوى (قيمتها واتجاهها وحاملها) .

الحـــل :

ترسم ، في مخطط المكان (شكل 1-29a) ، حوامل القوى بعد اختيار مقياس اطوال مناسب (1 cm = λ cm) بعد ذلك ترسم هذه القوى في مخطط القوى (شكل 1-29 b) وبمقيـاس قوى مناسب (1 cm = ϰ kp) فينشأ عنها مضلعاً للقوى والذي يتم منه قراءة قيمة المحصلة R وكذلك يتم تحديد اتجاهها . أما تحديد مكان المحصلة فهي وظيفة المضلع الحبلي .

يختار ، في مخطط القوى وبشكل كيفي القطب P ثم ترسم الاشعة القطبية S_1 و S_5 بعـــد ذلك ترسم ، في مخطط المكان ، موازيات للاشعة القطبية مبتدئين بنقطة ما من حامل القـوة التابعة لها وبذلك يتم التوصيل لما يسمى **بالمضلع الحبلي** .

ينبغي اثناء انشاء المخطط القطبي مراعاة ما يلي : يحدد كل شعاعين قطبيين قوة واحدة في مخطط القوى (على سبيل المثال تحدد الاشعة القطبية S_1 و S_2 القوة P_1) كما ينبغـي ان تتقاطع الاشعة المذكورة على حامل نفس القوة في مخطط المكان .

بتعبير آخر : يقابل كل مضلع في مخطط القوى نقطة في مخطط المكان .

ان نقطة تقاطع الشعاع القطبي الاول والشعاع القطبي الاخير هي التي تحدد مكان حامل المحصلة (فالاشعة القطبية المذكورة هي التى تحدد ، في مخطط المكان ، موضع المحصلة R) . بسبب كون اختيار القطب ونقطة الابتداء في المضلع الحبلي كيفياً يتم الحصول من اجل كل مجموعة من القوى على عدد لا نهائي من المضلعات الحبلية .

للبرهان على صحة انشاء المضلع الحبلي يلجأ للتفكير التالي :

لقد تم ولأسباب في الرسم تحليل القوى $P_1 \cdots P_4$ الى القوى $S_1 \cdots S_5$.

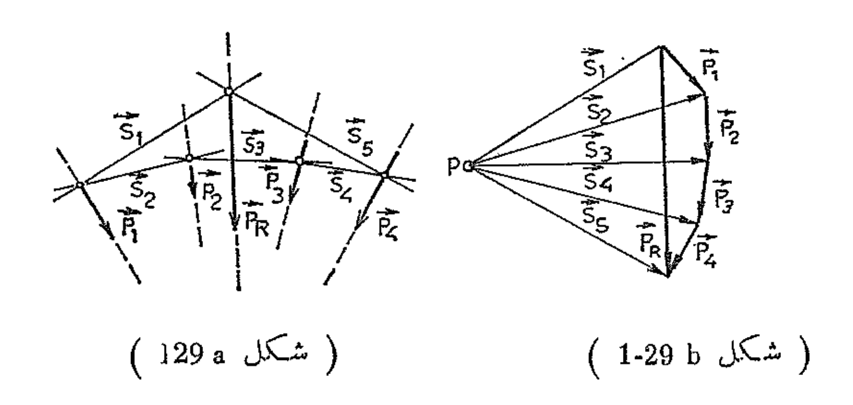
في البداية يستعاض عن القوة P_1 بمركبتيها S_1 و S_2 بعد ذلك تجمع (تركب) القوتين P_2 و S_2 فيتم الحصول على محصلتها S_3 ثم تجمع القوتين P_3 و S_3 فيـتم الحصـول محصلتها S_4

واخيراً تجمع القوتين P_4 و S_4 فتكون محصلتها هي S_5 . بواسطة تلك العمليات يكون قد تم اعادة القوى الاربعة $P_1, \cdots, P_4$ الى القوتين S_1 و S_5 .

والان ينبغي ان تمر المحصلة R من نقطة تقاطع حوامل القوتين S_1 و S_5 . وبهذا ينتهي تعيين مكان المحصلة اما قيمتها واتجاهها فيتم الحصول عليها من مضلع القوى الذي تم رسمه في مخطط القوى وهو التالي :

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = S_1 + S_5 = R$$

في حالة كون مجموعة القوى متوازية يستطاع ايضاً استخدام نفس انشاء المضلع الحبلي .



(شكل 129 a)　　　(شكل 1-29 b)

النتيجـة :

لايجاد محصلة مجموعة قوى مستوية عامة تتألف من القوى $P_1, P_2 \cdots, P_n$ يلجأ لاستخـدام طريقه المضلع الحبلي التالية :

١ ـ ترسم مجموعة القوى ، في مخطط المكان، بعد اختيار مقياس طول مناسب .

٢ ـ يرسم في مخطط القوى ، مضلع القوى العائد للمجموعة وذلك بعد اختيار مقياس مناسب للقوى ومنه يتم تعين قيمة واتجاه المحصلة R .

٣ ـ تختار نقطة ما ، في مخطط القوى ، يرمز لها بالحرف P وتسمى **بقطب مضلع القوى** .

٤ ـ يوصـل القطب P مع كافة رؤوس مضلع القوى . تسمى خطوط الوصـل المذكورة **بالاشعة القطبية** .

٥ ـ ترسم ، في مخطط المكان ، موازيات للاشعة القطبية والتى تسمى **بالاشعة الحبلية** .

يدعى مضلع الاشعة الحبلية ، في مخطط المكان ، **بالمضلع الحبلي** (شكل 1-29 b) .

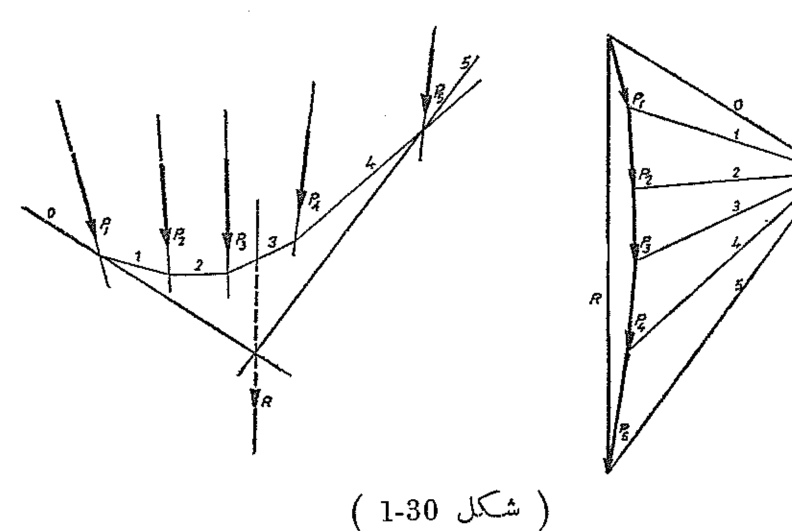
عندما يغلق ، في مخطط القوى ، شعاعان قطبيان قوة ما فان الاشعة الحبلية الموازية لها تتقاطع، في مخطط المكان ، على هذه القوة .

حسب هذه القاعدة فان نقطة تقاطع الشعاع الحبلي الاول والاخير ، في مخطط المكان ، هي نقطة من حامل المحصلة R .

8- أمثلة :

مثال 4 :

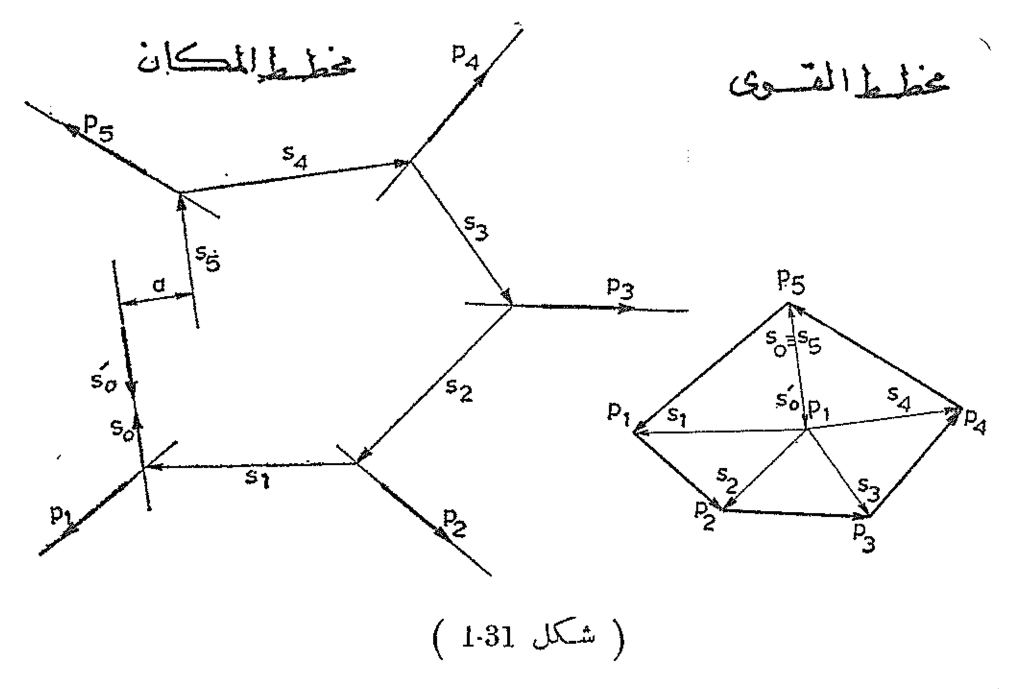
ايجاد محصلة مجموعة قوى (شكل 1-30) .



(شكل 1-30)

مثال 5 :

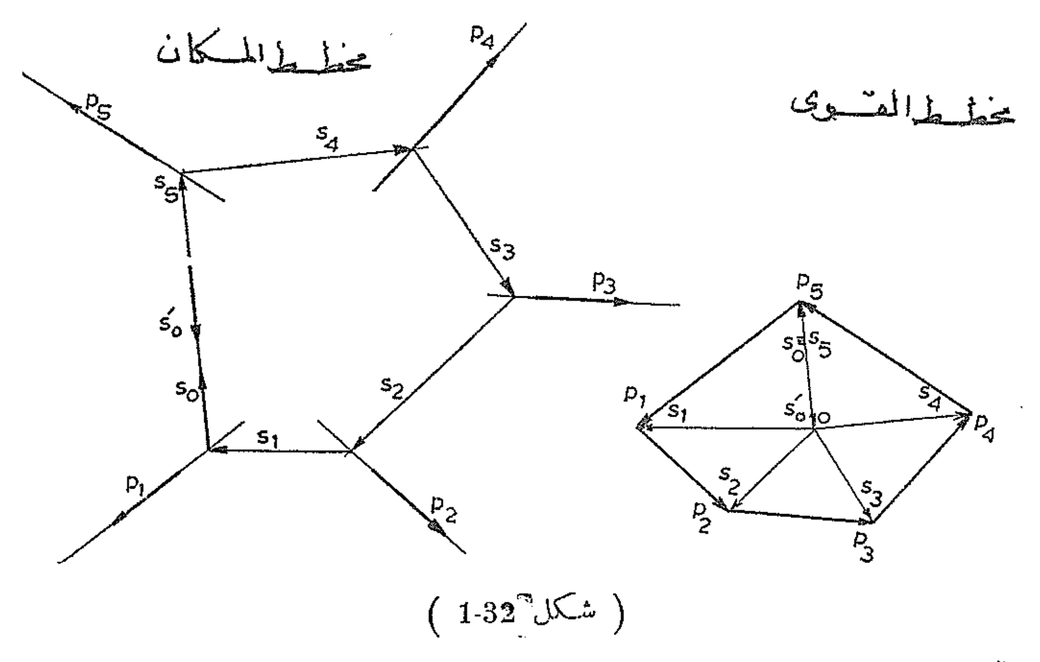
توازن القوى دون توازن العزوم (شكل 1-31) .



(شكل 1-31)

مثـال 6 :

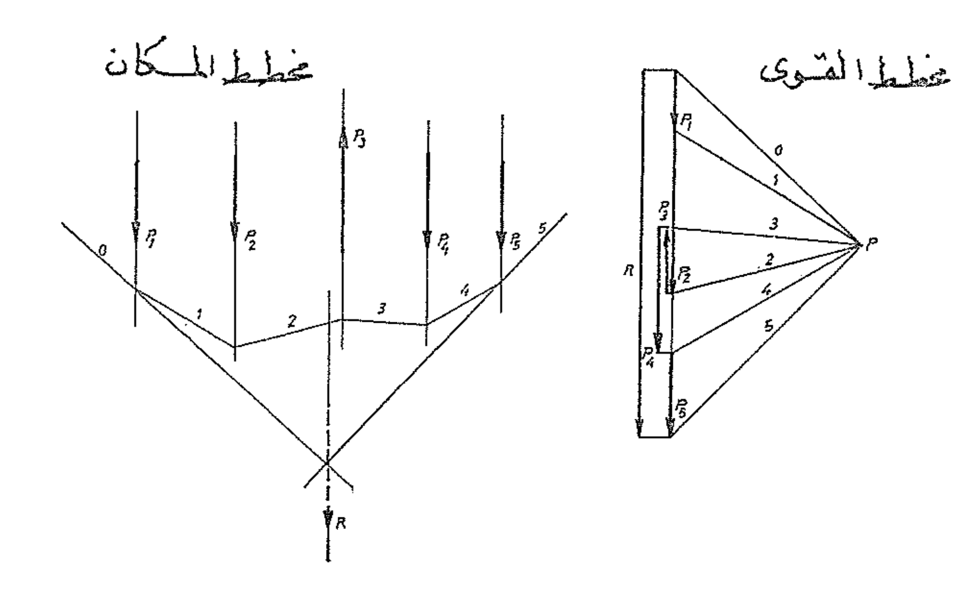
توازن القوى وتوازن العزوم (شكل 1-32) .



(شكل 1-32)

مثـال 7 :

ايجاد محصلة مجموعة قوى متوازية (شكل 1-33)



(شكل 1-33)

٤ – تحليل قوة لثلاثة مركبات وفق ثلاثة اتجاهات معلومة غير متلاقية في نقطة واحدة (بواسطة القوة المساعدة لكولمان) :

المعطى : القوة P واتجاهات المركبات الثلاثة 1 , 2 , 3 (شكل 1-34)

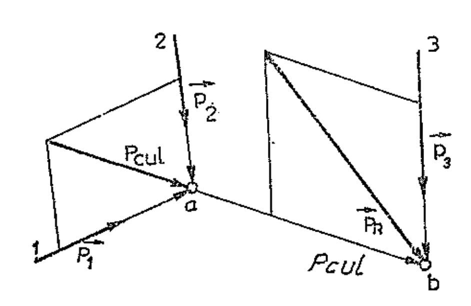
المطلوب : ايجاد مركبات القوة بالاتجاهات الثلاثة المعطاة .

الحل :

١ – تمديد الاتجاهين 1 , 2 حتى يتلاقوا في نقطة مشتركة a .

٢ – تمديد الاتجاه 3 وحامل القوة P حتى يتلاقوا في نقطة مشتركة b .

٣ – وصل النقطة b بالنقطة a .



شكل 1-34

٤ ـ تحليل القوة P لمركبتين الاولى بالاتجاه 3 (ومنه يتم التوصل الى المركبة P_3) والثانية بالاتجاه $\overline{ab}$ (ومنه يتم التوصل الى القوة المساعدة لكولمان P_{cul}) .

٥ ـ زلق القوة P_{cul} الى النقطة a ثم تحليلها بالاتجاهين 1 , 2 وبذلك يتم التوصل للمركبتين P_1 و P_2 .

١ ـ ٣ ـ ٣ ايجاد محصلة مجموعة القوى المستويه العامة تحليلياً

يتم ايجاد قيمة واتجاه محصلة مجموعة القوى المستوية العـامة حسب الفقرة ١ ـ ٢ ـ ٢ وذلك بالاستعانة بمجموع مركبات القوى :

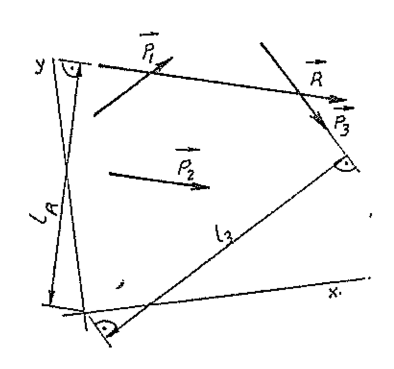
$$R_x = \sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \cos \alpha_\nu$$

$$R_y = \sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \sin \alpha_\nu$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}$$

اما مـكان المحصلة فيتم الحصول عليه من شرط تسـاوي العزم المحصل للقوى الافرادية (مجموع عزوم كل من القوى) بالنسبة لنقطة ما من المستوي وعزم محصلة القوى R (العزم الذي ينتـج عن محصلة القوى R ببعدها عن نقطة النسب المذكورة) (شـكل 1.35)



شـكل 1.35

$$M_l = l_B \, R = \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu \, P_\nu$$

(ينبغي في العلاقة السابقة أخذ اتجـاه الدوران بعين الاعتبار) .

منهـا ينتج :

$$l = \frac{M_R}{R} = \frac{1}{R} \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu \, P_\nu$$

يمكن التعبير عن العلاقات السابقة شعاعياً كما يلي :

$$\mathbf{R} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{P}_\nu$$

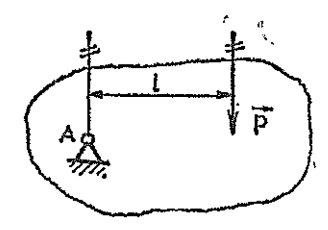
$$M_R = \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu \times \mathbf{P}_\nu = l_R \times \mathbf{R}$$

لا تعطي الكتابة الشعاعية المذكورة في المشاكل المستويـة منافعاً كبيرة بينما تقدم فوائداً كثيرة في المشاكل الفراغية ولذلك يفضل استخدامها هناك .

١ ـ ٣ ـ ٤ العزم

اذا اثرت على جسم ، ذو استناد قابل للدوران ، قوة لايمر حاملها من نقطة الدوران فان هذه القوة ستحاول تدوير الجسم (شكل 1-36) يعرف عزم القوة **P** بالنسبة لنقطـة الاستنـاد بواسطة العلاقة التالية :

$$M = l \, P$$



شـكل 1-36

حيث ان l هو البعد العمودي بين حامل القوة P وبين نقطة الدوران ويسمى هذا البعد ايضاً بذراع الرافعة .

يمكن التعبير عن العلاقة السابقة بالكتابة الشعاعية كما يلي :

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{P}$$

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{l}| . |\mathbf{P}| . \sin(\mathbf{l}, \mathbf{P})$$

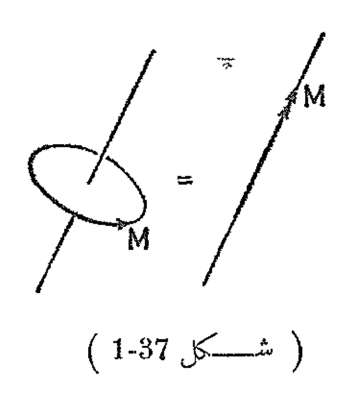
من هذه العلاقة يستنتج ان عزم قوة يتعلق بوضع نقطة النسب . أما واحدة العزم فهي واحدة القوة مضروبة بواحدة الطول (على سبيل المثال [kpm]) .

يعرف اتجاه دوران العزم على العموم بانه موجب عندما يكون بعكس دوران عقارب الساعة . اذا أثرت على جسم عدة قوى فعزمها الـكلي او ما يسمى بالعزم المحصل هو

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{P}_2 + \cdots + \mathbf{l}_n \times \mathbf{P}_n$$

$$\mathbf{M}_R = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{l}_\nu \times \mathbf{P}_\nu$$

تماماً كالقوى يمكن اعتبار العزم كشعاع ويعالج معالجة شعاعية وللتفريق بينه وبين شعاع القوة لذلك سوف يرمز له بسهم له رأسين تشير الى اتجاه دوران العزم . وفي بعض الاحيان يرمز لشعاع العزم بمنحني يحوي في نهايته سهم واحد يشير الى اتجاه الدوران (شكل 1-37) .



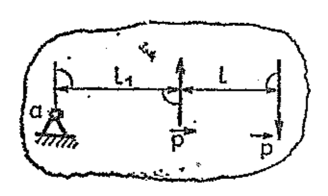
(شـــكل 1-37)

١ ـ ٣ ـ ٥ مزدوجة القوى

اذا اثرت على جسم قوتان متساويتان بالقيمة المطلقة ومتعاكستين بالاتجـاه وذات حوامل متوازية (شـكل 1-38) ، ادت لتشكيل العزم

$$M = -l_1 \; P + (l_1 + l) \; P$$

$$M = l \; P$$



شكل 1-38

بالامـكان التعبير عن العلاقة الاخيرة شعاعياً كما يلي :

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{P}$$

تسمى مجموعة القوى ذات الصفات السابقة الذكر بمزدوجة القوى .

من العلاقة السابقة يتبين ان عزم مزدوجة قوى يساوي القيمة العددية لاحدى قوى المزدوجة مضروبة بالبعد العمودي للقوتين وهو اما ان يكون موجباً أو سالباً وذلك حسبما يكون اتجـاه دوران الجسم الذي تؤثر عليه مزدوجـة القوى ، بعكس دوران عقارب السـاعة او باتجاه دوران عقارب الساعة .

ينبغي هنا التنويه الى ان عزم مزدوجة القوى بالنسبة لردود أفعال خارجية له نفس التأثير ولا علاقة له بنقطة تطبيق القوى ولذلك يمكن نقلها كيفياً .

ان شعاع العزم هو شعاع طليق (freier Vector) اما شعاع القوة فهو شعـــاع مرتبط بخط (مرتبط بحامله) (binienflüchtige Vektor) .

تتـكافيء مزدوجات القوى التي لها نفس العزم وبالعكس فان مزدوجات القوى المتـكافئـة لهـا نفس العزم، أي أن قيمة ومسافة قوى المزدوجة يمكن ان تتغير كيفياً شريطة بقاء عزمها ثابتاً (شكل 1-39)

شكل 1-39

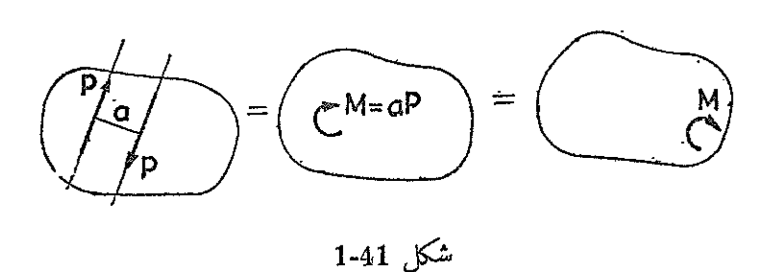
$$a_1 P_1 = a_2 P_2 = a_3 P_3 = a_4 P_4 = M$$

يتم جمع مزدوجات القوى مع بعض كما يشير اليه الشكل (1-40)

$$M_1 = -8 \cdot 1{,}5 = -12 \text{ Mpm}$$
$$M_2 = +4 \cdot 2 = +8 \text{ ,,}$$
$$M_3 = -6 \cdot 3 = -18 \text{ ,,}$$
$$M = -22 \text{ Mpm}$$

شكل 1-40

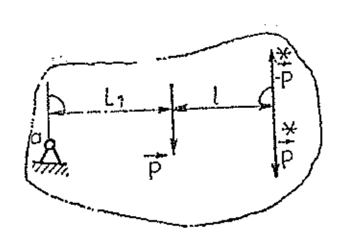
لامكانية تحديد اية مزدوجة قوى في المستوي من خلال عزمها M بشكل واضح لذلك يمكن الاستغناء عن تمثيل مزدوجة القوى بقوتين متماكستين ومتوازيتين والاكتفاء برمز العزم (شكل 1-41) .



شكل 1-41

١ ـ ٣ ـ ٦ انتقال القوة بموازاة نفسها

اذا نقلت القوة P التي تؤثر على جسم صلب نقلاً موازياً على نفسها بمسافة قدرها l لبقيت شروط توازن القوى فقط محققة اما شرط توازن العزوم فيبقى بدون تحقيق (شكل 1-42) .



شكل 1-42

لشرح ذلك سوف يؤثرعلى جسم صلب ، حسب الشـكل (1-42) ، بقوتين متساوتين بالقيمة ومتعاكستين بالاتجاه ويحملهما حامل واحد هما P^*وP^*ـ (محصلتهما معدومة) وتوازيان القوة P وتتحقق فيهما العلاقة التالية :

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^*|$$

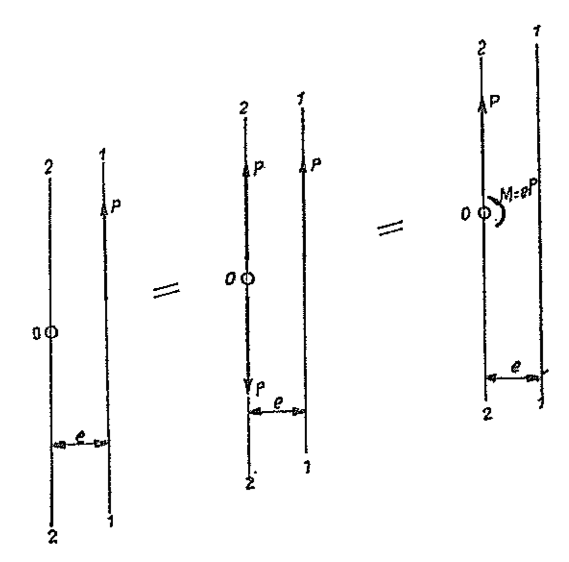
من الناحية الستاتيكية (السكونيـة) يبقى الجسم كما كان بدون تغير . بالامـكان الآن اعادة P^* و P الى مزدوجة قوى

$$M = l\,P$$

أو

$$\mathbf{M} = l \times \mathbf{P}$$

اذاً يجب في حالة نقل القوة P نقلاً موازياً على نفسها بالمقدار e اضافة مزدوجة قوى قيمتها Pe وذلك لتعديل تغير العزوم وفي ذلك الحين تبقى حالة التوازن في الجسم محققـة (بدون تغير) (شكل 1-44) .



شكل 1-44

١ ـ ٣ ـ ٧ شروط التوازن

أ ـ شروط التوازن التحليلية

تسيطر على جسم محمل، بمجموعة قوى مستوية ، حالة التوازن فقط عندما ينعدم مجموع مركبات القوى المؤثرة على الجسم باتجاهين وكذلك عندما ينعدم مجموع العزوم بالنسبة لأية نقطة ، ويعبر عن ذلك تحليلياً بواسطة المعادلات التالية :

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu} = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu} = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} M_{z\nu} = 0$$

او بواسطة العلاقات الآتية (وذلك باختيار محاور احداثية افقية وشاقولية وأخذ القوى الأفقية H والقوى الشاقولية V بعين الاعتبار) :

$$\sum_{\nu=1}^{n} H_{\nu} = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} V_{\nu} = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} M_{\nu} = 0$$

لذلك يلزم لتوازن مجموعة قوى مستوية عامة تؤثر على جسم صلب ان تتحقق شروط التوازن الثلاثة المذكورة .

أذا تقاطعت حوامل جميع القوى في نقطة واحدة فان شرط التوازن الثالث (شرط توازن العزوم) $\sum_{\nu=1}^{n} M\nu = 0$ محقق بالمطابقة.

نتيجـة :

تسيطر على جسم صلب تؤثر عليه مجموعة قوى مستوية عامة حالة التوازن عندما تتحقق الشروط الثلاثة التاليـة (شروط التوازن) :

١ ـ عندما ينعدم مجموع مركبات قوى المجموعة باتجاه الاحداثي x (او باتجاه الافق H) .

٢ ـ عندما ينعدم مجموع مركبات قوى المجموعة باتجاه الاحداثي y (او باتجاه الشاقول V) .

٣ ـ عندما ينعدم مجموع عزوم كل القوى المؤثرة على الجسم بالنسبة لاية نقطة .

تسمى هذه الشروط بشروط توازن الجسم الصلب في المستوي .

ب ـ شروط التوازن التخطيطية :

تتواجد مجموعة قوى مستوية عامة في حالة توازن عندما تنعدم محصلة القوى وكـذلك عنـدما لا تكون لها محصلة عزوم (مزدوجات قوى) .

نتائج تركيب مجموعة القوى المستوية العامة :

١ ـ مجموعة القوى تعيد نفسها لقوة وحيدة (لها محصلة) .

العلامة التخطيطية : مضلع القوى والمضلع الحبلي مفتوحين . كلاهما قابلين للاغلاق .

٢ ـ مجموعة القوى تعيد نفسها لمزدوجة قوى .

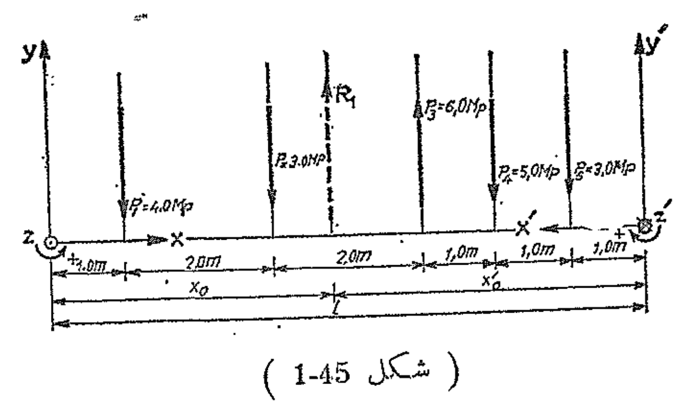
العلامة التخطيطية : مضلع القوي مغلق اما المضلع الحبلي فمفتوح ولا يمكن اغلاقه في نقطـــة نهائية (في حالة كون القوتان متوازيتان يمكن اغلاقه في اللانهاية) .

٣ ـ مجموعة القوى موجودة في حالة توازن .

العلامة التخطيطية : مضلع القوى والمضلع الحبلي مغلقين .

مثال : 8 :

المعطى : مجموعة قوى مستوية متوازية (شكل 1-45) .



(شكل 1-45)

المطلوب : ايجاد محصلة مجموعة القوى بالطريقة التحليلية .

الحل :

لتثبت مجموعة النسب (مجموعة المحاور الاحداثية) z , y , x بحيث تقع مجموعة القـــوى في المستوي yx وفي نفس الوقت بحيث توازي المحور y . علاوة على ذلك سوف تثبت مجموعة نسب اخرى هي مجموعة المحاور الاحداثية 'z' , y' , x (شكل 1-45) . باجراء الحساب على كلا المجوعتين تصبح في متناول اليد امكانية للتدقيق وهذا امر هام بالنسبة لكل مهنـدس . بسبب كون مجموعة القوى متوازية فيما بينها فان محصلتها هي ايضاً متوازية ولذلك يكفي لتثبيت مكانها تعين x_0 او x'_0 .

$$R_y = -P_1 - P_2 + P_3 - P_4 - P_5 = -9{,}0 \text{ Mp}$$

$$M_B = x_0 R_y = \sum_{\nu=1}^{5} x_\nu P_{y\nu} = -1{,}0 \,.\, 4{,}0 - 3{,}0 \,.\, 3{,}0 + 5{,}0 \,.\, 6{,}0 - 6{,}0 . 5{,}0 - 7{,}0 . 3{,}0$$
$$= -34{,}0 \text{ Mpm}$$

$$M'_B = x'_0 R_y = \sum_{\nu=1}^{5} x'_\nu P_{y\nu} = -1{,}0 \,.\, 3{,}0 - 2{,}0 \;\; 5{,}0 + 3{,}0 \,.\, 6{,}0 \;\;\; 5{,}0 \,.\, 3{,}0 - 7{,}0 . 4{,}0$$
$$= -38{,}0 \text{ Mpm}$$

$$x_\nu = \frac{\sum_{\nu=1}^{5} x_\nu P_{y\nu}}{R_y} = \frac{-34{,}0}{-9{,}0} = 3{,}78\text{m}$$

$$y_\nu = \frac{\sum_{\nu=1}^{5} x'_\nu P_{y\nu}}{R_y} = \frac{-38{,}0}{-9{,}0} = 4{,}22 \text{ m}$$

التدقيق :

$$x_0 + x'_0 = 3{,}78 + 4{,}22 = 8{,}0 \text{ m}$$

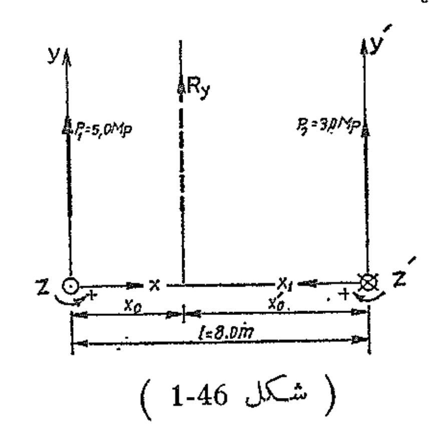
لقد اعطت نتائج الحسابات ما يلي :

تبلغ القيمـة المطلقة للمحصلة $R = 9{,}0$ Mp اما اتجاهها فهـــو بسبب الاشارة يعاكس اتجـاه المحاور y و y' .

مثـال 9 :

المعطى : مجموعـة قوى تتألف من قوتين متوازيتـين ولهما نفس الاتجـاه وهما P_1 و P_2 (شكل 1-46) .

المطلوب : ايجاد محصلة القوتين بالطريقة التحليلية .



(شكل 1-46)

الحل :

$$R_y = P_1 + P_2 = 5{,}0 + 3{,}0 = 8{,}0 \text{ Mp}$$

$$M_B = x_0 R_y = l P_2 \quad , \quad x_0 = \frac{l P_3}{R_y} = \frac{8{,}0 \,.\, 3{,}0}{8{,}0} = 3{,}0 \text{ m}$$

$$M'_B = x'_0 R_y = l P_1 \quad , \quad y_0 = \frac{l P_1}{R_y} = \frac{8{,}0 \,.\, 5{,}0}{8{,}0} = 5{,}0 \text{ m}$$

التدقيق :

$$x_0 + x'_0 = 3{,}0 + 5{,}0 = 8{,}0 \text{ m}$$

تقع المحصلة R بين القوتين وهي تقسم المسافة l بنسبة :

$$\frac{x_0}{x'_0} = \frac{P_2}{P_1}$$

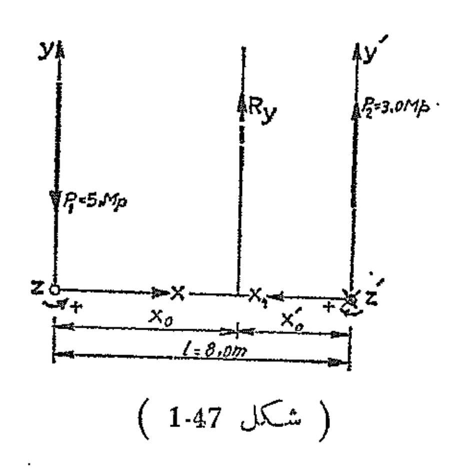
اذا تم تخيل جسم صلب محمل بالقوى P_1 و P_2 وقابل للدوران على طول المحور المركزي فان ذلك الجسم يتواجد في حالة توازن وذلك لأن :

$$x_0 \; P_1 = x'_0 \; P_2$$

مثـال 10 :

المعطى : مجموعة قوى مستوية تتألف من قوتين متوازيتين ومتعاكستين هما P_1 و P_2 (شكل 1-47).

المطلوب : ايجاد محصلة مجموعة القوى بالطريقتين التحليلية والتخطيطية .



(شكل 1-47)

الحل :

الطريقة التحليلية لايجاد المحصلة :

$$R_y = -P_1 + P_2 = -5{,}0 + 3{,}0 = -2{,}0 \text{ Mp}$$

$$M_B = x_0 \, R_y = l \, P_2 \quad ; \quad x_0 = \frac{l \, P_2}{R_y} = \frac{8{,}0 \, . \, 3{,}0}{-2{,}0} = -12{,}0 \text{ m}$$

$$M'_B = x'_0 \, R_y = l \, P_1 \quad ; \quad x_0 = \frac{l \, P_1}{R_y} = \frac{8{,}0 \, . \, 5{,}0}{-2{,}0} = +20{,}0 \text{ m}$$

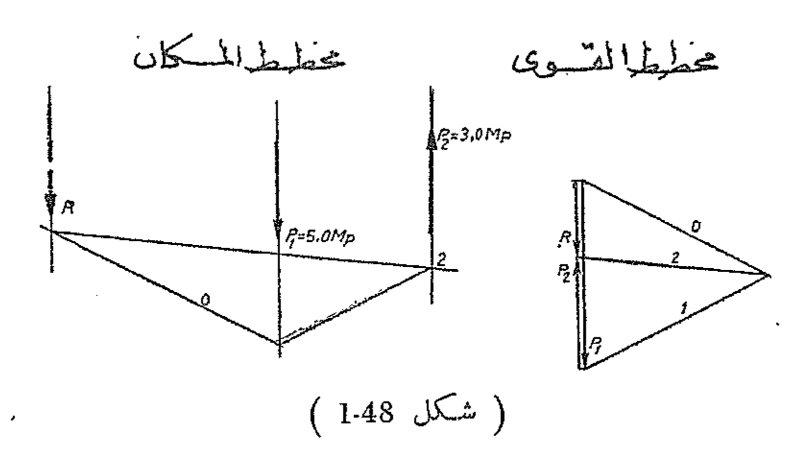
التدقيق :

$$x_0 + x'_0 = -12{,}0 + 20{,}0 = 8{,}0 \text{ m}$$

من نتائج الحسابات يتبين ان المحصلة تقع على يسار القوة P وعلى بعد 12,0 m .

الطريقة التخطيطية لايجاد المحصلة :

لقد تم في الشكل (1-48) تعين المحصلة . ان تقاطع الشعاعين الحبليين 0 و 2 ، في مخطط المكان ، تحدد نقطة من حامل المحصلة .

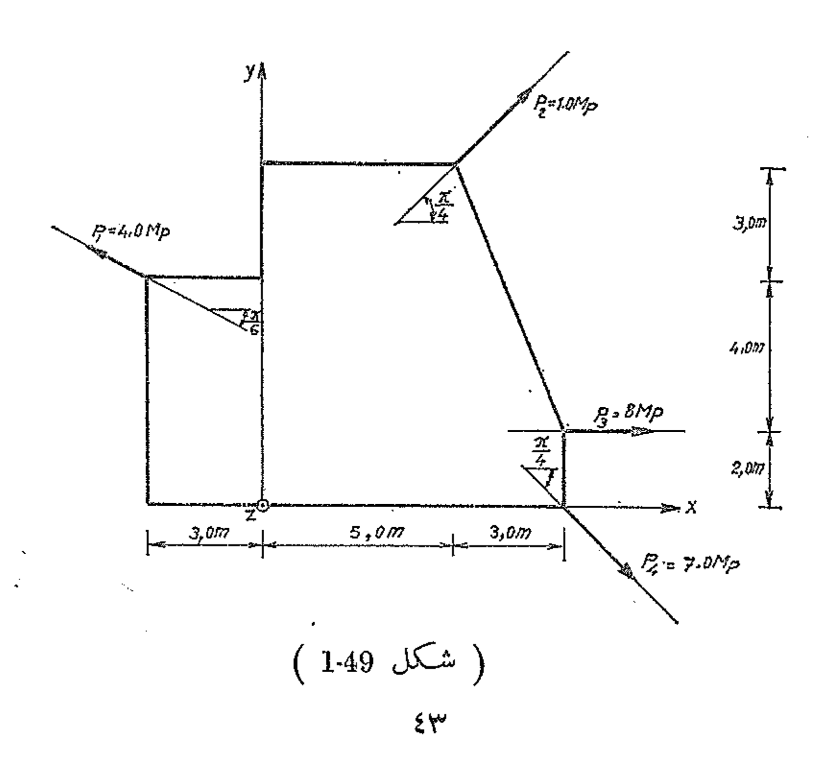


(شكل 1-48)

مثال 11 :

المعطى : مجموعة القوى المستوية P_1 , P_2, P_3 , P_4 , P_5 التي تؤثر على القرص الصلب (شكل 1-49) .

المطلوب : ايجاد محصلة مجموعة القوى بالطريقة التخطيطية .

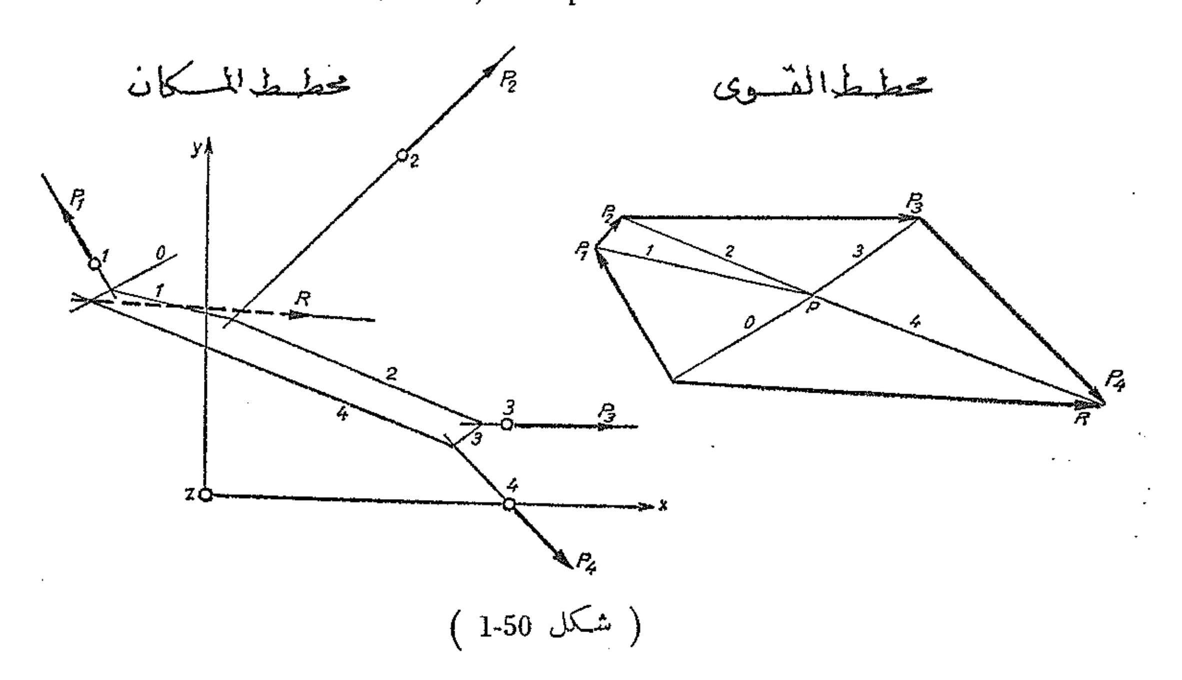


(شكل 1-49)

الحل :

لقد تم في (الشكل 1-50) رسم مخطط القوى والمضلع الحبلي وبواسطتها تم بعين المحصلة .

$$R = 11,683 \text{ Mp}$$

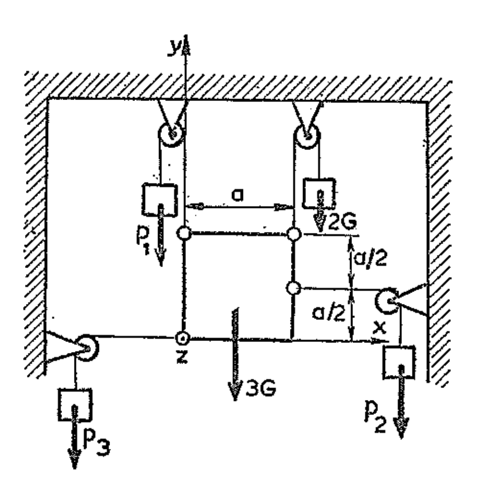


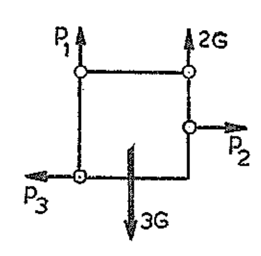
(شكل 1-50)

مثـال 12 :

يبلغ وزن قرص 3 G وتؤثر عليه القوى P_1 , P_2 , P_3 (شكل 1-51) .

المطلوب : ايجاد قيم القوى P_1 , P_2 , P_3 بحيث تسيطر على القرص حالة التوازن .





(شكل 1-51)

الحل :

تأخذ شروط التوازن في المستوي بعد التطبيق الشكل التالي :

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu} = 0 \qquad : \qquad - P_3 + P_1 = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu} = 0 \qquad : \qquad P_1 + 2\,G - 3\,G = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} M_{z\nu} = 0 \qquad : \qquad 3\,G\,\frac{a}{3} - 2\,G\,a + P_2\,\frac{a}{2} = 0$$

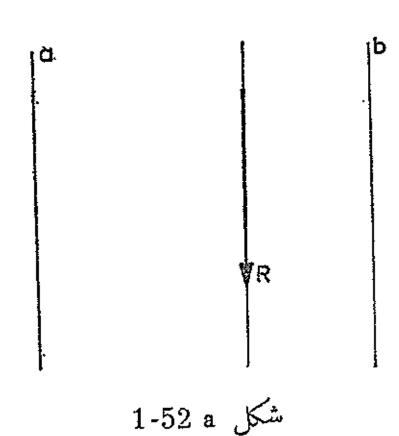
بحل هذه المعادلات يتم التوصل للمطلوب :

$$P_1 = P_2 = P_3 = G$$

مثال 13 :

المعطى : القوة R والحاملين a و b التي توازيها (شكل 1-52 a).

المطلوب : إيجاد القوتين A و B التي تشكل مع القوة R حالة التوازن والتي علمت حواملها a و b الموازية للقوة R .



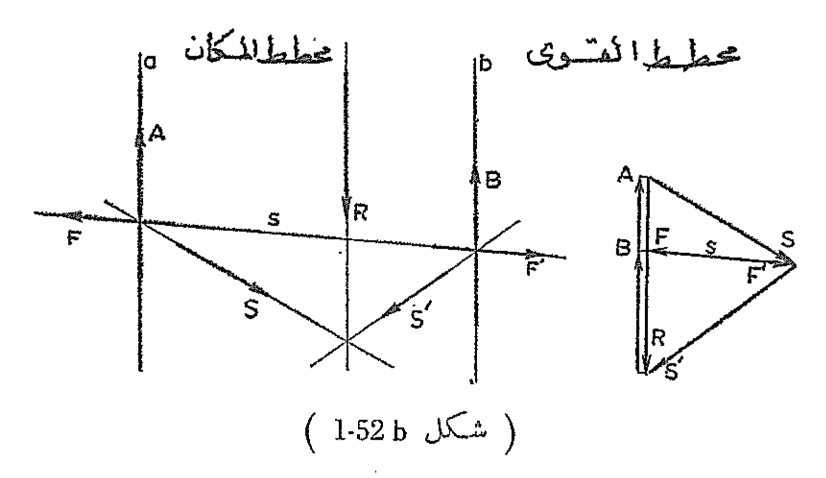
شكل 1-52 a

الحـل :

تخطيطياً :

ليستعاض عن القوة R بقوتين ما تـكافئها ولتكن S و S′ (ان حاملي القوتين S و S′ هما كيفيان) شكل (1-52b) ولتنفذ هذه الاستعاضة في مخطط المكان ، بذلك فان نقاط تقاطعها مع الحوامل a و b هي التي تحدد المستقيم s . لتحقق ، عند نقطة تقاطع المستقيمين s و a حالة التوازن بين القوة S والقوتين A و F وكذلك عند نقطة تقاطع المستقيمين s و b حالة التوازن بين القوة S′ والقوتين B و F′ وذلك بحيث تنطبق F و F′ على المستقيم s وبذلك تتفانى القوى F و F′ مع بعضها .

تشكل القوى A و B التي تم الحصول عليها في مخطط القوى مع القـوة R حالة التـــوازن وبالامكان نقلها الى مخطط المكان .



(شكل 1-52 b)

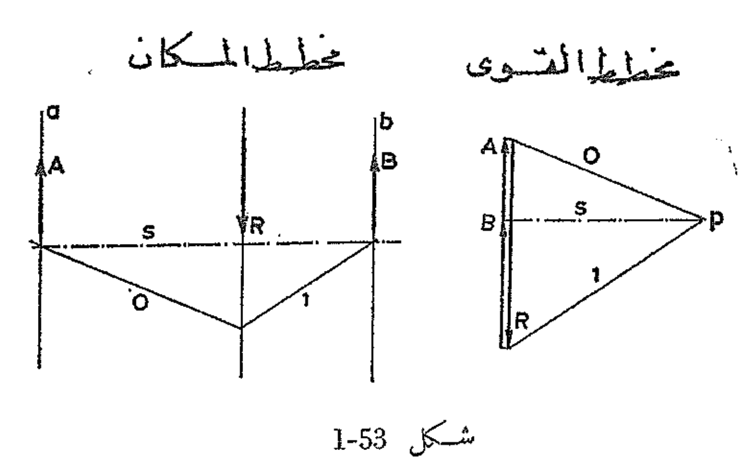
الخطوات المتبعة في الحل :

يستعاض في البداية عن القوة المعطاة R بمركبتها S و S′ بعد ذلك يحدد خط الاغلاق s ، في مخطط المكان . اما نقله الى مخطط القوى فيحدد القوى المطلوبة A و B التي تشكل مع القوة R حالة التوازن .

يعتبر الطريق التخطيطي المتبـع في الشكل (1-52 b) لتحديد A و B معكوس الطريقة التي تم شرحها في الفقرة ١-٣-٢ ج والتي تم بواسطتها ايجاد محصلة مجموعة قوى مستوية متوازيةباستخدام مخطط القوى والمضلع الحبلي .

دون رسم اسهم القوى S و ´S وكذلك F و ´F يختار ، في مخطط القوى ، القطب P كنقطة ما . بعد ذلك يرسم الشعاعين القطبين 0 , 1 ثم تنقل الى مخطط المكان (شكل 153) .

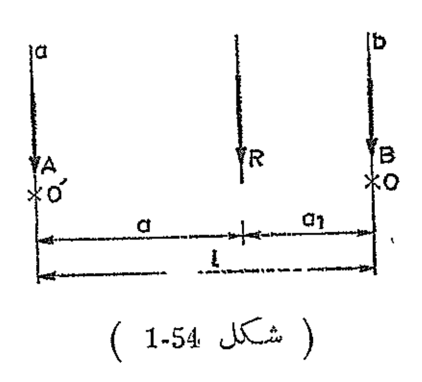
يحدد خط الاغلاق s ، في مخطط القوى ، القوتين المطلوبتين A و B التي تشكل مع القوة R حالة التوازن .



شكل 1-53

تحليلياً :

للتمكن من معالجة المشكلة تحليلياً ينبغي اللجوء الى شروط التوازن العامة (شكل 1-54)



(شكل 1-54)

فبتطبيق شرط توازن العزوم حول النقطة 0 ينتج :

$$\Sigma M_0 = 0 \quad : \quad Al + R\,a' = 0 \quad ; \quad A = -R\,\frac{a'}{l}$$

وبتطبيق شرط توازن العزوم حول النقطة ´0 ينتج :

$$\Sigma M_0' = 0 \quad : \quad Bl + R\,a = 0 \quad ; \quad B = -R\,\frac{a}{l}$$

بالاستعانة بشرط توازن القوى باتجاه المحور y يتم تدقيق النتيجة والتأكد من صحتها :
التدقيق :

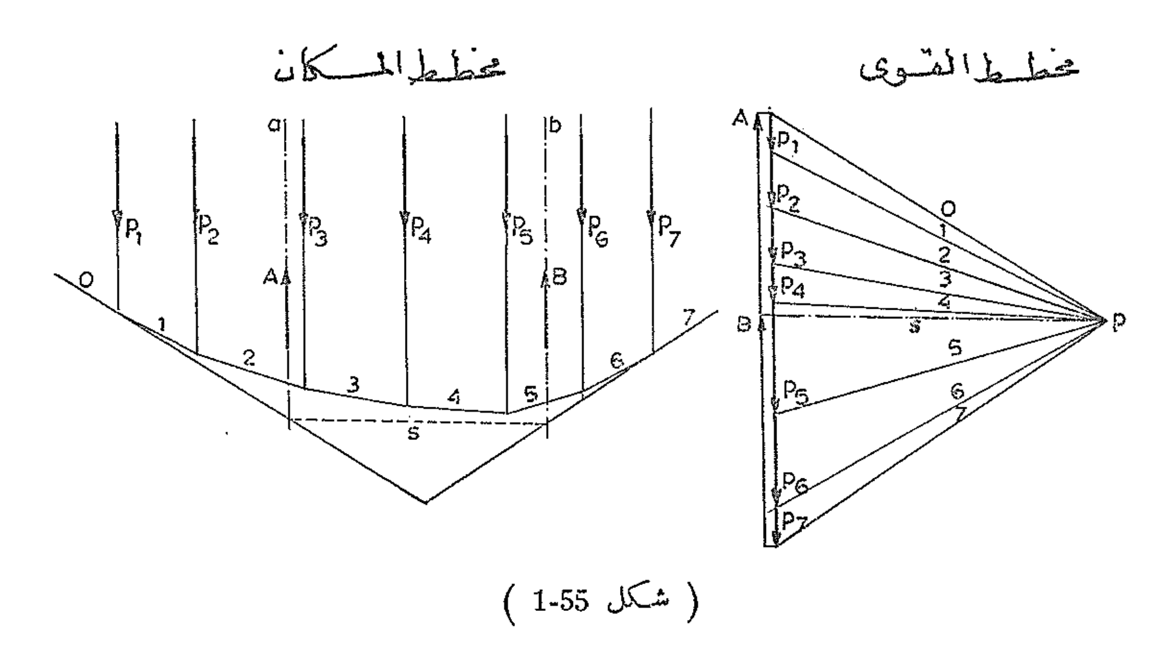
$$\Sigma P_{yv} = 0 \quad : \quad -R\frac{a'}{l} - R\frac{a}{l} + R = R\left(-\frac{a+a'}{l} + 1\right) = 0$$

مثـال 14 :

المعطى : الحوامـــل a و b ومجمـوعـــة القوى P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 , P_7 (شكل 55-1) .

المطلوب : ايجاد القوتين A و B التي علمت حواملها a و b والتي تشكل مع مجمـوعة القـوى المعطاة حالة التوازن .

الحـل :



(شكل 55-1)

ان موضع محصلة مجموعة القوى ، في مخطط المكان ، يحدد بنقطة تقاطع الشعاع الحبلي الاول 0 والشعاع الحبلي الاخير 7 . بواسطة خط الاغلاق s ، في مخطط المكان ، يتم تعين القـــوى المطلوبة A و B بحيث يكون الشرط :

$$(A, B, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7) = 0$$

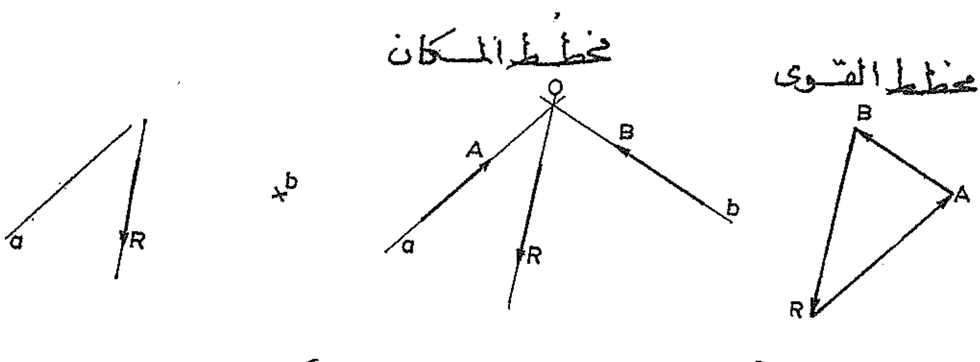
محققاً .

مثـال 15 :

المعطى : القوة **R** والحامل a (حامل القوة **A**) والنقطة b (نقطة يمر منها حامل القوة **B**) (شكل 1-56) .

المطلوب : تعيين القوى **A** و **B** التي تشكل مع القوة **R** حالة التوازن .

الحل :



شكل 1-56

شكل 1-57

١ ـ تعين في البداية نقطة تقاطع حامل القوة **R** والحامل a ولتكن هي النقطـة 0 بعـد ذلك توصل النقطة 0 مع النقطة b لتعيين حامل القوة **B** .

٢ ـ بالاستعانة بالنقطة 0 يتم تعيين القوى **A** و **B** بحيث تنطبق القوة **A** على الحامل a وبحيث يمر حامل القوة **B** من النقطة b (شكل 1-57) .

مثـال 16 :

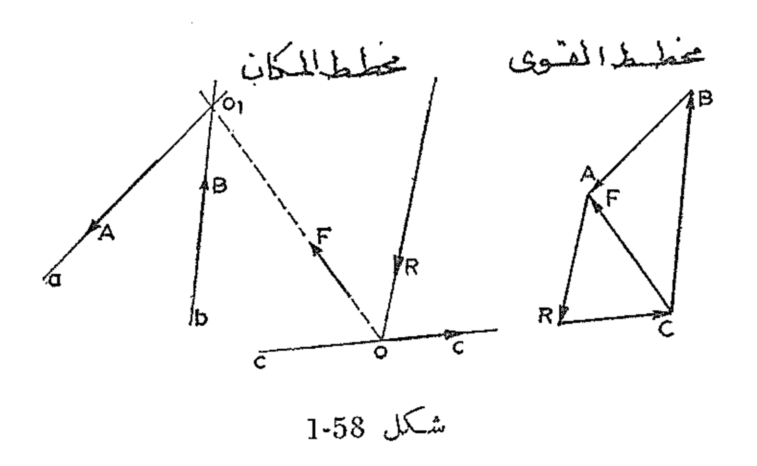
المطلوب : تعيين القوى **A** , **B** , **C** التى تشكلمعالقوة **R** حالة التوازن والتي اعطيت حواملها a , b , c شريطة ان لا يتوازى اكثر من حاملين للقوى الاربعة (شكل 1-58) .

الحـــل :

١ ـ تمدد ، في مخطط المكان ، حوامل كل قوتين (في الحالة المدروسة a مع b وكذلك c مع R) حتى تتقاطع مع بعضها وبذلك يتم التوصل للنقاط ′0 و 0 .

٢ ـ تحقق، في النقطة 0 ، حالة التوازن بين القوى **R** و **C** وبين القوة المساعـــدة **F** بحيث تنطبق القوة **C** على c وبحيث تمر القوه **F** من ′0 .

٣ ـ ليستعاض عن المحصلة الجزئية F (القوة المساعدة) في النقطة ´0 بقوى تكافئهـا وهي A و B . بذلك فان القوى A و B و C التي تم الحصول عليها تشكل مع القوة R مجموعة متوازنة . تعود هذه الطريقة التخطيطية لموجودها العالم كولمان (Carl CULMANN) .

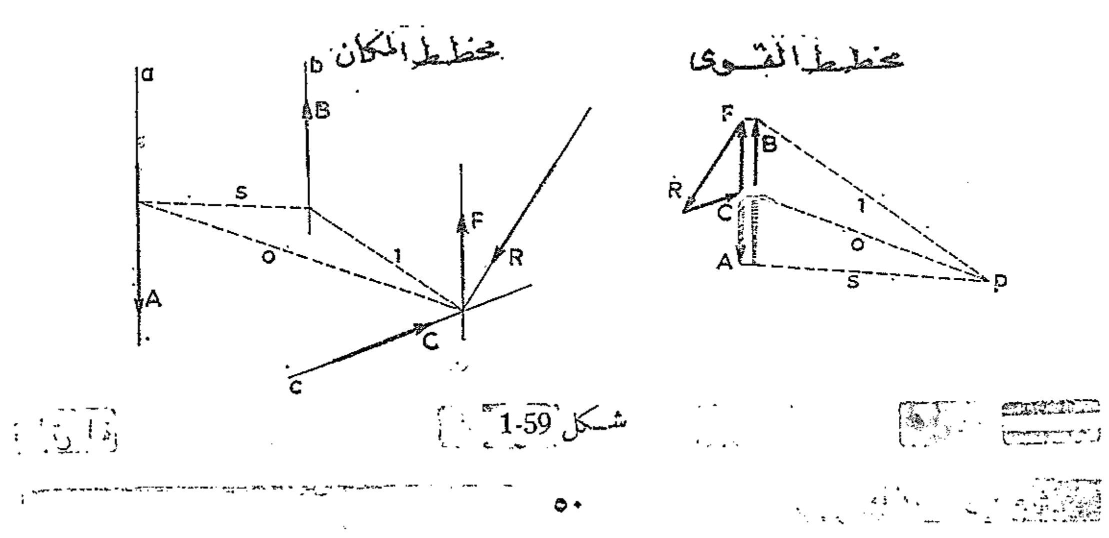


شكل 1-58

حالة خاصة :

اذا كان اتجاهان من الاتجاهات المعطاة ، وليكن الاتجاهان a و b ، متوازيين (شكل 1-59) فبالامكان علاوة على الطريقة التى تم اتباعها لتعيين القوى A و B و C ايضاً جعل القوة R تتوازن مع القوى C و F . ينبغي ان تكون القوه F موازية للحوامل a و b . تحلل المحصلة الجزئية F الى القوتين A و B . للقيام بذلك تختار، في مخطط القوى ، النقطة P كقطب ثم ترسم الاشعة القطبية والاشعة الحبلية 0 , 1 . عندئذ يحدد خط الاغلاق s القوى A و B ، في مخطط القوى .

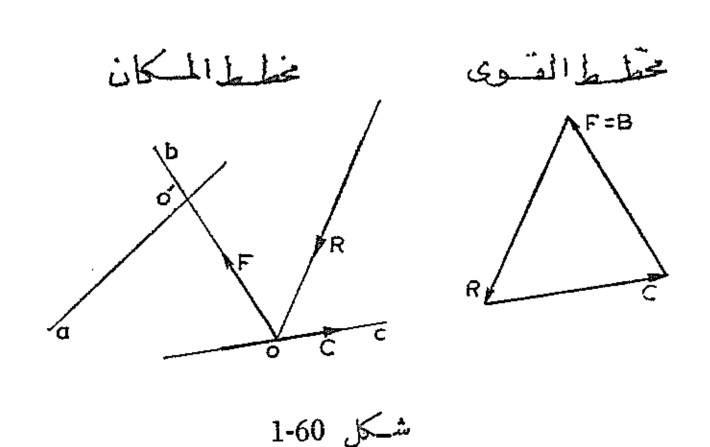
تشكل القوى A و B و C التى تم ايجادها مع القوة R حالة التوازن .



شكل 1-59

حالة خاصة :

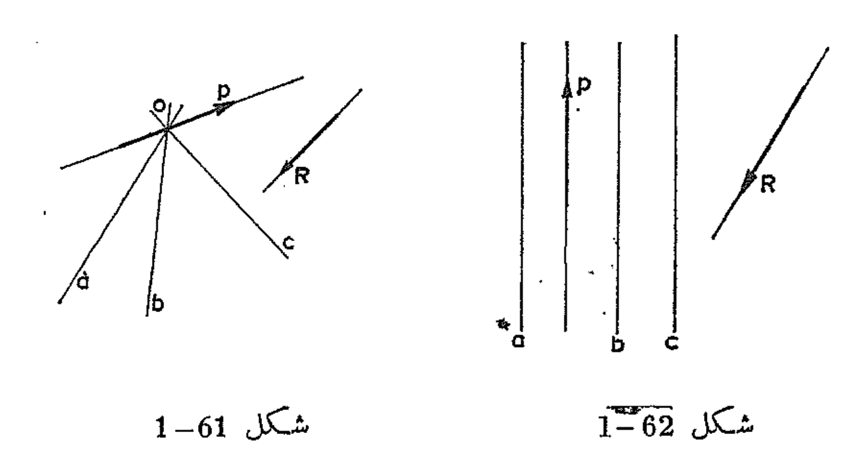
اذا تقاطعت الحوامل b و c على حامل القوة R (شكل 60-1) عند ذلك تنطبق المحصلة الجزئية F على الحامل b وبذلك تتكافىء القوة B مع القوة المساعدة (المحصلة الجزئية) F كما وان القوة A تأخذ قيمة الصفر .



شكل 60-1

ان مسألة تحقيق حالة التوازن بين قوة معطاة وبين ثلاثة قوى علمت حواملها هي مسألة غير مقررة ستاتيكياً وذلك عندما تتقاطع كافة الحوامل الثلاثة في نقطة واحدة تقع على حامل القوة R .

في حاله كون نقطة التقاطع المشتركة واقعة على حامل القوة R ولكن في اللانهاية ، أي ان كافة القوى هي متوازية ، عندئذ لا يوجد حل وحيد (eindeutige Losung) .



شكل 61 – 1

شكل 62 – 1

من اجل الحالة التى تكون فيها الحوامل كما في الشكل (61 – 1) لا يستطاع تحقيق التوازن وذلك لان اية محصلة R للقوى A و B و C تمر من النقطة المشتركة 0 كما ولا يمكنها ان تشكل ابداً مع القوة R قوة متعاكسة . ينطبق نفس التفكير على الشكل (62 – 1) ايضاً وذلك لان نقطة التقاطع 0 (بسبب توازي الحوامل) تقع في اللانهاية .

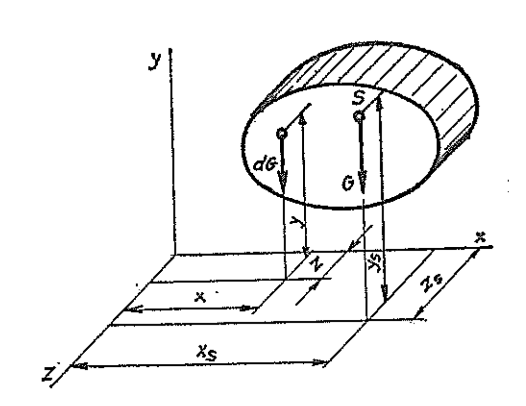
الفصل الثاني

مركز ثقل الاجسام المتجانسة

٢ ـ ١ مفهوم مركز الثقل

تشير التجارب الى ان الجسم المعلق من نقطة ما لايأخذ وضع التوازن الا عندما يختار مركز ثقله s نقطة للتعليق .

لتعيين احداثيات مركز الثقل s سوف يطبق شرط توازن العزوم . لاجراء ذلك سوف يتخيل تجزيء الجسم الى اجزاء صغيرة وزن كل منها dG وهو شاقولي وينطبق ، في الحالة المدروسة على المحور y ويؤثر في النقطة ذات الاحداثيات y و z (شكل 1–2) .



شكل 1 – 2

يرمز لعزم القوة dG بالنسبة للمحور z بالرمز dM_z وهو يساوي :

$$d M_z = - x \, d G \qquad (2\text{-}1)$$

(لقد وضعت اشارة السالب لتعاكس اتجاه شعاع العزم واتجاه المحور z) .

كما يرمز لعزم القوة dG بالنسبة للمحور x بالرمز dM_x وهو يساوي :

$$d M_x = z\, d G \qquad (2\text{-}2)$$

(لقد وضعت اشارة الموجب لتطابق اتجاه شعاع العزم واتجاه المحور x) .

ان العزم الكلي لجميع العناصر الجسمية يساوي مجموع (تكامل) العزوم الجزئية :

$$M_z = -\int_V x\, d G \quad \text{و} \quad M_x = \int_V z\, dG \qquad (2\text{-}3)$$

يشير الحرف V تحت التكامل الى امتداد التكامل على كامل حجم الجسم .

ان القوة الموجودة في نقطة التعليق (قوة التعليق) ذات الاحداثيات x و y و z تساوي (حسب شرط توازن القوى) الوزن الكلي :

$$G = \int dG \qquad (2\text{-}4)$$

بتطبيق شرط توازن العزوم على قوى العناصر الجسمية وعلى قوة التعليق ، ينتج :

$$x_s G = \int_V x\, dG \quad \text{و} \quad z_s G = \int_V z\, dG \qquad (2\text{-}5)$$

من هاتين العلاقتين يتم التوصل للعلاقات التي تعطي احداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{1}{G} \int_V x\, d G = \frac{\int_V x\, d G}{\int_V d G} \quad , \quad z_s = \frac{1}{G} \int_V y dG = \frac{\int_V z d G}{\int_V dG} \qquad (2\text{-}6)$$

وبنفس الافكار يتم التوصل للاحداثي الثالث ، وذلك عندما يتخيل أن الجسم قد دار بحيث ينطبق المحور z ، مثلا على إتجاه الشاقول (الذي يمثل إتجاه الوزن dG) :

$$y_s = \frac{1}{G} \int_V y\, dG = \frac{\int_V y\, d G}{\int_V dG} \qquad (2\text{-}7)$$

تسمى التكاملات :

$$\int_V x\,dG \quad , \quad \int_V y\,dG \quad , \quad \int_V z\,dG \qquad (2\text{-}8)$$

بالعزوم الستاتيكية للجسم ، أما G فيرمز لوزن الجسم وهو يساوي :

$$G = \gamma \cdot V = g \cdot m \qquad (2\text{-}9)$$

حيث أن γ هو الوزن النوعي لمادة الجسم كما أن V هو حجم الجسم وأن g هو التسارع الارضي و m هي كتلة الجسم . بذلك تصبح علاقات تعيين إحداثيات مركز ثقل جسم كمايلي :

$$\left.\begin{aligned}
x_s &= \frac{\int_V x\,dG}{\int_V dG} = \frac{\int_V v\,dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V x\,\gamma\,dV}{\int_V \gamma\,dV} \\
y_s &= \frac{\int_V y\,d\,G}{\int_V dG} = \frac{\int_V y\,dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V y\,\gamma\,d\,V}{\int_V \gamma\,dV} \\
z_s &= \frac{\int_V z\,d\,G}{\int_V dG} = \frac{\int_V z\,dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V z\,\gamma\,d\,V}{\int_V \gamma\,d\,V}
\end{aligned}\right\} \qquad (2-10)$$

٢ ـ ٢ مركز ثقل الاجسام :

إن أهم حالة خاصة هي حالة كون الوزن النوعي للجسم لايتعلق بالمكان وبذلك تصبح العلاقات (2-10) كما يلي :

$$x_s = \frac{\int_V x\,dV}{V} \quad ; \quad y_s = \frac{\int_V y\,dV}{V} \quad ; \quad z_s = \frac{\int_V z\,dV}{V} \qquad (2\text{-}11)$$

من هذه العلاقات يتبين أن إحداثيات مركز الثقل لا تتعلق بنوع المادة وإنما تتعلق فقـط من الشكل الهندسي للجسم . وبهذا فان **مركز الثقل هو نقطة هندسية بحتة .**

عندما يقسم جسم حجمه V الى n جسم جزئي حجم كل منها هو V_ν (حيث أن $\nu = 1, 2, \cdots, n$) وذلك بحيث يكون :

$$V = \sum_{\nu=1}^{n} V_\nu$$

عندئذ يتم التوصل،بعد الاستعانة باحداثيات مركز ثقل الجسم الجزئي ذو الرقم n التالية :

$$x_{s\nu} = \frac{\int_{V_\nu} x\, dV}{V_\nu} \quad ; \quad y_{s\nu} = \frac{\int_{V_\nu} y\, dV}{V_\nu} \quad ; \quad z_{s\nu} = \frac{\int_{V_\nu} z\, dV}{V_\nu}$$

$$\nu = 1, 2, \cdots, n$$

وذلك بتبديلها في تكاملات العلاقة (2-11) :

$$\int_V x\, d\, V = \int_{V_1} x\, dV + \int_{V_2} x\, dV + \cdots + \int_{V_n} x\, dV =$$

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + \cdots + x_n V_n = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\, V_\nu$$

$$\int_V y\, dV = \int_{V_1} y\, dV + \int_{V_2} y\, dV + \cdots + \int_{V_n} y\, dV =$$

$$y_1 V_1 + y_2 V_2 + \cdots + y_n V_n = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu\, V_\nu$$

$$\int_V z\, dV = \int_{V_1} z\, dV + \int_{V_2} z\, dV + \cdots + \int_{V_n} z\, dV =$$

$$z_1 V_1 + z_2 V_2 + \cdots z_n V_n = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu\, V_\nu$$

إلى إحداثيات مركز ثقل الجسم الكلي (العلاقة 11-2) بالشكل التالي :

$$x_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu V_\nu}{V}$$

$$y_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu V_\nu}{V} \qquad (2\text{-}12)$$

$$z_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu V_\nu}{V}$$

تستخدم العلاقات (2-12) لتعيين مركز ثقل جسم يتألف من عدة أجسام جزئية علمت مراكز ثقلها دون اللجوء للتكاملات .

يمكن أيضاً إستخدام العلاقات (2-12) لحساب مركز ثقل جسم يحتوي على فجوات شريطة إعتبار القيم التابعة لاجزاء الجسم المليء موجبة واعتبار القيم العائدة للفجوات سالبة .

لاجراء تطبيق العلاقات (2-12) يفضل إتباع المخطط الحسابي التالي :

ν	x_ν	y_ν	z_ν	V_ν	$x_\nu V_\nu$	$y_\nu V_\nu$	$z_\nu V_\nu$
الواحدة	m	m	m	m^3	m^4	m^4	m^4
1 2 ⋮ ν ⋮ n							
Σ	•	•	•	V=...	---	---	---

$$x_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu V_\nu}{V} = \cdots \quad , \quad y_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu V_\nu}{V} = \cdots \quad , \quad z_\nu = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu V_\nu}{V} = \cdots \qquad (2\text{-}13)$$

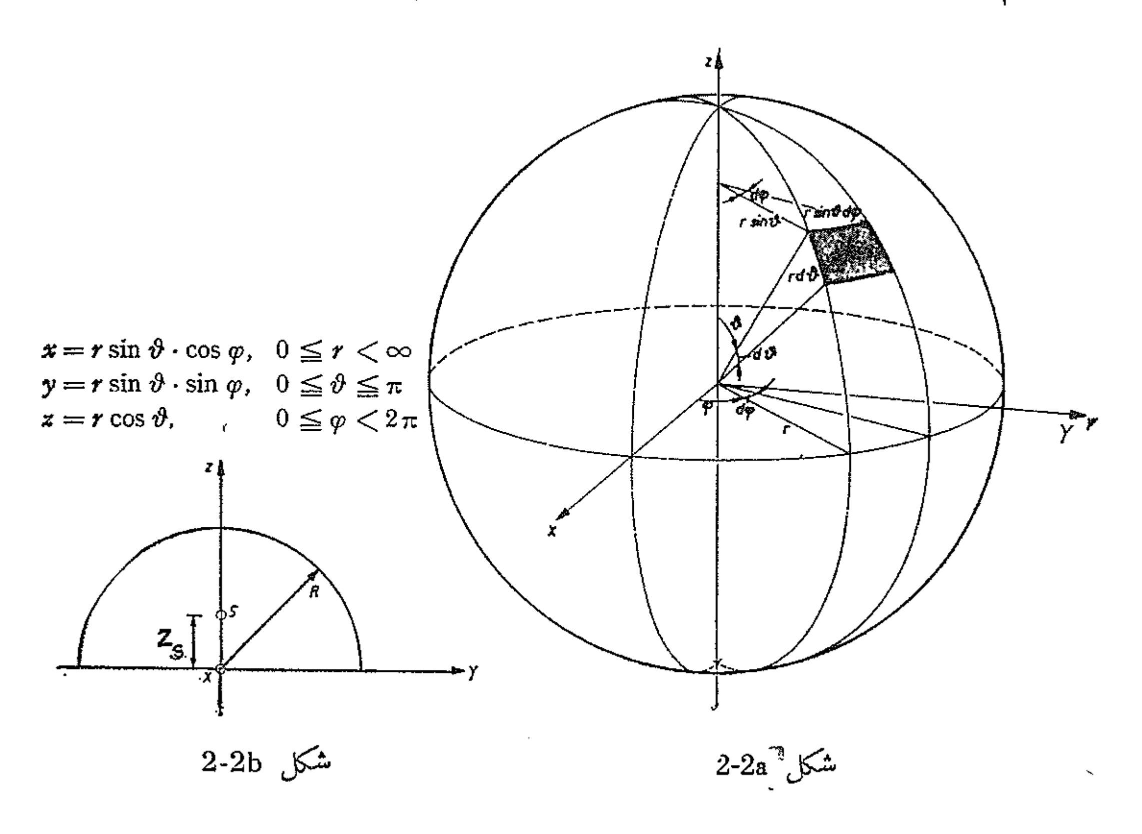
٢ ـ ٢ ـ ١ أمثلة

مثال 17 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل نصف كرة نصف قطرها R (شكل 2-2a) .

الحـل :

باستخدام إحداثيات كروية (Kugelkoordinaten) r , ϑ , φ تتحقق فيها العلاقات التالية :



شكل 2-2b   شكل 2-2a

عندئذ يتم ، من الشكل (2-2b) ، التوصل من أجل عنصر من السطح المغلف الى العلاقة التالية:

$$dF = r^2 \sin \vartheta \, . \, d\vartheta \, d\varphi$$

ومن أجل عنصر حجمي إلى العلاقة الآتية :

$$dV = r^2 \sin \vartheta \, . \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

بالاستعانة بالتكاملات التي تحتويها العلاقة (٢ - ١١) :

$$V = \int_V \mathrm{d}V = \int_0^R r^2 \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cdot \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{r^3}{3}\Big|_0^R \cdot (-\cos\vartheta)\Big|_0^{\pi/2} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi R^3}{3},$$

$$\int_V x\,\mathrm{d}V = \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \cdot \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = 0.$$

$$\int_V y\,\mathrm{d}V = \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \cdot \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = 0,$$

$$\int_V z\,\mathrm{d}V = \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{r^4}{4}\Big|_0^R \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos 2\vartheta\right)\Big|_0^{\pi/2} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi R^4}{4}$$

يتم تعيين إحداثيات مركز الثقل :

$$x_s = y_s = 0 \quad , \quad z_s = \frac{3R}{8}$$

مثال 18 :

لقد اقتطعت من نصف كرة كبيرة قطرها R نصف كرة صغيرة نصف قطرها r ،(شكل 2-3) .

المطلوب : ايجاد احداثيات مركز ثقل الجسم المتبقي بالنسبة لمجموعة إحداثيات ينطبق فيها المستوى yx على مستوي الدائرة الرئيسية المشتركة كما ويمر فيها المحور z من مركز نصف الكرة الكبيرة .

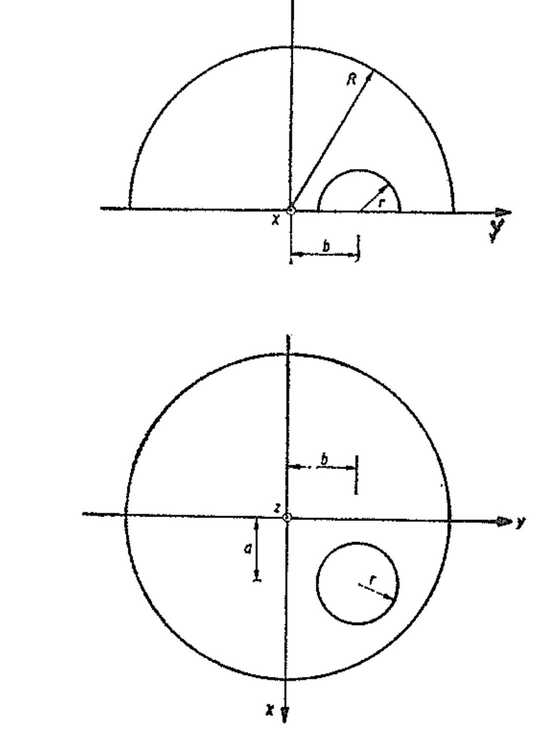
الحل :

الحجوم الجزئية ومراكز الثقل الجزئية :

$$V_1 = \frac{2R^3\pi}{3} \quad , \quad x_1 = 0 \quad , \quad y_1 = 0 \quad , \quad z_1 = \frac{3R}{8}$$

$$V_2 = -\frac{2r^3\pi}{3} \quad , \quad x_2 = a \quad , \quad y_2 = b \quad , \quad z_2 = \frac{3r}{8}$$

باستخدام العلاقة (2-12) يتم التوصل لاحداثيات مركز الثقل :



شكل 2-3

$$x_s = \frac{o - a \, \frac{2 r^3 \pi}{3}}{\frac{2\pi}{3} (R^3 - r^3)} = - \frac{a r^3}{(R^3 - r^3)}$$

$$y_s = \frac{o - b \, \frac{2 r^3 \pi}{3}}{\frac{2\pi}{3} (R^3 - r^3)} = - \frac{b r^3}{(R^3 - r^3)}$$

$$z_s = \frac{\frac{3\pi}{8} \, \frac{2 R^3 \pi}{3} - \frac{3 r}{8} \, \frac{2 r^3 \pi}{3}}{\frac{2\pi}{3} (R^3 - r^3)} = \frac{3}{8} \, \frac{(R^4 - r^4)}{(R^3 - r^3)}$$

مثال 19 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل جسم دوراني (Rotationskörper) (شكل 2.4) يشكل منحنيه الطولي (Meridiankurve)التابع $f(z)$.

الحـل :

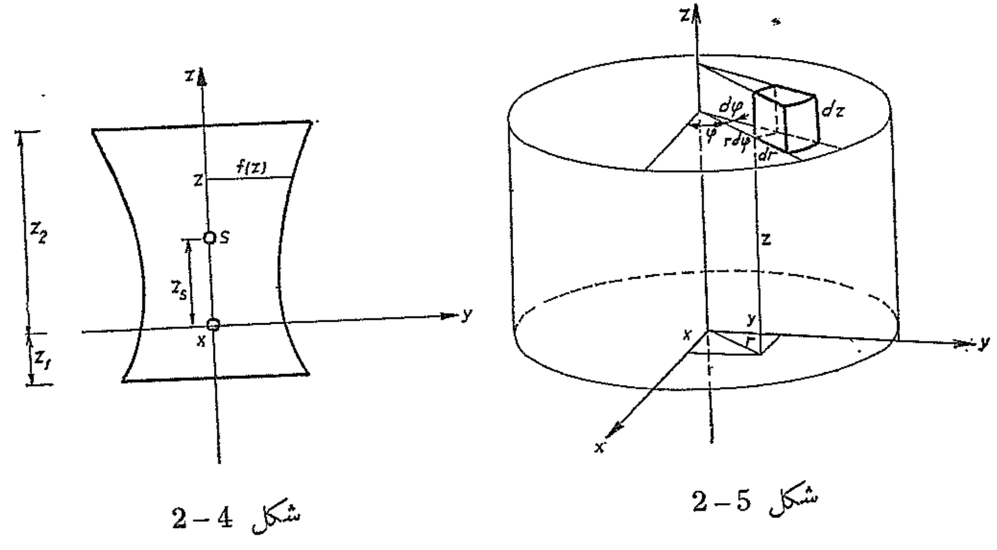
باستخدام إحداثيات اسطوانية (Zylinderkoordinaten) r, φ, z تتحقق فيها العلاقات التالية :

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad o \leqq r < \infty$$

$$y = r\sin\varphi \quad , \quad o \leqq \varphi < 2\pi$$

عندئذ تبلغ مساحة عنصر من السطح المغلف ، حسب الشكل (5-2) ، القيمة التالية :

$$dF = r\, d\varphi\, dz$$



شكل 4-2

شكل 5-2

كما يبلغ حجم عنصر حجمي القيمة التالية :

$$dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$$

بالاستعانة بالتكاملات الواردة في العلاقة (11-2) :

$$V = \int_V dV = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{f(z)} r\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(z)]^2 dz$$

$$\int_V x\, dV = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{f(z)} r^2\, dr \int_0^{2\pi} \cos\varphi \,.\, d\varphi = 0$$

$$\int_V y\,dV = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{f(z)} r^2\,dr \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,.\,d\varphi = 0$$

$$\int_V z\,dV = \int_{z_1}^{z_2} z\,dz \int_0^{f(z)} r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \int_{z_1}^{z_2} z\,[\,f(z)\,]^2\,dz$$

يتم تعيين إحداثيات مركز ثقل الجسم الدوراني :

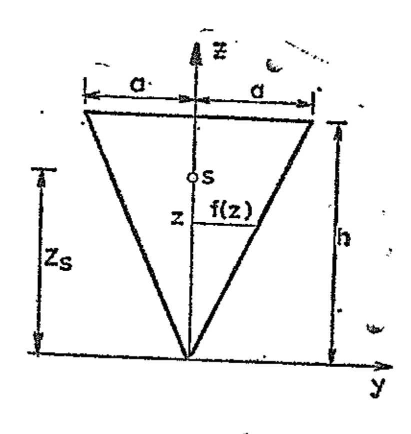
$$x_s = y_s = 0 \qquad , \qquad z_s = \frac{\int_{z_1}^{z_2} z\,[\,f(x)\,]^2\,dz}{\int_{z_1}^{z_2} [\,f(z)\,]^2\,dz}$$

إذا شكل الجسم الدوراني مخروطاً دائرياً مستقيمـاً ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته a (شـكل 2 – 6) ، عندئذ يتم بالاستعانة بمعادلة المنحني الطولي (هنا خط مستقيم) :

$$f(z) = \frac{a}{h}\,z$$

التوصل لاحداثيات مركز الثقل :

$$x_s = y_s = 0 \qquad , \qquad z_s = \frac{3\,h}{4}$$



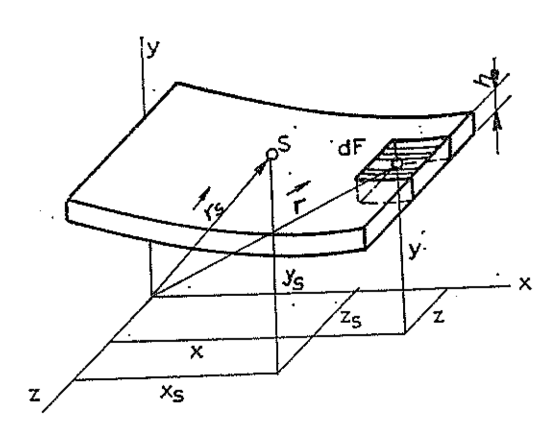
شكل 2-6

٢ ـ ٣ مركز ثقل جسم سطحي :

يقال عن الجسم أنه سطحي عندما يكون بعدين من أبعاده (الطول والعرض مثـــلا) أكبر بكثير من بعده الثالث (السماكة مثلا) . من الاجسام السطحية ماهو مستوي [كالصفيحة (البلاطة) والقرص (لوح) مثلا] ومنها ماهو منحني (كالقشرية) .

إن حجم العنصر الحجمي المدروس هو $dV = hdF$. يمكن للسماكه h أن تتغير بتغير إحداثي السطح الاوسط r (شكل 2-7) . بذلك تصبح علاقة إيجاد احداثيات مركز الثقل كما يلي:

$$r_s = \frac{\int_F h\,r\,dF}{\int_F h\,dF} \qquad (2\text{-}14)$$



شكل 2-7

أما مركز ثقل سطح (الذي يعتبر حالة خاصة) فيمكن حسابه كما يلي :
بالتمثيل الشعاعي :

$$r_s = \frac{\int_F r\,dF}{\int_F dF} \qquad (2\text{-}15)$$

وبالتمثيل الاحداثي :

$$x_s = \frac{\int_F x \, dF}{F} \quad , \quad y_s = \frac{\int_F y \, dF}{F} \quad , \quad z_s = \frac{\int_F z \, dF}{F} \qquad (2\text{-}16)$$

إذا وقع السطح في مستوي واحد ، على سبيل المثال المستوي المتشـكل من المحورين x و y (شكل 2-8) فان احداثيات مركز الثقل تحسب بواسطة العلاقات التالية :

$$x_s = \frac{\int_F x \, dF}{F} \quad و \quad y_s = \frac{\int_F y \, dF}{F} \qquad (2\text{-}17)$$

شكل 2-8

يمكن ايضاً تعيين مركز ثقل السطوح بطريقة تخطيطية وذلك كما يلي :

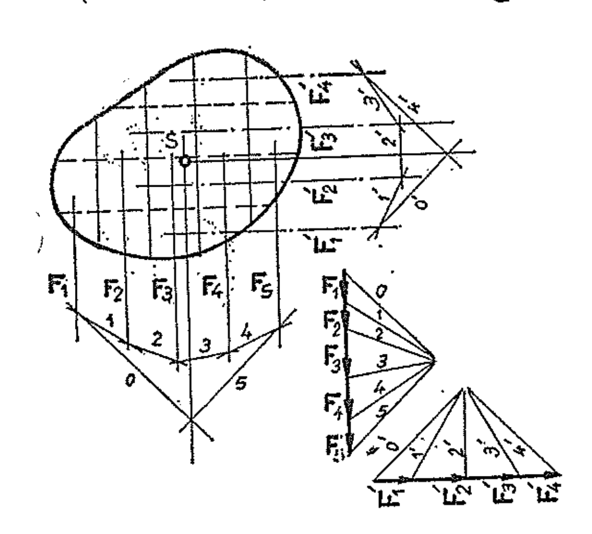
١ ـ يجزىء السطح المدروس بواسطة مستويات متوازية الى شرائح سطحية .

٢ ـ ترسم مساحة كل شريحة بعد تمثيلها بقوة حاملها يوازي مستوي القطـع ونقطة تطبيقها هي مركز ثقل الشريحة التابعة لها . بذلك يتم التوصل الى قوى متتالية وتقع على مستقيم واحد .

٣ ـ تختار نقطة ما وتعتبر قطباً لمجموعة القوى،وبعد ذلك ترسم الأشعة القطبية والأشعة الحبلية.

٤ ـ بالاستعانة بالمضلع الحبلي يتم تعيين محصلة مجموعة القوى ، حيث ان حامل هـــذه المحصلة

يمثل محلا هندسياً لمركز ثقل السطح ،أي ان حامل المحصلة هو خط مركزي(يمر من ثقل السطح). باجراء الطريقة المذكورة على اتجاهين (في اغلب الحالات اتجاهين متعامدين) يتم تعين مركز ثقل السطح الممثل بنقطة تقاطع حوامل المحصلتين (شكل 9 - 2) .



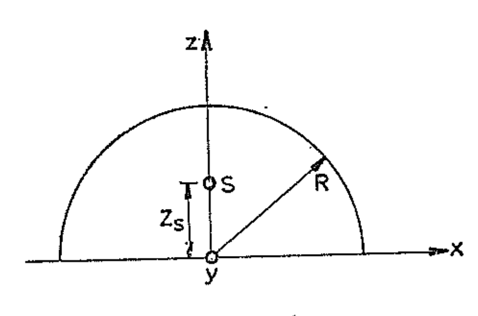
شكل 9−2

يسمى كل خط يمر من مركز ثقل الجسم خطاً مركزياً . تحدد نقطة تقاطع خطين مركزيين مركز الثقل . ان محاور التناظر لسطح ما ، هي دائماً محاور مركزية وذلك لان محصلة مجموعة قوى متناظرة تقع دائماً على محور تناظر المجموعة . بالاستفادة من هذه الخاصة يصبح من الممكن ، فوراً ودون اللجوء الى الحساب ، إيجاد مراكز ثقل السطوح التي لها محوري تناظر أو اكثر كما هو الحال في المربع والمستطيل والدائرة والمثلث متساوي الاضلاع والخ .

٢ ــ ٣ ــ ١ أمثلة :

مثال 20 :

المطلوب : حساب مركز ثقل نصف كرة (شكل 10−2) .



شكل 10−2

الحل :

باستخدام احداثيات كروية فان مساحة العنصر السطحي تبلغ :

$$dF = R^2 \sin \vartheta \, . \, d\vartheta \;\; q\varphi$$

بالاستعانة بالتكاملات الواردة في العلاقه (16 – 2) :

$$F = \int_F dF = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 (-\cos\vartheta) \Big|_0^{\pi/2} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R^2 ,$$

$$\int_F x \, dF = R^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi = 0 ,$$

$$\int_F y \, dF = R^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi = 0 ,$$

$$\int_F z \, dF = R^3 \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^3 (-\tfrac{1}{4} \cos 2\vartheta) \Big|_0^{\pi/2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi R^3$$

يتم تعين احداثيات مركز الثقل :

$$x_s = y_s = 0 \qquad , \qquad z_s = \frac{R}{2}$$

مثال 21 :

المطلوب : حساب مركز ثقل مستطيل (شكل 11 – 2)

الحل :

تبلغ مساحة العنصر السطحي القيمة التالية :

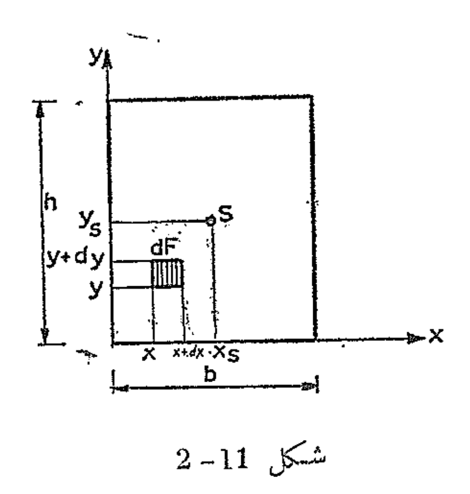
$$dF = dx \, dy$$

بالاستعانة بالتكاملات الموجودة في العلاقة (17 – 2) :

$$F = \int_F dF = \int_0^b dx \int_0^h dy = x \Big|_0^b \cdot y \Big|_0^h = b h ,$$

$$\int_F x \, dF = \int_0^b x \, dx \int_0^h dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^b \cdot y \Big|_0^h = \frac{b^2 h}{2} ,$$

$$\int_F y \, dF = \int_0^b dx \int_0^h y \, dy = x \Big|_0^b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^h = \frac{b h^2}{2}$$



شكل 11-2

يتم تعين إحداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{b}{2} \qquad , \qquad y_s = \frac{h}{2}$$

مثال 22 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل السطح المحصور بين المحور x وبين التابع f(x) (شكل 12-2) .

الحل :

بالاستعانة بالتكاملات الواردة فى العلاقة (17-2):

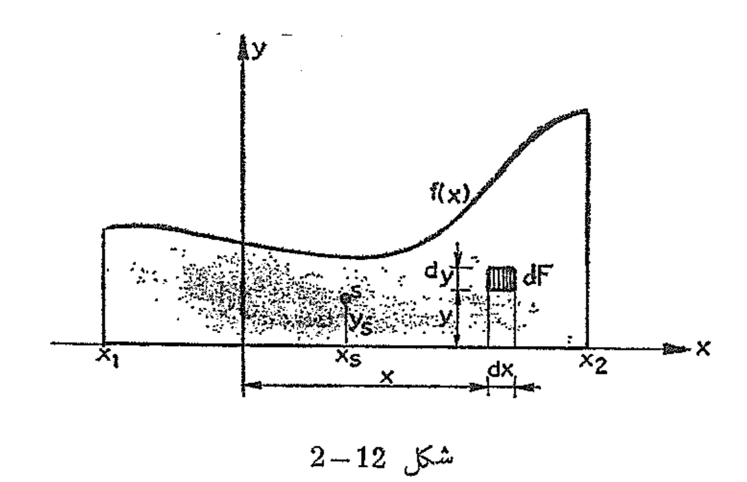
$$F = \int_F dF = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{f(x)} dy = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

$$\int_F x\, dF = \int_{x_1}^{x_2} x\, dx \int_0^{f(x)} dy = \int_{x_1}^{x_2} x\, f(x)\, dx$$

$$\int_F y\, dF = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{f(x)} y\, dy = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\, dx$$

يتم حساب احداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x\, f(x)\, dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx} \quad \text{و} \quad y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} [\, f(x)\,]^2\, dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx}$$



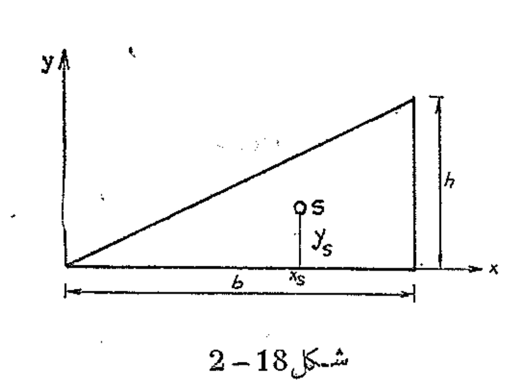
شكل 12–2

إذا شكل السطح المدروس مثلثاً قائم الزاوية ، قاعدته b وارتفاعه h (شكل 18–2) عندئذ يتم التوصل ، بالاستعانة بمعادلة المستقيم :

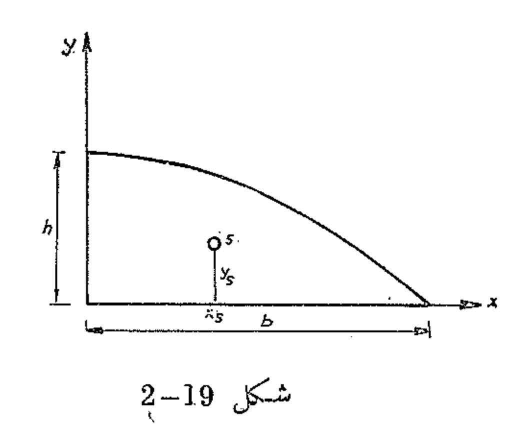
$$f(x) = \frac{h}{b}\, x$$

إلى إحداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{2b}{3} \quad \text{و} \quad y_s = \frac{h}{3}$$



شكل18 – 2



شكل 19– 2

أما إذا كان المنحني المدروس قطعاً مكافئاً (شكل 19 – 2) وكان تابعه هو :

$$f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$

وكانت مساحة القطع المكافىء هي :

$$F = \frac{2\,b\,h}{3}$$

فان إحداثيات مركز الثقل هي :

$$x_s = \frac{3\,b}{8} \qquad \text{و} \qquad y_s = \frac{2h}{3}$$

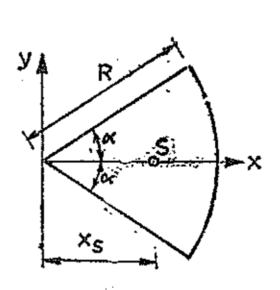
مثال 23 :

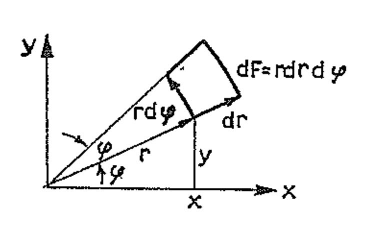
المطلوب : تعيين مركز ثقل قطعة دائرية (Kreisausschnitt) (شكل 20 – 2) .

الحل :

باستخدام الاحداثيات القطبية r, φ التى تتحقق فيها العلاقات التالية :

$$x = r\cos\varphi \qquad , \qquad y = r\sin\varphi$$





شكل 20 – 2

وبالاستعانة بالتكاملات الواردة في العلاقة (17 – 2) :

$$F = \int_F dF = \int_0^R r\,dr \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\varphi = R^2 \alpha ,$$

$$\int_F x\,dF = \int_0^R r^2\,dr \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\varphi \cdot d\varphi = \frac{r^3}{3}\Big|_0^R \cdot \sin\varphi \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{2R^3}{3} \sin\alpha ,$$

$$\int_F y\,dF = \int_0^R r^2\,dr \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin\varphi \cdot d\varphi = 0 .$$

يتم حساب احداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{2\,R\,\sin\,\alpha}{3\,\alpha} \qquad \text{و} \qquad y_s = 0$$

من أجل **سطح نصف دائري** ، أي من أجل $\alpha = \pi/2$ فان احداثيات مركز الثقل تبلغ :

$$x_s = \frac{4\,R}{3\,\pi} \qquad , \qquad y_s = 0$$

ومن أجل **سطح ربع دائري** ، أي من أجل $\alpha = \pi/4$ فان إحداثيات مركز الثقل تأخـذ القيم التالية :

$$x_s = \frac{4\,\sqrt{2}\,R}{3\,\pi} \qquad , \qquad y_s = 0$$

٢ ـ ٣ ـ ٢ العزم الستاتيكي للسطوح (أو ما يسمى بعزم الدرجة الاولى للسطوح)

يسمى التـكامل $\int_F x\,dF$ بالعزم الستاتيـكي للسطح F بالنسبه للمحـــور y ويعبر عنه بالرمز S_y. يحتوي هذا التـكامل على جداء ناتج عن ضرب مساحة العنصر السطحي dF ببعده العمودي عن المحور y . ويكتب هـكذا :

$$S_y = \int x\,dF \qquad (2\text{-}18)$$

يشير الحرف F تحت التـكامل إلى إمتداده على مساحة كامل المقطع العرضي .

بطريقة مشابهةيسمى التـكامل $\int_F y\,dF$ بالعزم الستاتيكي للسطح F بالنسبة للمحور x (أو حول المحور x) ويعبر عنه بالرمز التـالي :

$$S_x = \int_F y \, dF \qquad (2\text{-}19)$$

يشير الحرف S الى العزم الستاتيكي للسطح F أما الدليل فيشير الى المحـور الذي تنسب العزوم حوله . إذاً العزم الستاتيكي للسطح F بالنسبة لمحور ما يساوي تكامل الجداء الناتج عن ضرب مساحة العنصر السطحي dF ببعده العمودي عن ذلك المحور .

يمكن ، على العموم ، أن يكون العزم الستاتيـكي موجباً أو سالبـــاً أو أن تنعدم قيمته وتساوي صفراً .

إن واحدة العزم الستاتيكي للسطوح هي مكعب واحدة الطول المستعملة ، فمثلا لو إستعمل الـ cm كواحدة للطول لـكانت واحدة العزم الستاتيكي هي cm^3 وهكذا .

حسب العلاقة (2-17) يمكن للعزوم الستاتيكية أن تمثل بالشكل التالي :

$$S_x = y_s F \quad \text{و} \quad S_y = x_s F \qquad (2\text{-}20)$$

أي أن العزم الستاتيكي لسطح بالنسبة لمحور ما يساوي ، حسب هذه المعادلات ، الى الجـداء الناتج عن ضرب مساحة السطح بالبعد العمودي لمركز ثقل السطح المذكور عن ذلك المحور .

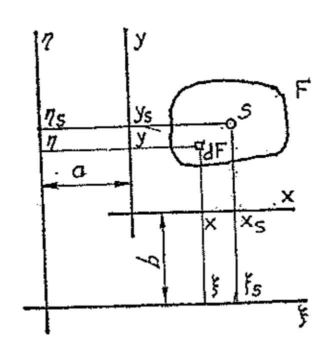
من المعادلات الاخيرة (2-20) ينتج ايضاً ان العزم الستاتيكي لسطح بالنسبة لمركز ثقـــله (وبالنسبة لأي محور مركزي) يساوي دائماً صفراً . وبالعكس إذا كان العـزم الستاتيكي لسطح بالنسبة لمحور ما مساويا للصفر فان ذلك المحور هـــو محور مركزي (محور يمر من مركز الثقل) .

لظهور البعد العمودي للعنصر السطحي عن المحاور الاحداثية في التـكاملات بشـــكل خطي لذا يطلق على العزم الستاتيكي أحيانا اسم عزم الدرجة الاولى للسطوح .

٢ ـ ٣ ـ ٣ تأثير جمل النسب على مركز الثقل :

سوف تتم في هذه الفقرة دراسة تأثير جمل النسب على مركز الثقل (شكل 2-21) .

يمكن ، حسب العلاقة (2-15) او العلاقة (2-17) كتابة ما يلي :



شكل 2-21

$$x_s = \frac{1}{F}\int_F x\,dF \quad , \quad y_s = \frac{1}{F}\int_F y\,dF$$

$$\xi_s = \frac{1}{F}\int_F \xi\,dF \quad , \quad \eta_s = \frac{1}{F}\int_F \eta\,dF$$

من الشكل (2-21) يمكن قراءة العلاقة التى تربط بين مجموعتي الاحداثيات (y,x) و $(\eta.\xi)$:

$$\xi = x + a$$

$$\eta = y + b$$

بتبديل هذه العلاقات في المعادلات الاخيرة ينتج :

$$\xi_s = \frac{1}{F}\int_F (x + a)\,dF = \frac{1}{F}\int_F x\,dF + \frac{1}{F}\int_F a\,dF = x_s + a$$

$$\eta_s = \frac{1}{F}\int_F (y + a)\,dF = \frac{1}{F}\int_F y\,dF + \frac{1}{F}\int_F b\,dF = y_s + b$$

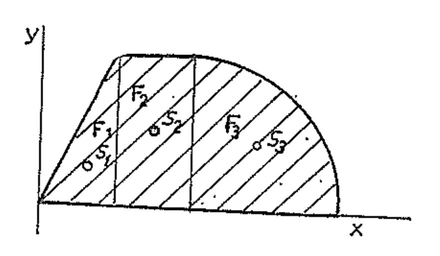
من هذه العلاقات يتم التوصل للنتيجة البديهية ألا وهي أن مركز الثقل له موضع ثابت ولا علاقة له بنقطة النسب . بتثبيت مبدأ مجموعة الاحداثيات في مركز ثقـل الجسم عنـد ذلك تنعدم التـكاملات التالية :

$$\int_L F\,r\,ds = 0 \quad , \quad \int_F t\,r\,dF = 0 \quad , \quad \int_V r\,dV = 0$$

والتي تمثل العزوم الستاتيكية للجسم . أما سبب إنعدامها فهو أن العزم الستاتيكي ينعدم بالنسبة لمركز الثقل وكذلك بالنسبة لأي محور مركزي .

٢ ـ ٣ ـ ٤ مركز ثقل سطح مركب يتألف من عدة سطوح بسيطة

إذا كان بالامكان تقسيم السطح الكلي الى عدة سطوح جزئية ذات مساحات ومراكز ثقـــل معلومة (أو مجدولة) (شكل 2-13) عندئـــذ يستطاع حساب مركز ثقل السطح الكلي بالاستعانة بمراكز ثقل السطوح الجزئية ومساحاتها .



شكل 2-13

التمثيل الشعاعي لعلاقة تعيين مركز الثقل :

$$r_s = \frac{r_1 F_1 + r_2 F_2 + r_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad (2\text{-}21)$$

التمثيل الاحداثي لعلاقة تعيين مركز الثقل :

$$x_s = \frac{x_{s1} F_1 + x_{s2} F_2 + x_{s3} F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{si} F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad (2-22)$$

$$y_s = \frac{y_{s1} F_1 + y_{s2} F_2 + y_{s3} F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{s\,i} F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

حيث أن x_s و y_s هي إحداثيات مركز ثقل السطح الكلي وأن (y_1, x_1) و (y_2, x_2) (y_i , x_i) هي احداثيات مراكز ثقل السطوح الجزئية . أما F_1 , F_2 , ... , F_i فهي مساحات السطوح الجزئية . يظهر العزم الستاتيكي للسطح F ، في صورة العلاقتين (22 - 2; كمجموع العزوم الستاتيكية للسطوح الجزئية .

قاعدة :

العزم الستاتيكي لسطح مركب ، يتألف من عدة سطوح جزئية بسيطة هندسياً ، بالنسبة لمحور ما يساوي مجموع العزوم الستاتيكية للسطوح الجزئية بالنسبة لذات المحور .

٢ ـ ٣ ـ ٥ مركز ثقل سطح يحتوي على ثقوب وفجوات

في كثير من الحالات يجد المهندس نفسه مطالب بتعيين مركز ثقل سطح يحتوي على عدة فجوات أو ثقوب . لتسهيل عملية ايجاد مركز الثقل يمكن اعتبارمساحة سطح الثقوبوالفجوات سالبة ، وبذلك ينتج :

$$x_s = \frac{\int_{F_0} x_0 \, dF - \int_{F_1} x_1 \, dF - \int_{F_2} x_2 \, dF - \cdots - \int_{F_i} x_i \, dF}{\int_{F_0} dF - \int_{F_1} dF - \int_{F_2} dF - \cdots - \int_{F_i} dF}$$

(2-23)

$$y_s = \frac{\int_{F_0} y_0 \, dF - \int_{F_1} y_1 \, dF - \int_{F_2} y_2 \, dF - \cdots - \int_{F_i} y_i \, dF}{\int_{F_0} dF - \int_{F_1} dF - \int_{F_2} dF - \cdots - \int_{F_i} dF}$$

في حالة كون مساحات ومراكز ثقل السطوح الجزئية (السطح الملىء والثقوب) معلومة عندئذ تصبح العلاقات السابقة كما يلي :

$$x_s = \frac{x_{s0}\ F_0 - x_{s1}\ F_1 - x_{s2}\ F_2 - \cdots - x_{si}\ F_i}{F_0 - F_1 - F_2 - \cdots - F_i} \qquad (2\text{-}24)$$

$$y_s = \frac{y_{so}\ F_0 - y_{s1}\ F_1 - y_{s2}\ F_2 - \cdots - y_{si}\ F_i}{F_0 - F_1 - F_2 - \cdots - F_i}$$

حيث أن F_0 هي مساحة السطح الملىء (بدون ثقوب) وأن (y_0 , x_0) هي إحداثيات مركز ثقل السطح المذكور . أما F_i فهي مساحة الثقب i و (y_i , x_i) هي إحداثيات مركز ثقل سطح الثقب المذكور .

لحساب العزم الستاتيكي لسطح يحتوي على ثقوب وفجوات والممثل في صورة كلا العلاقتين السابقتين تصلح القاعدة التالية :

إن العزم الستاتيكي لسطح يحتوي على عدة ثقوب وفجوات يساوي العزم الستاتيكي للسطح المليء (بدون ثقوب وفجوات) مطروحاً منه العزوم الستاتيكية للثقوب والفجوات (أما محور النسب فهو ذاته في كل العزوم الستاتيكية) .

يفضل أثناء حساب احداثيات مراكز ثقل السطوح المركبة أو السطوح ذات الثقوب والفجوات اتباع المخطط التالي :

ν	x_ν	y_ν	F_ν	$x_\nu F_\nu$	$y_\nu F_\nu$
الواحدة	m	m	m^2	m^3	m^3
1 2 ⋮ ν ⋮ n					
Σ					

$$x_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\ F_\nu}{F} = \cdots , \quad y_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu\ F_\nu}{F} \qquad (2\text{-}25)$$

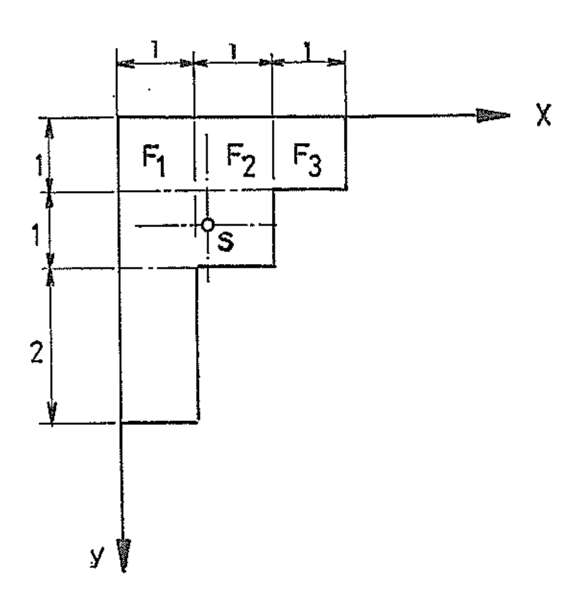
٢ ـ ٣ ـ ٦ أمثلة :

مثـال 24 :

المعطى : ابعاد المقطع العرضي الممثل في الشكل (2-14) .

المطلوب : حساب احداثيات مركز ثقل المقطع العرضي .

الحل :



(شكل 2-14)

١ ـ يختار موضع مناسب لمجموعة الاحداثيات x و y (على العموم يمكن تثبيتها في اي مكان، لكن الاختيار المناسب يوفر في اغلب الحالات كثيراً من الزمن والحسابات) . فمثلا هنا تختار القاعدتين الخارجيتين مكاناً لمجموعة الاحداثيات x و y .

٢ ـ يقسم السطح المركب الى عدة سطوح بسيطة تكون مساحاتها ومراكز ثقلها معلومـة او موجودة في جداول متداولة . فمثلا ليقسم المقطع العرضي المدروس الى مربـع ومستطيلين .

مساحات ومراكز ثقل السطوح الجزئية :

$F_1 = 1.1 = 1\ cm^2$, $x_1 = 2{,}5\ cm$, $y_1 = 0{,}5\ cm$

$$F_1 = 1.2 = 2\ cm^2 \quad , \quad x_1 = 1,5\ cm \quad , \quad y_1 = 1,0\ cm$$

$$F_3 = 1.4 = 4\ cm^2 \quad , \quad x_3 = 0,5\ cm \quad , \quad y_3 = 2,0\ cm$$

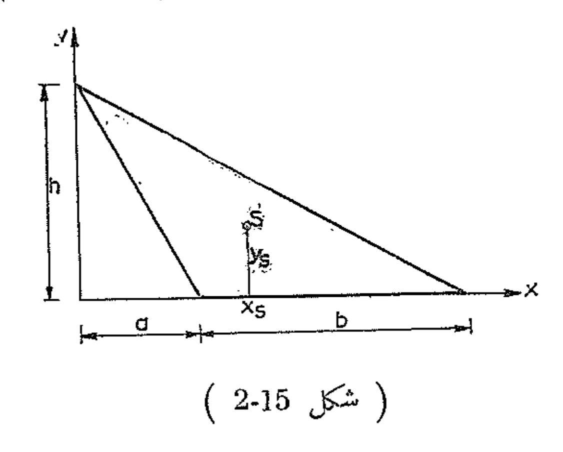
بتطبيق العلاقة (2-22) يتم حساب احداثيات مركز ثقل الجسم المركب :

$$x_s = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{2,5 . 1.0 + 1,5 . 2,0 + 0,5 . 4,0}{1,0 + 2,0 + 4,0} = \frac{7,5}{7,0}\ cm$$

$$y_s = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{0,5 \cdot 1,0 + 1,0 . 2,0 + 2,0 . 4,0}{1,0 + 2,0 + 4,0} = \frac{10,5}{7,0} = \frac{3}{2}\ cm$$

مثال 25 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل مثلث قاعدته b وارتفاعه h (شكل 2.15).



(شكل 2-15)

الحل :

يتم تعين مركز ثقل المثلث المعطى بالاستعانة بمراكز ثقل مثلثين قائمين :

$$F_1 = \frac{a\,h}{2} \quad , \quad x_1 = \frac{a}{3} \quad , \quad y_1 = \frac{h}{3}$$

$$F_2 = \frac{(b+a)\,h}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{b+a}{3} \quad , \quad y_3 = \frac{h}{3}$$

وبعد التبديل في العلاقة (2-22) ينتج :

$$x_s = \frac{\frac{hb^2}{6}\left(1 + 2\,\frac{a}{b}\right)}{\frac{bh}{3}} = \frac{b}{3}\left(1 + 2\,\frac{a}{b}\right)$$

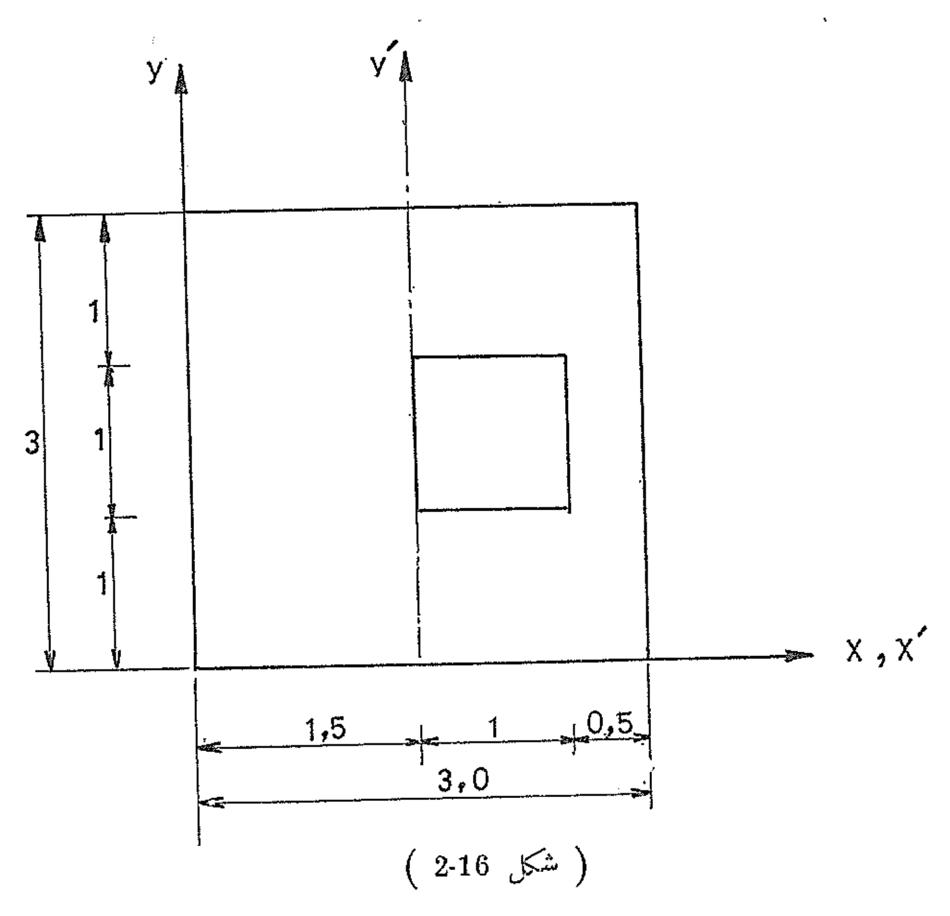
$$y_s = \frac{\frac{h^2 b}{6}}{\frac{b h}{2}} = \frac{h}{3}$$

كما هو معلوم فان مركز ثقل المثلث s يتحدد بنقطة تقاطع منصفات الاضلاع الثلاثة .

مثـال 26 :

المعطى : المقطع العرضي الممثل في الشكل (2-16) .

المطلوب : حساب احداثيات مركز ثقل المقطع العرضي .



(شكل 2-16)

الحل :

باعتبار ان المقطع العرضي F يتألف من سطح مليء مساحته F_0 مطروحاً منه سطح الثقب F_1 يمكن بسهولة حساب الاحداثيات المطلوبة .

باختيار مجموعة الاحداثيات (y , x) وبتطبيق العلاقة (2-24) ينتج :

$$x_s = \frac{x_0 F_0 - x_1 F_1}{F_0 - F_1} = \frac{1,5\ (3.0\ .\ 3,0) - 2,0\ (1,0\ .\ 1,0)}{3,0\ .\ 3,0 - 1,0\ .\ 1,0} = \frac{11,5}{8} = \frac{23}{16}\ \text{cm}$$

اما اذا اختيرت مجموعة الاحداثيات 'x و 'y عندئذ ينتج :

$$x'_s = \frac{x'_0 F_0 - x'_1 F'_1}{F_0 - F_1} = \frac{0\ .\ (3,0\ .\ 3,0) - 0,5\ (1,0\ .\ 1,0)}{3,0\ ,\ 3,0 - 1,0\ .\ 1,0} = -\frac{0,5}{8} = -\frac{1}{16}\ \text{cm}$$

بسبب تناظر المقطع العرضي بالنسبة لمحور يوازي كلا المحورين x , 'x ويمر من منتصف المقطع العرضي فلا حاجة لحساب y_s او y'_s وانما يمكن فوراً القول بأن :

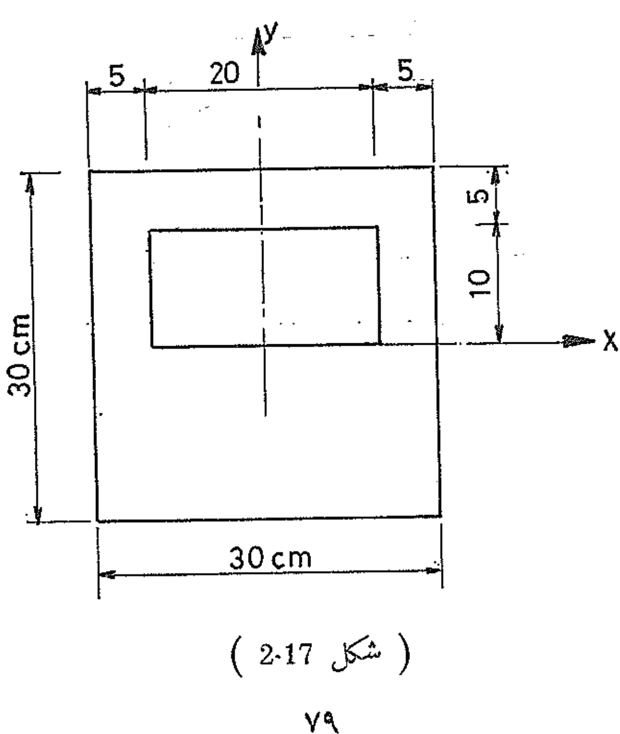
$$y_s = y'_s = 1,5\ \text{cm}$$

اي ان مركز الثقل يقع على محور التناظر .

مثـال 27 :

المعطى : المقطع العرضي الممثل في الشكل (2-17) .

المطلوب : حساب احداثيات مركز ثقل المقطع العرضي .



(شكل 2-17)

الحل :

بسبب تناظر المقطع العرضي بالنسبة للخط الاوسط الشاقولي ، فان مركز الثقل يقع عليـــه . لحساب الاحداثي المتبقي تختار مجموعة الاحداثيات $(\bar{y}, \bar{x})$ كما هو مبين في الشكل (2-17) .

بالاستعانة بمساحات ومراكز ثقل السطوح الجزئية :

$$F_0 = 30 . 30 = 900 \text{ cm}^2 \quad , \quad \bar{x}_0 = 0 \quad , \quad \bar{y}_0 = 0$$

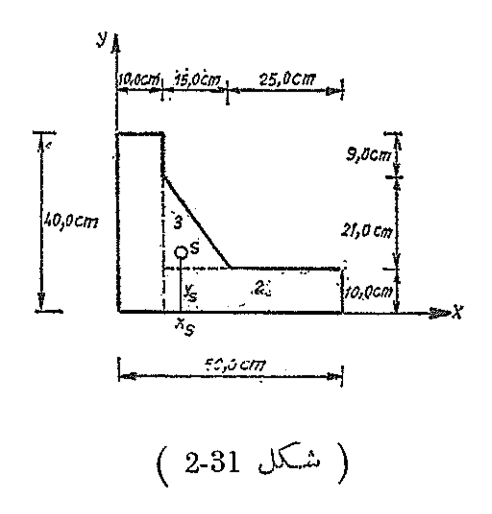
$$F_1 = 10 . 20 = 200 \text{ cm}^2 \quad , \quad \bar{x}_1 = 0 \quad , \quad \bar{y}_1 = 5 \text{ cm}$$

وبتطبيق العلاقة (2,24) ينتج :

$$\bar{y}_s = \frac{\bar{y}_0 \; F_0 - \bar{y}_1 \; F_1}{F_0 - F_1} = \frac{0.900 - 5.200}{900 - 200} = - \frac{1000}{700} = - \frac{10}{7} = - \; 1,43 \text{ cm}$$

مثـــال 28 :

المطلوب : حساب احداثيات مركز ثقل السطح الممثل في الشكل (2-31) .



(شكل 2-31)

الحـــل :

باستخدام المخطط الحسابي (2-25) تسهل العمليات الحسابية وبذلك ينتج :

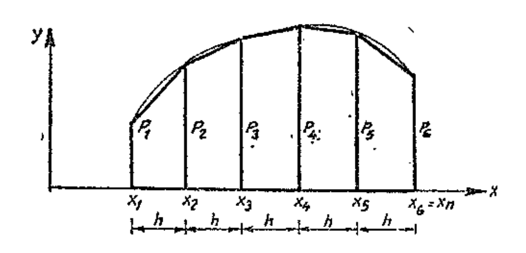
ν	x_ν	y_ν	F_ν	$x_\nu F_\nu$	$y_\nu F_\nu$
الواحدة	cm	cm	cm^2	cm^3	cm^3
1	5,0	20,0	400,0	2000,0	8000,0
2	30,0	5,0	400,0	12000,0	2000,0
3	15,0	17,0	157,5	2362,5	2677,5
Σ	0	0	957,5	16362,5	12677,5

$$x_s = \frac{16362,5}{957,5} = 17,09 \text{ cm}$$

$$y_s = \frac{12677,5}{956,5} = 13,24 \text{ cm}$$

اذا لم يكن بالامكان اعطاء المنحني المحدد لسطح مستوي بشكل تحليلي ، فبالامكان ايجاد مركز الثقل بالاستعانة بطريقة عددية (nummerisches Verfahren) .

سوف يتم الان اشتقاق هذه الطريقة بالاعتماد على سطح يتحدد بواسطة تراتيب الاطراف $p_o(x)$ بتقسيم السطح المدروس (شكل 2-25) الى $(n-1)$ شبه منحرف ، عرض كل منها هو h (لها نفس العرض) واضلاعها المتوازية هي $p_1, p_2, ---, p_n$.



(شكل 2.25)

لامكانية تركيب كل شبه منحرف من مثلثين فان الاحداثي x العائد لمركز ثقل شبه المنحرف ذو الاضلاع المتوازيه p_ν و $p_{\nu+1}$ هو :

$$\xi_{\nu+1} = x_\nu + \frac{h}{3}\frac{p_\nu + 2p_{\nu+1}}{p_\nu + p_{\nu+1}} = \frac{1}{3}\left[3x_\nu + (x_{\nu+1} - x_\nu)\frac{p_\nu + 2p_{\nu+1}}{p_\nu + p_{\nu+1}}\right]$$

بواسطة السطوح الجزئية :

$$F_\nu = \frac{h}{2}\left(p_{\nu-1} + p_\nu\right) \quad ; \quad \nu = 2, 3, \cdots, n$$

يتم ، حسب العلاقة (2-22) حساب الاحداثي x العائد لمركز ثقل السطح الكلي :

$$X_s = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} \xi_\nu F_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} F_\nu}$$

وبترتيب مناسب للحدود يمكن اعادة العلاقة السابقة للعلاقة التالية :

$$X_s = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu P_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} P_\nu} \qquad (2-26)$$

حيث أن

$$P_1 = \frac{h}{6}(2p_1 + p)$$

$$P_\nu = \frac{h}{6}(p_{\nu-1} + 4p_\nu + p_{\nu+1}) \quad ; \quad \nu = 2, 3, \cdots, n-1 \qquad (2\text{-}27)$$

$$P_n = \frac{h}{6}(p_{\nu-1} + 2p_n)$$

كلما كثر تقسيم السطح الكلي الى أشباه منحرفة ، أي كلما كانت h صغيرة ، كلما تم التوصل لنتائج ذات دقة كافية .

٢ ـ ٤ مركز ثقل جسم قضيبي الشكل

يقال عن جسم أنه قضيبي عندما تكون أبعاد مقطعة العرضي أصغر بكثير من طوله .

يمكن لمحور القضيب (الخط الواصل بين مراكز ثقل المقاطع العرضية) أن يكون خطاً مستقيماً أو ان يكون خطاً مضلعاً كما يمكن أن يكون خطا منحنياً (شكل 26 -2) .

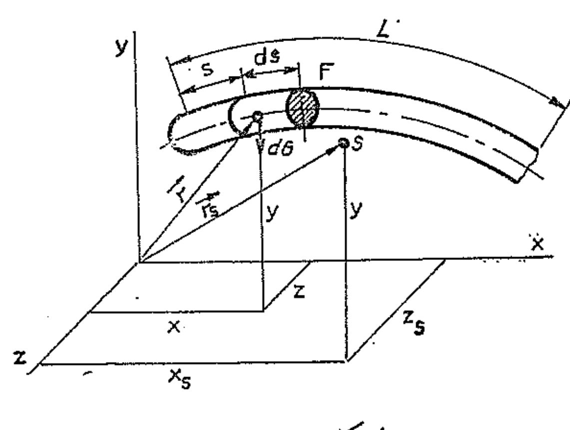
وزن الجسم :

$$G = \gamma V = \gamma F L$$

حيث ان F هي مساحة المقطع العرضي و L هو طول محور القضيب .

اذا اتخذ عنصر حجمي حجمه dV=Fds ووزنه dG=γFds اساساً للحساب عندئذ يتم الحصول من المعادلة (10 -2) ومن اجل جسم متجانس على العلاقات التالية :

$$x_s = \frac{\int_0^L F\,x\,ds}{\int_0^L F\,ds} \quad , \quad y_s = \frac{\int_0^L F\,y\,ds}{\int_0^L F\,ds} \quad , \quad z_s = \frac{\int_0^L F\,z\,ds}{\int_0^L F\,ds} \qquad (2\text{-}28)$$



شكل 26 -2

لو مثلت العلاقات السابقة بكتابة شعاعية :

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z \qquad (2\text{-}29)$$

$$\mathbf{r}_s = x_s\,\mathbf{i} + y_s\,\mathbf{j} + z_s\,\mathbf{k} = x_s\,\mathbf{e}_x + y_s\,\mathbf{e}_y + z_s\,\mathbf{e}_z$$

لأعطت العلاقة التالية :

$$r_s = \frac{\int_L F\, r\, ds}{\int_L F\, ds} \qquad (2\text{-}30)$$

في بعض الاحيان يلزم في الحسابات العمليـــة معرفـة مركز ثقل خط ، حيث F=const (يعتبر الخط حالة خاصة للجسم القضيبي) بذلك تصبح علاقات ايجـاد مركز الثقل بالتمثيـل الاحداثي كما يلي :

$$x_s = \frac{\int_L x\, dF}{L} \quad , \quad y_s = \frac{\int_L y\, dF}{L} \quad , \quad z_s = \frac{\int_L z\, dF}{L} \qquad (2\text{-}31)$$

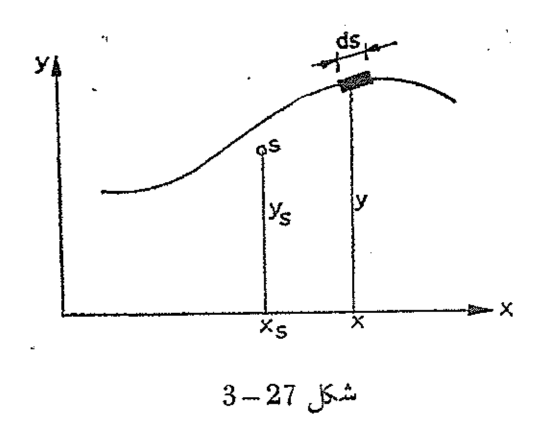
حيث ان $L = \int dL$ هو طول الخط .

اما علاقات ايجاد مركز الثقل بالتمثيل الشعاعي فتأخذ الشكل التالي :

$$r_s = \frac{\int_L r\, ds}{\int_L ds} \qquad (2\text{-}32)$$

بواسطة العلاقات (31 – 2) او (32 – 2) يصبح تعيين مركز ثقل خط فراغي ممكنا .
في حالة وقوع الخط في مستوي واحـد ، على سبيل المثـال المستوي المتشـكل عن المحورين x و y (شكل 27 – 2) عندئذ تصبح المعادلات (31 – 2) هكذا :

$$x_s = \frac{\int_L x\, ds}{L} \quad , \quad y_s = \frac{\int_L y\, ds}{L} \qquad (2\text{-}33)$$



شكل 27 – 3

٢ ـ ٤ ـ ١ أمثلة

مثـال 29 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل قطعة مستقيمة (شكل 28 – 2) .

الحل :

بعد ايجاد التكاملات الواردة فى المعادلة (31 – 2) :

$$L = \int_L ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha}$$

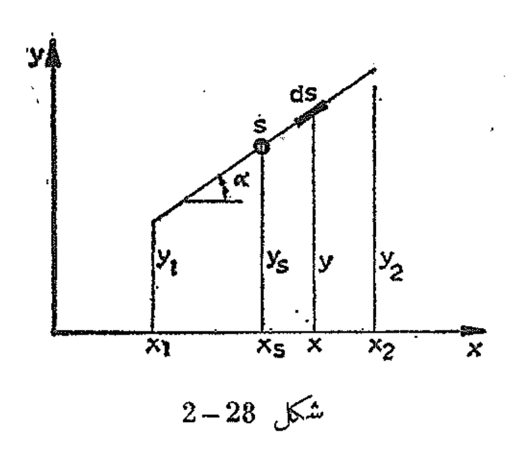
$$\int_L x\, ds = \int_{x_1}^{x_2} x \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2\cos\alpha} = \frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{2\cos\alpha}$$

$$\int_L y\, ds = \int_{y_1}^{y_2} y \frac{dy}{\sin\alpha} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2\sin\alpha} = \frac{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{2\sin\alpha}$$

يتم حساب احداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{x_2 + x_1}{2} \quad , \quad y_s = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

من هذه النتائج يتبين أن مركز ثقل القطعة المستقيمة يقع في منتصفها .



شكل 28 – 2

مثال 30 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل قوس دائري نصف قطره r وزاوية فتحية α 2 (شكل 29 – 2) .

الحل :

تختار احداثيات قطبية r و φ (شكل 29 – 2) .

العلاقات التي تربط بين الاحداثيات الديكارتية x و y والاحداثيات القطبية r و φ هي :

$$x = r \cos \varphi \quad . \quad y = r \sin \varphi \quad , \quad ds = r\, d\varphi$$

بالاستعانة بالتكاملات الواردة في العلاقة (33 – 2) بعد الحل :

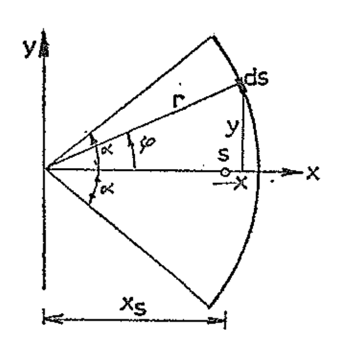
$$S = \int_L ds = r \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\varphi = 2\, r\, \alpha$$

$$\int_L x\, ds = r^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \varphi \, . \, d \;= r^2 \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = 2\, r^2 \sin \alpha$$

$$\int_L y\, ds = r^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \varphi \, . \, d\varphi = 0$$

يتم حساب احداثيات مركز الثقل

$$x_s = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad , \quad y_s = 0$$



شكل 29 – 2

٢ ـ ٤ ـ ٢ مركز ثقل خط مستوي مركب

اذا تألف الخط المستوي من n قوس جزئي Sν ، وكانت احداثيات مراكز ثقلها معلومة وهي :

$$x_\nu \; , \; y_\nu \; ; \; \nu = 1, 2, \cdots, n$$

عندئذ يستطاع ، حسب العلاقات (12 – 2) تعين مركز ثقل الخط المركب الكلي كما يلي :

$$x_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu L_\nu}{L} \quad , \quad y_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu L_\nu}{L} \qquad (2\text{-}34)$$

يفضل إجراء الحساب بالاستعانة بالمخطط التالي :

(2-35)

ν	x_ν	y_ν	L_ν	$x_\nu L_\nu$	$y_\nu L_\nu$
الواحدة	m	m	m	m^2	m^2
1 2 ⋮ ν ⋮ n					
Σ	•	•	L=..	---	---

$$x_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu L_\nu}{V} = \cdots \quad , \quad y_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu L_\nu}{V} = \cdots$$

مثال 31 :

يتألف خط مركب من مستقيم طوله a ومن نصف دائرة نصف قطرها r (شكل 30 – 2) .

ألمطلوب :تعين الطول a وذلك حتى يقع مركز ثقل المجموعـــة (الخط المركب) s على قطر نصف الدائرة .

الحل :

القيم الجزئيـة :

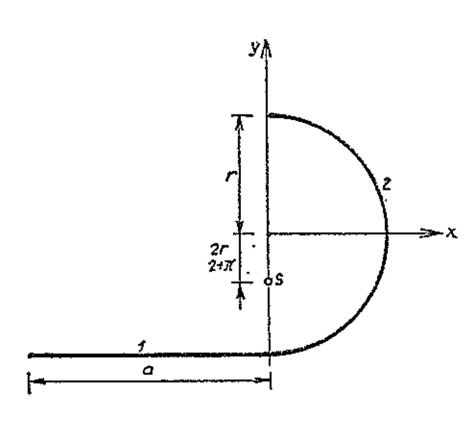
$$L_1 = a \quad و \quad x_1 = -\frac{a}{2} \quad و \quad y_1 = -r$$

$$L_2 = r\pi \quad و \quad x_1 = \frac{2r}{\pi} \quad و \quad y_2 = 0$$

احداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{-\frac{a}{2}a + \frac{2r}{\pi} r\pi}{a + r\pi} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - 4r^2}{a + r\pi}$$

$$y_s = \frac{-ra + 0}{a + r\pi} = -\frac{ra}{a + r\pi}$$



شكل 30 - 2

لوجوب انعدام x_s يتم التوصل للقيمة a المطلوبة :

$$a = 2r$$

ومن اجل هذه القيمة فان احداثي مركز الثقل يصبح :

$$y_s = -\frac{2r}{2+\pi}$$

الفصل الثالث

مجموعة القوى الفراغية

٣ ـ ١ مجموعة القوى الفراغية المركزية

يقال عن مجموعة القوى الفراغية أنها مركزية وذلك عندما تؤثر في نقطة واحدة أو عندماتتلاقى حواملها في نقطة واحدة .

٣ ـ ١ ـ ١ مركبات القوى (تحليل القوى مركباتها) :

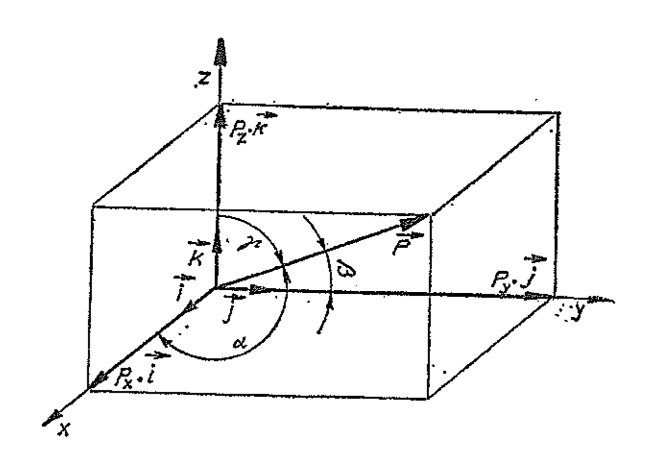
يمكن التعبير عن قوة ما ولتكن p ضمن مجموعةإحداثيات ديكارتية x , y , z بواسطة مركباتها وذلك بالشكل التالي :

$$\mathbf{P} = P_x\,\mathbf{i} + P_y\,\mathbf{j} + P_z\,\mathbf{k}$$

أو باختصار كما يلي :

$$\mathbf{P} = \{ P_x \;;\; P_y \;:\; P_z \}$$

حيث أن i , j , k هي الاشعة الواحدية (Einheitsvektoren) وان P_x , P_y , P_z هي مركبات الشعاع (المركبات السلمية للشعاع) P باتجاه الاحداثيات x , y , z .



شكل 3-1

حسب الشكل (3-1) تعني الزوايا أن :

(3-1) α هي الزاوية المحصورة بين $(\mathbf{P}, \mathbf{i})$ و β هي الزاوية المحصورة بين $(\mathbf{P}, \mathbf{j})$ و
γ هي الزاوية المحصورة بين $(\mathbf{P}, \mathbf{k})$.

كما أنها تحقق العلاقة التالية :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

وبذلك يتم التعبير عن مركبات القوة $\mathbf{P}$ كما يلي :

$$P_x = P \cos \alpha \quad , \quad P_y = P \cos \beta \quad , \quad P_z = P \cos \gamma \qquad (3\text{-}2)$$

حيث أن $P = |\mathbf{P}|$ هي القيمة المطلقة لشعاع القوة . بتعبير معاكس يمكن حساب القيمة المطلقة للقوة بالاعتماد على مركباتها :

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \qquad (3\text{-}3)$$

٣ ـ ١ ـ ٢ شروط التوازن

يمكن الاستعاضة عن مجموعة قوى تتألف من n قوة هي $\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_\nu, \cdots \mathbf{P}_n$ بقوة واحدة $\mathbf{R}$ تكافئها وتؤثر في نفس نقطة تطبيق مجموعة القوى وتسمى بمحصلة مجموعة القوى . تتكافىء المحصلة $\mathbf{R}$ مع مجموعة القوى عندماتتساوى مركبة المحصلة بالاتجاه x والتي سيرمز لها بالرمز R_x مع مجموع مركبات القوى $P_{x\nu}$ ، أي عندما تتحقق العلاقة الآتية :

$$R_x = \sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu} \qquad (3\text{-}4)$$

وكذلك عندما تتحقق العلاقات التالية :

$$R_y = \sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu} \quad , \quad R_z = \sum_{\nu=1}^{n} P_{z\nu} \qquad (3\text{-}4b)$$

التي تمثل شرط تساوي مركبات المحصلة بالاتجاهين z , y مع مجموع مركبات القوى $P_{y\nu}$ و $P_{z\nu}$ ، حسب المعادلة (3-3) فان القيمة المطلقة للمحصلة تبلغ :

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (3\text{-}5)$$

يتحدد مكان المحصلة في الفـــراغ ، حسب المعادلتـين (1-3) و (2-3) بواســـطة الزوايا α_R , β_R , γ_R وذلك من خلال العلاقات التالية :

$$\cos\alpha_R = \frac{R_x}{R} \quad , \quad \cos\beta_R = \frac{R_y}{R} \quad , \quad \cos\gamma_R = \frac{R_z}{R} \quad (3\text{-}6)$$

تسيطر على القوى P_i حالة التوازن عندما تكون محصلتها معدومة (تساوي الصفر) . بما أن الشعاع لا يساوي الصفر (لاينعدم) الا فقط عندما تنعدم مركباته ، لذلك فان **شروط توازن مجموعة قوى فراغية مركزية** هي التالية :

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu} = 0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu} = 0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} P_{z\nu} = 0 \quad (3\text{-}7)$$

٣ ـ ١ ـ ٣ السقالة الفراغية (Räumliches Bockgerüst) :

يشير الشكل (2-3) الى سقالة فراغية (سيبا) تتألف من ثلاثة قضبان لاتقـــع محاورها في مستو واحد . تستند القضبان 1 , 2 , 3 التي تبـــلغ أطوالها l_1 , l_2 , l_3 عند نقـاط نهاياتهـا السفلية :

$$I(x_1, y_1, z_1) \quad , \quad II(x_2, y_2, z_2) \quad , \quad III(x_3, y_3; z_2)$$

إستناداً مفصلياً لجميع الاتجاهات وتجتمع عند نقاط نهاياتها العلوية مع بعض في النقطة a (العقدة a) التي تمثل أيضا إتصالا مفصلياً لجميع الاتجاهات . تؤثر في النقطة a القوة المحملة (الحمولة) P ذات المركبات P_x , P_y , P_z . بسبب تأثير هذه القوة تتشكل في القضبان الثـــلاثة ، ردود أفعال داخلية (تسمى بقيم القطع) وتتألف في هذه الحالة من قوى طوليـــة (قوى محورية ، قوى ناظمية) فقط ولذلك يطلق عليهـــا اسم قوى القضبان ويرمز لها بالرموز S_1 , S_2 , S_3 (بسبب تمفصل كل من القضبان من كلا الطرفين ، لذلك لا يمكن أن تتشكل في القضبان إلا قوى قضبان ، أي قوى طولية فقط) .

بعد الافتراض ان قوى القضبان هي قوى شادة فان تطبيق شروط التوازن (7-3) على العقـدة a ، بعد اقتطاعها ، يعطي المعادلات الثلاثة التالية :

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu} = 0 \ : \ P_x + S_1 \cos\alpha_1 + S_2 \cos\alpha_2 + S_3 \cos\alpha_3 = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu} = 0 \ : \ P_y + S_1 \cos\beta_1 + S_2 \cos\beta_2 + S_3 \cos\beta_3 = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{z\nu} = 0 \ : \ P_z + S_1 \cos\gamma_1 + S_2 \cos\gamma_2 + S_3 \cos\gamma_3 = 0$$

حيث أن ، على سبيل المثال $S_1 \cos\alpha_1$ هي مركبة قوة القضيب S_1 باتجـــاه المحور x ، كما أن P_x , P_y , P_z هي مركبـــات الحمولة P باتجاه المحـاور x , y , z ، بشـكل عام يمكن لمركبات القوة P وكذلك حدود ـ cos أن تكون موجبـــة أو سالبة . بواسطة العلاقات التـالية :

$$\cos\alpha_\nu = \frac{x_\nu}{l_\nu} \quad , \quad \cos\beta_\nu = \frac{y_\nu}{l_\nu} \quad , \quad \cos\gamma_\nu = \frac{z_\nu}{l_\nu} \ (\nu \cdot 1,2,3)$$

تأخذ مجموعة المعادلات السـابقة ، التي تنتـج عنها الاشـارة الصحيحة لقوى القضبان ، الشكل التـالي :

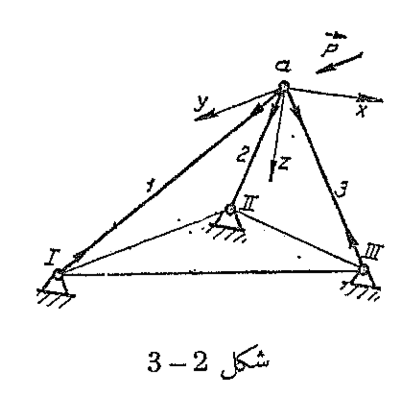
$$P_x + x_1 \frac{S_1}{l_1} + x_2 \frac{S_2}{l_2} + x_3 \frac{S_3}{l_3} = 0$$

$$P_y + y_1 \frac{S_1}{l_1} + y_3 \frac{S_2}{l_2} + y_3 \frac{S_3}{l_3} = 0 \qquad (3\text{-}8)$$

$$P_z + z_1 \frac{S_1}{l_1} + z_2 \frac{S_2}{l_2} + z_3 \frac{S_3}{l_3} = 0$$

٣ ـ ٢ مجموعة القوى الفراغيـة العامـة

يقال عن مجموعة القوى الفراغية انها عامة وذلك عندما لاتطبق (لاتؤثر) في نقطة واحدة كما لا تتلاقى حواملها في نقطة واحدة .



شكل 2 – 3

٣ ـ ٢ ـ ١ العزم

اذا كان

$$r = \{ r_x \ , \ r_y \ , \ r_z \}$$

هو شعاع المكان (Ortsvektor) لنقطة ما من شعاع القوة P (ولتكن هنا مثلا النقطة a) بالنسبة لمركز الاحداثيات 0 (شكل 3-3) بذلك فان :

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(r_y P_z - r_z P_y) + \mathbf{j}\,(r_z P_x - r_x P_z) + \mathbf{k}\,(r_x P_y - r_y P_x) \quad (3\text{-}9)$$

هو عزم القوة P بالنسبة للنقطة 0 . يتحدد اتجاه دوران شعاع العزم M وكذلك حامله ، من وجوب كون الشعاع M عمودي على الاشعة r و P . تشكل الاشعة r , P , M بهذا التسلسل فيما بينها جملة يمينية (Rechtssystem) . ان مركبات شعاع العزم على المحاور z , y , x هي :

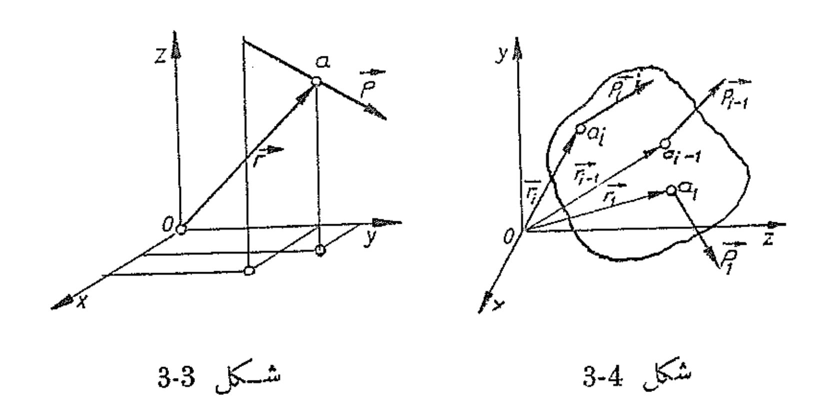
$$\begin{aligned} M_x &= r_y \ P_z - r_z \ P_y \\ M_y &= r_z \ P_x - r_x \ P_z \\ M_z &= r_x \ P_y - r_y \ P_x \end{aligned} \qquad (3\text{-}10)$$

وبالامكان ايضا كتابة شعاع العزم بالشكل التالي :

$$\mathbf{M} = M_x \ \mathbf{i} + M_y \ \mathbf{j} + M_z \ \mathbf{k}$$

٣ ـ ٢ ـ ٢ تركيب مجموعة قوى عامة

لتؤثر القوى $\mathbf{P}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ في النقطة a من الجسم الصلب (شكل 3-4) .



شـكل 3-3 شكل 3-4

ان لمجموعة القوى هذه قوة محصلة (resultierende kraft) تؤثر في مبدأ الاحداثيات هي :

$$\mathbf{R} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{P}_\nu$$

وعزم محصل (resultierende moment) هو

$$\mathbf{M}_R = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{P}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{M}_\nu$$

تكافئها (اذاً تكافىء مجموعة القوى الفراغية العامة المعطاة قوة محصل وعزم محصل) . بسبب كون

$$\mathbf{r}_\nu = \{ r_{x\nu} \ ; \ r_{y\nu} \ ; \ r_{z\nu} \} \quad ; \quad \mathbf{P}_\nu = \{ P_{x\nu} \ ; \ P_{y\nu} \ ; \ P_{z\nu} \}$$

فان مركبات القوة المحصلة والعزم المحصل تصبح كما يلي :

$$\mathbf{R} = \{ R_x \ ; \ R_y \ ; \ R_z \} \qquad , \qquad \mathbf{M} = \{ M_{Rx} \ ; \ M_{Ry} \ ; \ M_{Rz} \}$$

$$R_x = \sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu} \quad ; \quad M_{Ry} = \sum_{\nu=1}^{n} (r_{y\nu} P_{z\nu} - r_{z\nu} P_{y\nu}) \quad (3\text{-}11)$$

$$R_y = \sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu} \quad ; \quad M_{Ry} = \sum_{\nu=1}^{n} (r_{y\nu} P_{x\nu} - r_{x\nu} P_{z\nu})$$

$$R_z = \sum_{\nu=1}^{n} P_{z\nu} \quad ; \quad M_{Rz} = \sum_{\nu=1}^{n} (r_{x\nu} P_{y\nu} - r_{y\nu} P_{xy})$$

تصلح العلاقات (3-5) و (3-6) من اجل القيمة المطلقـة للقوة المحصلة واتجـاهها اما من اجل القيمة المطلقة للعزم المحصل واتجاهه فتصلح على غرارها العلاقات التالية :

$$M_R = |\mathbf{M}_R| = \sqrt{M_{Rx}^2 + M_{Ry}^2 + M_{Rz}^2}$$

$$\cos \alpha_{MR} = \frac{M_{Rx}}{M_R} \quad ; \quad \cos \beta_{MR} = \frac{M_{Rx}}{M_R} \quad , \quad \cos \gamma_{MR} = \frac{M_{Rz}}{M_R} \qquad (3\text{-}12)$$

مثـال 32 :

المعطى : مجموعة القوى :

$$\mathbf{P}_1 = \{3 ; 2 ; -1\} \text{kp} \quad ; \quad \mathbf{P}_2 = \{-1 ; 3 ; 0\} \text{kp} \quad ; \quad \mathbf{P}_3 = \{0 ; 1 ; 1\} \text{kp}$$

واشعة المـكان لنقاط تطبيقها على الجسم الصلب :

$$\mathbf{r}_1 = \{2 ; 1 ; 0\} \text{m} \quad ; \quad \mathbf{r}_2 = \{1 ; 0 ; 1\} \text{m} \quad ; \quad \mathbf{r}_3 = \{0 ; -2 ; 2\} \text{m}$$

المطلوب :

اعادة هذه القوى الى قوة محصلة وعزم محصل تكون اشعتها متوازية (شـكل 3-5) .

الحـــل :

القوة المحصلة (انظر العلاقات (3-11) و (3-5)) :

$$\mathbf{R} = \{3 + (-1) + 0 \; ; \; 2 + 3 + 1 \; ; \; (-1) + 0 + 1\} \text{kp} = \{2 ; 6 ; 0\} \text{kp}$$

$$\mathbf{R} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 0^2} \text{ kp} = 2\sqrt{10} \text{ kp}$$

العزم المحصل (انظر العلاقات (3-9) و (3-11) و (3-12)) :
بواسطة النتائج التالية :

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{P}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \{-1 \ ; \ 2 \ ; \ 1\} \text{ kpm}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_2 = \{-3 \ ; \ -1 \ : \ 3\} \text{ kpm}$$

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{P}_3 = \{-4 \ ; 0 \ ; 0\} \text{ kpm}$$

ينتج :

$$\mathbf{M}_R = \{-1-3-4 \ ; 2-1+0 \ : \ 1+3+0\} \text{ kpm} = \{-8 \ ; \ 1 \ ; \ 4\} \text{ kpm}$$

$$M_R = \sqrt{(-8)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{81} \text{ kpm} = 9 \text{ kpm}$$

حسب الشكل (3-5) فان مركبة العزم الموازي للقوة المحصلة **R** هي :

$$M''_R = M_R \cos \alpha$$

$$\mathbf{M}''_R = \frac{\mathbf{R}}{R} M_R \cos \alpha$$

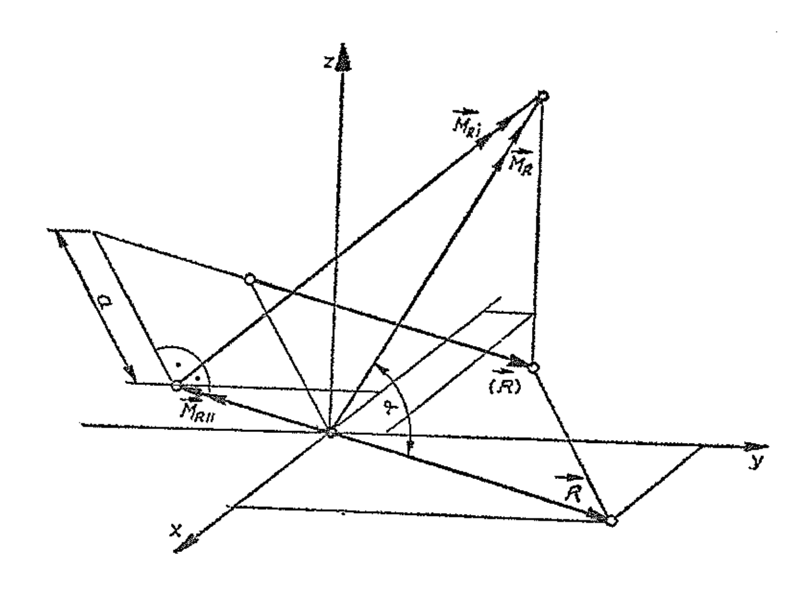
بالاستعانة بالعلاقة التالية :

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{M}_R}{M_R} \frac{\mathbf{R}}{R}$$

ينتج :

$$\mathbf{M}''_R = \mathbf{R} \frac{\mathbf{M}_R \mathbf{R}}{R^2} = \{2 ; 6 ; 0\} \text{ kp } \frac{(-8) . 2 + 1.6 + 4 0}{4 . 10} \frac{\text{kpm . kp}}{\text{kp}^2}$$

$$= \{-\frac{1}{2} ; -\frac{3}{2} ; 0\} \text{ kpm}$$



شكل 3-5

ان القيمة المطلقة لمركبة العزم M'_R العمودي على R ، حسب تعريف الجداء الشعاعي لشعاعين ، هي :

$$M'_R = M_R \frac{|R \times M_R|}{R\ M_R} = \frac{R \times M_R}{R}$$

يمكن التخيل ان هذا العزم تشكل نتيجة زلق القوة R بموازاة نفسها وعموديا على M_R' وبمسافة قدرها a ((R) في الشكل 3-5) .

$$a = \frac{|R \times M_R|}{R^2} = \frac{1}{4.10} \begin{Vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \end{Vmatrix} m = \frac{1}{40} |\{24; -8:50\}|\ m = 1,40m$$

بذلك تتم اعادة مجموعة القوى المعطاة الى قوة (R) والى عزم M_R'' اشعتها متوازية .

تسمى المجموعة (R) و M_R'' بلولب القوة (Kraftschraube) .

٣ ـ ٢ ـ ٣ شروط التوازن :

تسيطر على مجموعة القوى الفراغية العامة الممثلة في الشكل (3-4) حالة التوازن عندما تكون القوة المحصلة والعزم المحصل ، حسب العلاقة (3-11) ، مساوية للصفر .

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu}=0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} (r_{y\nu} P_{z\nu} - r_{x\nu} P_{y\nu}) = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu}=0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} (r_{x\nu} P_{x\nu} - r_{x\nu} P_{z\nu}) = 0 \qquad (3\text{-}13)$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{z\nu}=0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} (r_{x\nu} P_{y\nu} - r_{y\nu} P_{x\nu}) = 0$$

علم سكون الاجسام الجامدة

الفصل الأول

افكار عامة

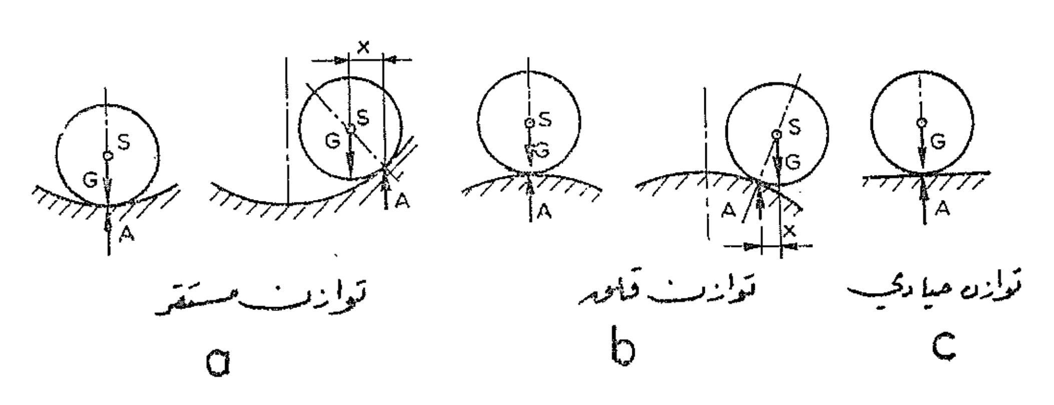
١ ـ ١ أنواع التوازن :

للتوازن ثلاثة أنواع : توازن مستقر ، توازن قلق وتوازن حيادي .

يقال عن وضع التوازن أنه مستقر عندما يتشكل بعد ازاحة الكرة عنه عزم إعادة : (شكل 1-1a)

$$M = G\,x$$

ويقال عن وضع التوازن أنه قلق عندما يتشكل بعد ازاحة الكرة عنه عزم ازاحه (شكل 1-1 b) . كما ويقال عن وضع التوازن أنه حيادي وذلك عندما لايتشكل بعد ازاحة الكرة عنه عزم اعادة ولا عزم ازاحة بحيث يكون كل وضع جديد هو وضع توازن وهو يمثل الحالة الحدية بين أوضاع التوازن (شكل 1-1 c) .

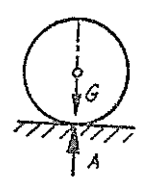


شكل 1-1

١ ـ ٢ أنواع المساند :

الاجسام في علم السكون على نوعين حرة او مقيدة . فالاجسام الحرة يمكنها أن تتحرك في كافة الاتجاهات دون ان يعيقها عائق بينما الاجسام المقيدة فهي لا تملك حرية الحركة الكاملة وانما يعيق حركتها في بعض الاتجاهات عوائق تستند عليها هذه الاجسام أو تتصل واياها (مساند) .

يبين الشكل (1.2) حالة استناد كرة على مستوي افقي ، هذا المستوى يمنع الكرة من اختراقه متحركة الى الاسفل .



شكل 2-1

فالكرة المستندة على المستوي الافقي تحدث نتيجة تأثير قوة الثقالة G (ثقلها) انضغاطات شاقولية على المستوي في نقطة اتصالها بهذا المستوي (نقطة الاستناد) عند ذلك يرد المستوي على الكرة بقوة $A_v = G$ تساويها وتعاكسها مباشرة (حيث تمثل A_v قوة المسند او مايسمى برد فعل المسند) .

مبدأ الفعل ورد الفعل :

عندما يؤثر جسم A على جسم آخر B بقوة P (قوة الفعل) يرد الجسم B على الجسم A بقوة $-P$ (قوة رد الفعل) تساويها وتعاكسها مباشرة .

المساند : هي جمع مسند وهو ما استند عليه الانشاء وعنده تؤثر مركبات ردود الافعال اللازمة لاحداث التوازن في الانشاء تحت تأثير ما عليه من حمولات ومؤثرات خارجية او داخلية . كما ان مواضع اتصال اي جزء من الانشاء عند اطرافه ببقية الانشاء يمكن ان تعتبر مسانداً لهذا الجزء عند دراسة ما يتولد فيه من قوى داخلية بوصفه جزءاً مستقلا بذاته . ومع ان المألوف هو ان نتصور مواضع محددة للمساند التي يستند عليها الانشاء ، الا ان بعض الانشاءات تستند

على مساحات معينة توزع عليها قوى ردود الفعل كما يحدث في الانشاءات التى تعوم (تطفو ، تسبح) في الماء او تغوص فيه ، وكذلك الانشاءات التي تطير في الجو ، وفي تلك الحالات تنشأ قوى رد فعل من ضغط المياه او ضغط الهواء على التوالي . فاذا تساوت هذه القوى او القوى المؤثرة على الانشاء حدث التوازن الذي يبدو في صورة سكون او انطلاق بسرعة ثابتة . اما اذا اختلفت القوى المؤثرة عن رد الفعل حدثت الحركة المتغيرة السرعة زيادة او نقصاناً . وعلى كل حال ، فان المعنى المفهوم لكلمة المساند كمواضع محددة للاستناد هو الذي يعنينا في الوقت الحالي . ويمكن ان يحدد الغرض من اي مسند بأنه منع الحركة كلياً او جزئياً عند نقطة الاستناد (ويؤدي ذلك لنقل الحمولات من المنشأ الى المساند وبعدها الى الارض او المكان الاخير الذي يجب ان تنقل اليه تلك الحمولات) . والحركة في ذاتها يمكن أن تقسم الى حركة انتقالية (Translation) وحركه دورانية (Rotation) ومن مجموعها تنشأ الحركة . ويحدد نوع المسند طريقة تثبيت المنشأ . وتتوقف بالتالي مركبات ردود الفعل اللازمة على نوع المسند او طريقة التثبيت هذه . عندما يعيق عائق حركة جسم باتجاه ما يعني ان العائق يؤثر على الجسم بقوة رد فعل باتجاه يعاكس الحركة . وعندما يعيق العائق دوران جسم يعني ان العائق يؤثر على الجسم بعزم رد فعل باتجاه يعاكس الدوران . ويمكن ان نتصور ما يلي :

١ ـ ان منع الحركة الانتقالية باتجاه ما يتطلب قوة في هذا الاتجاه كرد فعل عند المسند . وتبعاً لهذا فان السماح بالحركة الانتقالية في اتجاه معين يستلزم ان تكون مركبة رد فعل في هذا الاتجاه تساوي صفراً .

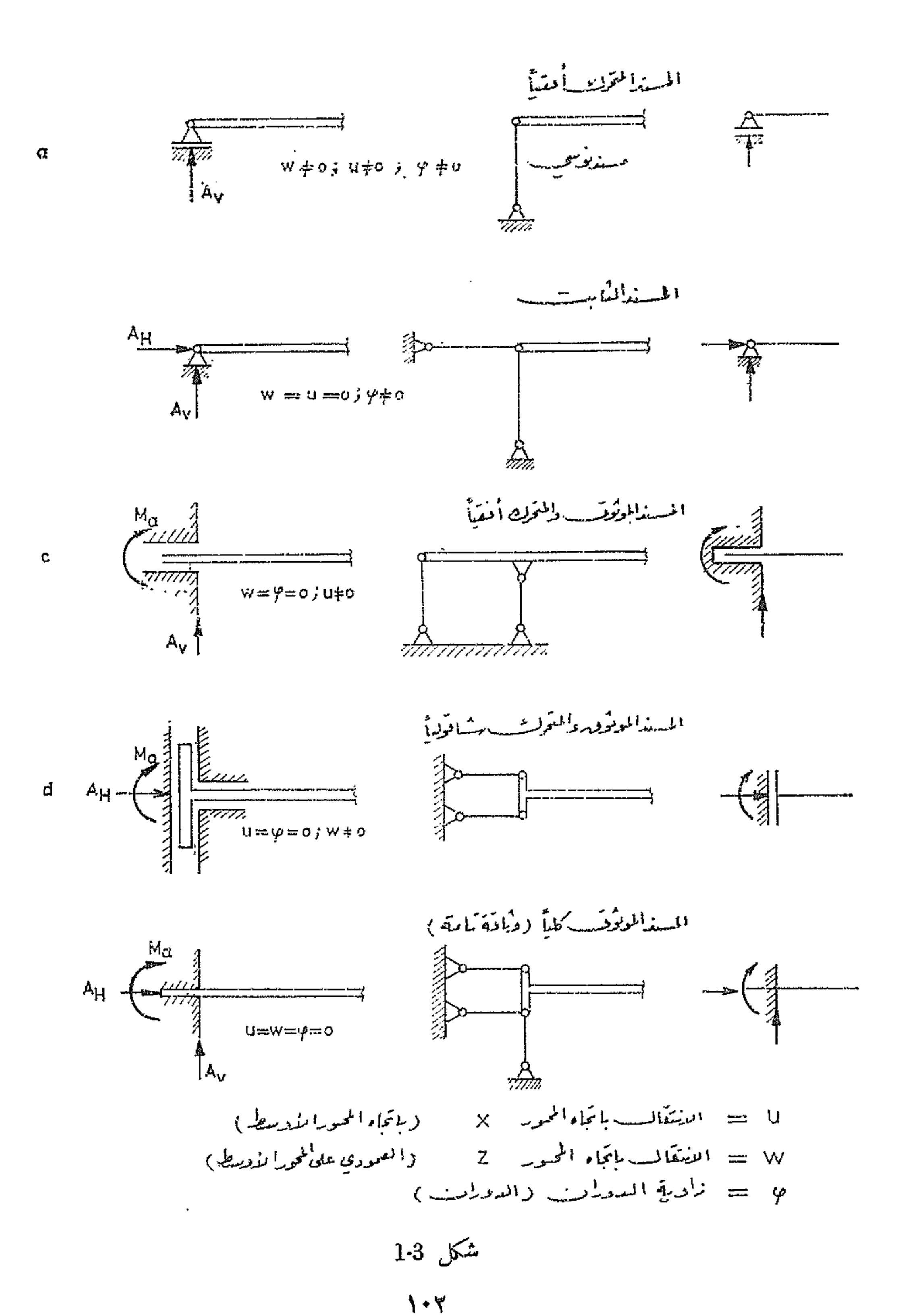
٢ ـ ان منع الحركة الانتقالية كلياً يستلزم وجود مركبتين لرد الفعل عند نقطة الاستناد .

٣ ـ ان منع الحركة الدورانية عند اي مسند يستلزم وجود عزم (عزم ازدواج) يؤثر على الانشاء عند نقطة الاستناد وبالتالي فان السماح بدوران الانشاء حول نقطة الاستناد لايتم الا اذا انعدم هذا العزم بحيث تكون قوة رد الفعل مارة بنقطة الاستناد ذاتها .

يسمى عزم الازدواج الذى يتولد عند نقطة الاستناد احياناً عزم الوثاقة (او عزم التثبيت) . وتنقسم المساند عادة الى الانواع الاساسية التالية :

١ ـ المسند المفصلي المتحرك (وهو مسند وحيد القيمة) :

يسمح هذا المسند بالدوران كما يسمح بالحركة باتجاه ما (نقطة الاستناد لها امكانية الدوران وامكانية الحركة باتجاه ما) . وعلى ذلك فان رد الفعل فيه يتكون من مركبة واحدة ناظمية



رمز المسند
إستناد بواسطة قضبان
إستناد بواسطة مساند
a
المسند المتحرك أفقياً
$w \neq 0 ;\ u \neq 0 ;\ \varphi \neq 0$
A_V
المسند الثابت
A_H
A_V
$w = u = 0 ;\ \varphi \neq 0$
c
المسند الموثوق والمتحرك أفقياً
M_a
$w = \varphi = 0 ;\ u \neq 0$
A_V
d
المسند الموثوق والمتحرك شاقولياً
M_a
A_H
$u = \varphi = 0 ;\ w \neq 0$
المسند الموثوق كلياً (وثاقة تامة)
M_a
A_H
$u = w = \varphi = 0$
A_V
u = الانتقال باتجاه المحور X (باتجاه المحور المتوسط)
w = الانتقال باتجاه المحور Z (العمودي على المحور المتوسط)
φ = زاوية الدوران (الدوران)

شكل 1-3

على الاتجاه المسموح فيه بالحركة الانتقالية . ويرمز لهذا النوع من المساند بالرمز المعطى في الشكل (1-3 a) . ومن الواضح ان هذا المسند المتحرك عبارة عن مسند مفصلي ثابت يتحرك على اسطوانات معينة تسمح له بالانتقال .

٢ ـ المسند النومي (وهو مسند وحيد القيمة) :

وهذا المسند موضح في الشكل (1-3a) ويتصل فيه الانشاء عند نقطة الاستناد اتصالا مفصلياً بجسم مستقيم يستند مفصلياً عند طرفه الآخر على شيء ثابت وهذا النوع من المساند يسمح بالدوران عند نقطة اتصاله بالانشاء كما يسمح بالحركة باتجاه ناظمي (عمودي) على الخط الواصل بين المفصلين وهو لهذا يعتبر نوعاً ثانياً من انواع المساند المتحركة ، وهو اكثر شيوعاً في الانشاءات البيتونية المسلحة لسهولة عمله وقلة تكاليفه بالنسبه للمسند المفصلي المتحرك الممثل في الشكل (1-3a) الذي يستعمل في الانشاءات المعدنية الكبيرة نسبياً .

٣ ـ مسند مفصلي ثابت (وهو مسند ثنائي القيمة) :

وهذا النوع من المساند يسمح بالدوران فقط ولكنه لا يسمح بالحركة الانتقالية في اي اتجاه (نقطة الاستناد لها فقط امكانية الدوران) . ولذا فان رد الفعل عنده يتكون من مركبتين للقوى وهما : قوة افقية A_H وقوة شاقولية A_V والرمزان الدالان على هذا النوع من المساند موضحان في الشكل (1-3b) . هذا المسند اقل تعقيداً وأقل في النفقات من المسند المتحرك كما انه أسهل المساند عملا .

في بعض الاحيان تسمى كل من المساند المفصلية الثابتة والمتحركة بالمساند البسيطة وقد يكون ذلك لانعدام عزوم الوثاقة (عزوم التثبيت) في ردود الفعل عندها .

٤ ـ المسند الموثوق :

آ ـ المسند الموثوق كلياً (المسند تام التثبيت) (وهو مسند ثلاثي القيمة) :

هو المسند الذي لا تسمح عنده بالحركة،سواءأ كانت انتقالا او دوراناً(نقطةالاستناد او ما تسمى بنقطة الوثاقة ليس لها امكانية الحركة مطلقاً) . فاذا رمزنا لمركبات الحركة الانتقالية في الاتجاهين الافقي والشاقولي على التوالي بالرمزين u , w والمقدار الدوران بالزاوية φ فان :

$$u = w = \varphi = 0$$

ونتيجة لذلك فانه يلزم ان يكون لرد الفعل عند هذا المسند ثلاث مركبات بصفة عامة وهي قوة افقية A_H وقوة شاقولية A_V وعزم وثاقة M_a . ومن الممكن ان تصبح احدى هذه

المركبات مساوية للصفر نتيجة لحمولات معينة كأن تكون الحمولات الخارجية مثلا شاقولية وانذاك فان A_H تنعدم . والرمز المستعمل عادة للـــدلالة على هذا المسند الموثوق كلياً موضـــح في الشكل (1-3 e) .

ب ـ المسند الموثوق والمتحرك شاقولياً (وهو مسند ثنائي القيمة) :

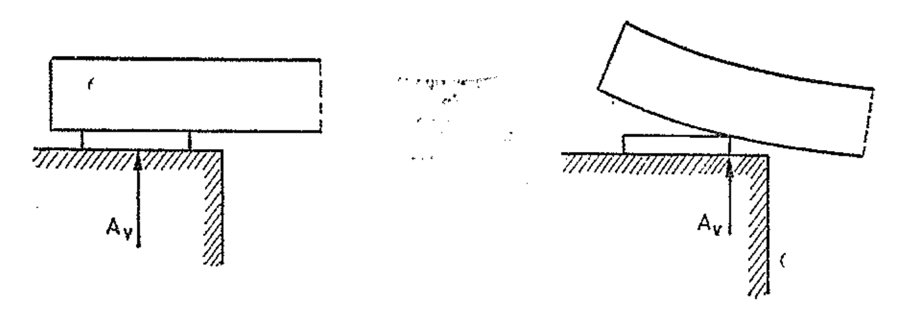
هذا المسند لا يسمح بالدوران ولا بالحركة الانتقالية الافقية لكنه يسمح بالحركـــة الانتقالية الشاقولية (نقطة الاستناد ليس لها الا امـكانية الحركة الانتقالية الشاقولية) . وعلى ذلك فان رد الفعل فيه يتكون من قوة افقية وعزم وثاقة ولهذا يعتبر مسنداً ثنائي القيمة . والرمز المستعمل عادة للدلالة على هذا المسند موضح في الشكل (1-3 d) .

ج ـ المسند الموثوق والمتحرك افقياً : (وهو مسند ثنائي القيمة) :

هذا المسند لا يسمح بالدوران ولا بالحركة الانتقالية الشاقولية لكنه يسمح بالحركة الانتقـالية الافقية (نقطة الاستناد ليس لها الا امكانية الحركة الانتقاليـــة الافقية) . وعلى ذلك فان رد الفعل فيه يتكون من قوة شاقولية وعزم وثاقة ولهذا يعتبر مسنداً ثنائي القيمة . والرمز الدال على هذا المسند موضح في الشكل (1-3 c) .

في حالة الحمولات الخفيفة ، كما في جيزان السقوف العادية ، توضع عادة نهايات الجائز (الحامل) بشكل بساطة على القاعدة التي قد تكون جداراً (بالطبع بعد تقوية الجدار او بعد وضع صفيحة للقاعدة) دون بناء جسم استناد خاص تحتها . هذا النوع من الاستناد كما في الشكل (1-4) هو ابسط انواع الاستناد ولا يستعمل في الانشاءات ذات الحمولات الكـــبيرة ، حيث يلزم هناك اللجوء الى استخدام احد اشكال الاستناد المشار اليها في الحالات السابقة .

في الحالة البسيطة للاستناد (الاستناد المباشر) ، اذا استند الجائز بشكل نظامي فان رد فعـــل المسند يمر من منتصف صفيحة الاستناد ولكن تحت تأثير التحميل فان الجائز يتغير وعندهـا لا يستند الجائز الا على طرف الصفيحة وبذلك ينتقل رد الفعل الى ذلك الطرف.ينجم عما ذكر



شكل 1-4

لهذا المسند البدائي المحذورين التاليين :

١ ـ ان موقع رد الفعل وطول الجائز الفعال ليسا ثابتين ويتغيران بعد التحميل .

٢ ـ يتعرض المسند الى اجهاد موضعي كبير .

١ ـ ٣ أنواع الانشاءات :

١ ـ ٣ ـ ١ تنقسم الانشاءات تبعاً للفرضيات الحسابية الى الانواع الاساسية الثلاثة التالية :

١ ـ **الانشاءات الخطية** (الاجسام الحاملة الخطية) .

٢ ـ **الانشاءات السطحية** (الاجسام الحاملة السطحية) .

٣ ـ **الانشاءات الكتلية** (الاجسام الحاملة الكتلية) .

α ـ الانشاءات الخطية :

هذا النوع من الانشاءات تكون فيه أبعاد المقطع العرضي اصغر بكثير من الطول او بكلام أخر الانشاءات التي يكون فيها احد الابعاد (هنا الطول) اكبر بكثير من البعدين الاخرين (هنا العرض والارتفاع) وهي ما تولد عن حركة سطح معين عمودياً على خط معلوم بحيث يمر الخط دائما من مركز ثقل هذه المساحة ويمثل هذا الخط محور الانشاء (المحور الاوسط للانشاء) . قد يكون المحور الاوسط خطاً مستقيماً او خطاً منحنياً او مركباً من خطوط مستقيمه وخطوط منحنية ، كما ان السطح الممثل للمقطع العرضي قد يظل ثابتاً وقد يتغير على طول المحور . في الحالة الاولى يكون الانشاء ذا مقطع عرضي ثابت وفي الحالة الثانية يكون ذا مقطع عرضي متغير . في جميع حالات الانشاءات الخطية هذه يمكن تمثيل الانشاء بالخط الدال على المحور دون اعتبار لشكل مقطعه العرضي .

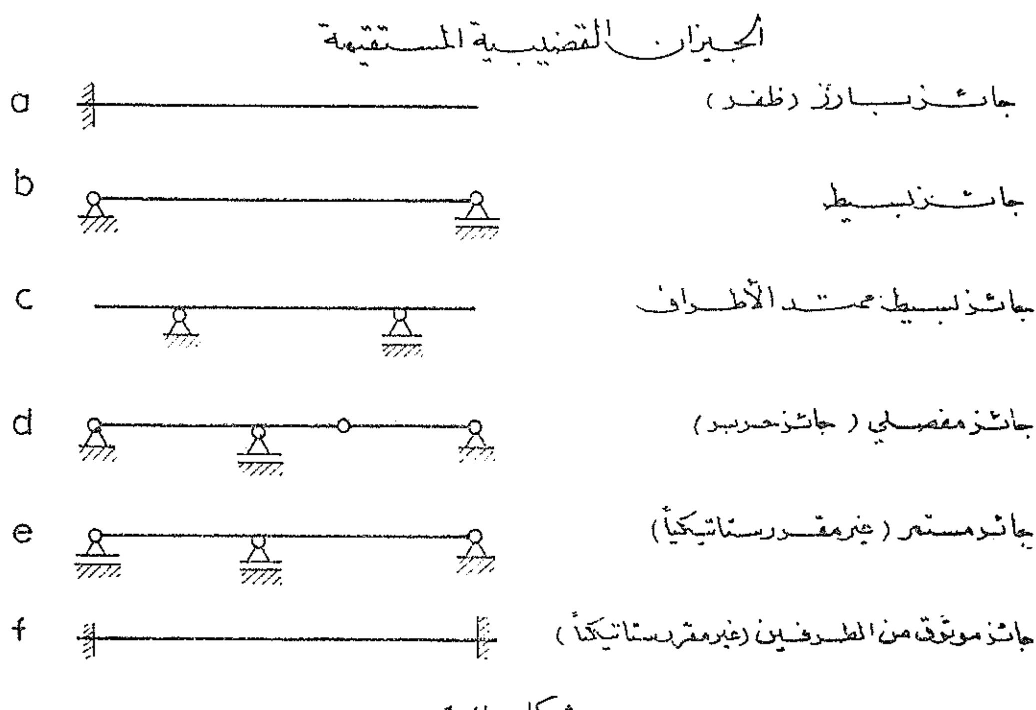
α ـ ١ تقسيم الانشاءات الخطية بالنسبة لشكل المحور :

تنقسم الانشاءات الخطية بالنسبة لشكل المحور الى الانواع الرئيسية التالية :

١ ـ **الجيزان القضيبية المستقيمة** (الجمل الحاملة القضيبيه المستقيمة ، الحوامل القضيبية المستقيمة) : وهي التي يكون محورها خطا مستقيماً (شكل 1-4b) .

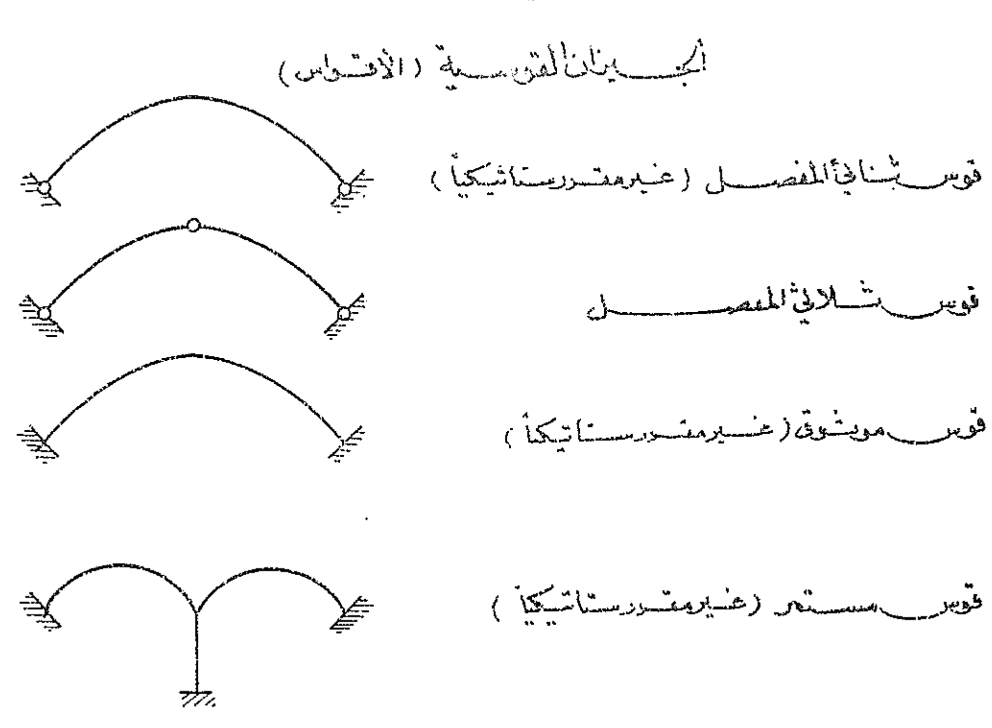
٢ ـ **الجيزان القوسية** (الجمل الحاملة القوسية ، الاقواس) :

وهي التي يكون فيها المحور خطاً منحنياً ويشترط الا يسمح في مساندها بالحركة الانتقالية



شكل 1-4b

وذلك بأن تكون مساندها من النـــوع التام التثبيت (الموثوق) او النوع المفصلي الثابت (شكل 1-5) فاذا كانت احدى المساند من النوع البسيط المتحرك اصبح الانشاء نوعاً خاصا من انواع الجيزان القضيبية ذات المحور المنحني ولكنه لا يكون قوساً .

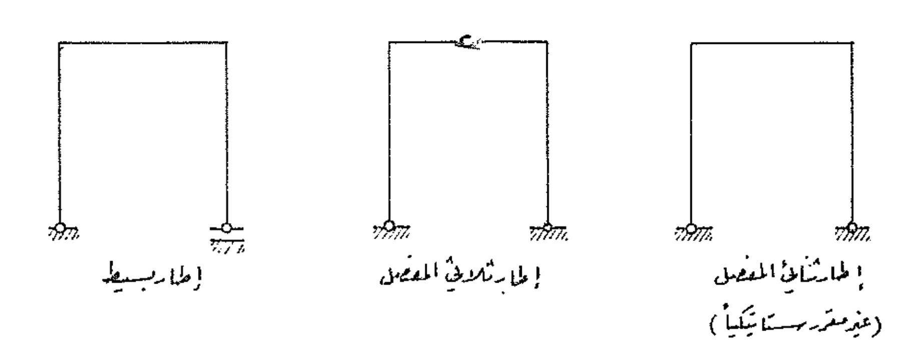


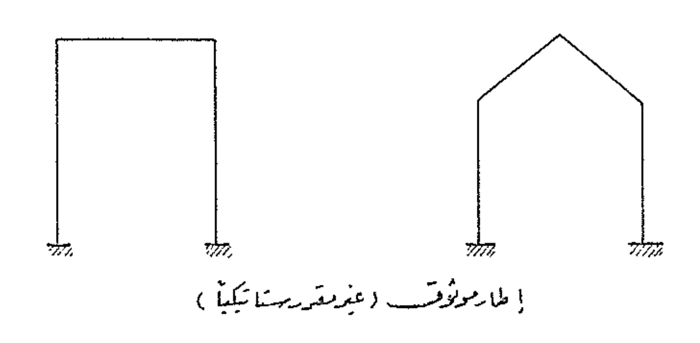
شكل 1-5

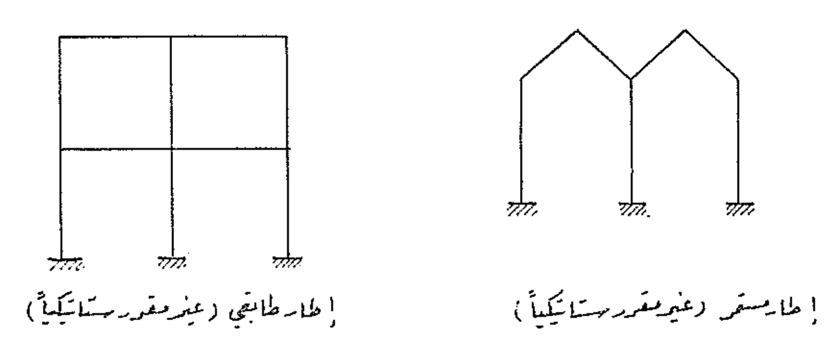
٣ ـ **الجيزان الاطارية** (الجمل الحاملة الاطارية ، الاطارات) :

وهي التي يكون فيها المحور مضلعاً ولا يشترط فيها نوع معين من المساند (شكل 6-1).

الجيزان الإطارية (الإطارات)





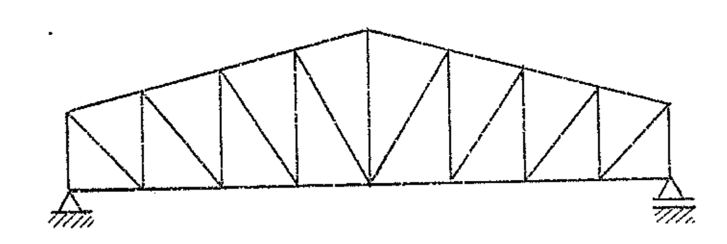


شكل 1-6

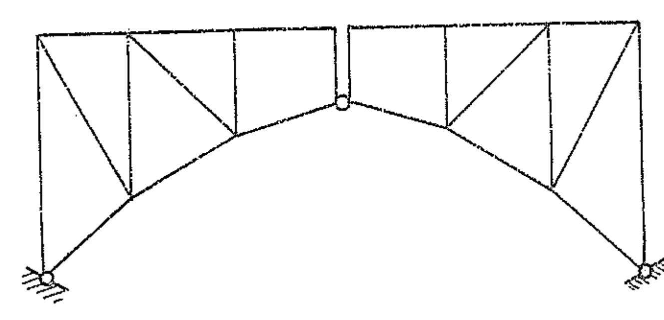
٤ ـ **الجيزان الشبكية** (الجمل الحاملة الشبكية ، الشبكيات) :

ويتكون الانشاء في هذه الحالة من مجموعة من القضبان تتصل ببعضها اتصالا مفصلياً ، حتى لتبدو وكأنها غزل شبكي مفصلي (شكل 1-7) .

الجيزان المشبكية (الشبكيات)



جائز شبكي بسيط



جائز شبكي ثلاثي المفصل

شكل 1-7

α ـ ٢ تقسيم الانشاءات الخطية بالنسبة لنوع المساند :

يمكن تقسيم الانشاءات الخطية تبعاً لنوع المساند وعددها الى عدة أقسام أخرى. ففى الانشاءات القضيبية المستقية مثلا يفرق بين الانواع التالية :

آ ـ **الجائز البارز**(الجائز الموثوق من طرف والحر من الطرف الآخر ، الظفر ، الجائزالحر):
ويستند على مسند واحد من النوع الموثوق (التام التثبيت) (شكل 1-4 a).

ب ـ **الجائز البسيط** (الجائز البسيط المسنود على مسندين بسيطين) :

ويستند على مسندين مفصليين في طرفيه أحدهما ثابت والآخر متحرك (شكل 1-4 b).

ج ـ **الجائز البسيط ممتد الاطراف** (جائز ممتد الاطراف) :

ويكون فيه المسندين المفصليين بعيدين ، أحدهما او كلاهما عن طرف الجائز بحيث يمتد جزء من الجائز الى ما بعد المسند (شكل 1-4 c) .

د ـ **الجائز المستمر :**

ويستند هذا الجائز على اكثر من مسندين مفصليين (شكل 1-4 e) .

هـ ـ **الجائز المفصلي** (جائز جربر) :

وهو جائز مستمر ذو اتصال مفصلي من الداخل عند مجال او اكثر لامكان ايجاد حل ستاتيكي بسيط له (شكل 1-4 d).

و ـ **الجائز الموثوق :**

وهو جائز (حامل) ذو مسندين من النوع الموثوق في طرفيه (شكل 1.4 f) .
وتعطي الاشكال (1-5) , (1-6) , (1-7) بعض النماذج لانواع الانشاءات الخطية المختلفة الاخرى ومن السهل تتبع هذه النماذج .

α ـ ٣ تقسيم الانشاءات الخطية حسب طبيعة تحملها :

يمكن تقسيم الانشاءات الخطية تبعاً لطبيعة تحملها الى القسمين التاليين :

١ ـ **الحبل** (السلسلة) : عنصر انشائي خطي باستطاعته تحمل قوى طولية (قوى ناظمية) شادة فقط .

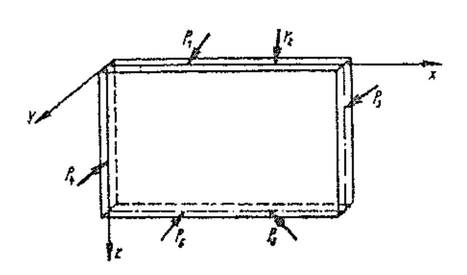
٢ ـ **القضيب** : عنصر انشائي خطي بمقدوره تحمل قوى ناظمية شادة وضاغطة وكذلك قوى عرضية (عمودية على المحور الاوسط) وعزوم .

β ـ الانشاءات السطحية :

هذا النوع من الانشاءات هو الذي لا ينطبق عليه التعريف السابق للانشاءات الخطية ، بل تكون فيها أحد الابعاد (السماكة) أصغر بكثير من البعدين الاخرين (الطول والعرض) وهي تتكون من سطوح رقيقة نسبياً ويمكن تقسيمها الى الانواع التالية :

١ ـ **الاقراص (الالواح) :**

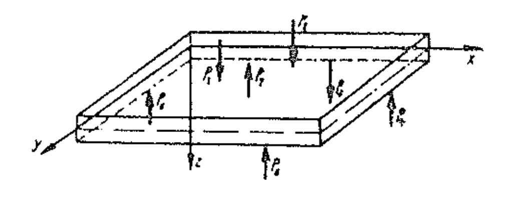
هي عبارة عن عناصر انشائية مستوية (سطوح مستوية) سماكتها أصغر بكثـــير من طولها وعرضها . ينطبق مستوي التحميل في الاقراص على السطح الاوسط (شكل 1-8).



شكل 1-8

٢ ـ **الصفائح (البلاطات) :**

وهي عبارة عن عناصر انشائية مستوية (سطوح مستوية) سماكتها أصغر بكثـــير من طولها وعرضها . يتم التحميل في البلاطات عمودياً (ناظميا) على سطحها الاوسط (شكل 9-1) .



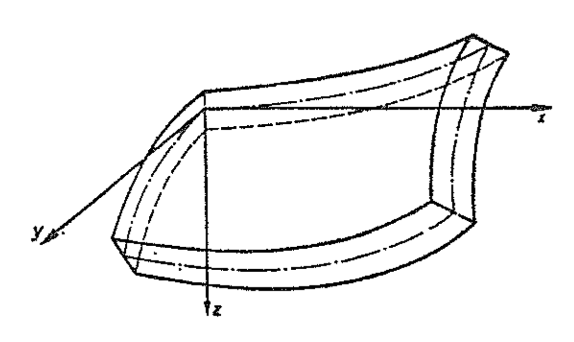
شكل 9-1

٣ ـ **القشريات :**

وهي عبارة عن عناصر انشائية منحنية ، منها ماهو منحني باتجاه واحد كان تكون اسطوانيـة ويمكن أن يكون المقطع العرضي للاسـطوانة دائريا او على شكل قطاع من الدرجــة الثانية ويكون المحور الطولي للاسطوانة هو محور الانشاء القشري وتكون جميع الرواسم موازية لهذا المحور . والانابيب نوع من هذه القشريات ، ومنها ماهو منحني باتجاهين كالقباب مثلاً والتي يمكن ان نتصور تولدها ناتج عن دوران منحني معين حول خط في مستواه ويمثل هذا الخط محور القبة ويكون عادة شاقوليا . أما الحمولات الخارجية فتؤثر على القشريات بكل اتجاه .

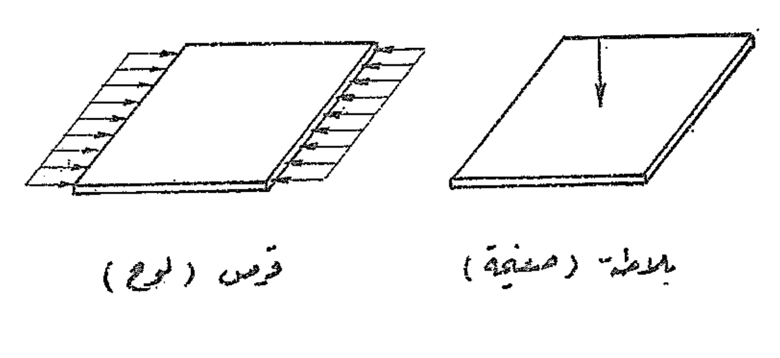
لقد لقي هذا النوع من الانشاءات (القشريات) اقبالا متزايداً في الفترة الاخيرة وتبعا لهـذا

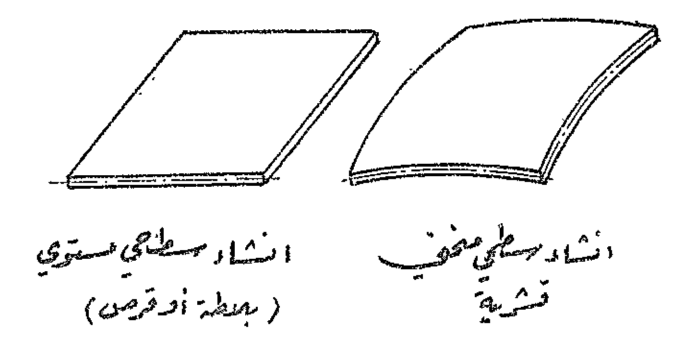
فلقد نالت دراسته النظرية اهتماما خاصا من المهندسين الانشائيين الذين يعهد اليهم بتصميم هـــذا النوع من الانشاءات القشرية (شكل 18-1) .



شكل 10-1

تختلف الصفائح (البلاطات) والاقراص (الالواح) والقشريات عن بعضهـا البعض فقط بأن السطح الاوسط للصفيحة والقرص هو سطح مستوي بينما يرى ان الســطح الاوســط للقشرية هو سطح منحني وكذلك فان اتجاه تأثير الحمولات الخارجية في الصفائح والاقراص محـدد بينما لا يتحدد اتجاه التأثير في القشريات (شكل 11-1) .





شكل 11-1

١ ـ ٣ ـ ٢ تقسيم الانشاءات تبعاً لدرجة التقرير الستاتيكية :

ويمكن من ناحية اخرى تقسيم الانشاءات حسب درجة التقرير الستاتيكية الى النوعين التاليين :

١ ـ انشاءات مقررة ستاتيكياً .

٢ ـ انشاءات غير مقررة ستاتيكيا .

والنوع الاول من هذه الانشاءات هي تلك التي يمكن فيها تحديد جميع مركبات رد الفعل وكذلك القوى الداخلية عند اي قطع (ردود افعال القطع او ما تسمى ايضا بقيم القطع) باستخدام شروط التوازن الستاتيكية فقط . أما النوع الثاني فيقصد به تلك الانشاءات التي تزيد فيها مركبات رد الفعل عن الشروط الممكن استخدامها لتحقيق التوازن وفي هذه الحالة لا تكفي شروط التوازن وحدها لتحديد قيم مركبات رد الفعل (ردود افعال المساند وردود الافعال الداخلية) ويلزم في هذه الانشاءات دراسة التغير الناتج في ابعاد الانشاء وفي مواضع استناده لايجاد شروط تكميلية تساعد على حساب مركبات ردود الفعل . وقد وضع امام الانشاءاتغير المقررة ستاتيكياً في النماذج الموضحة بالاشكال (1-4) حتى (1-6) كلمة غير مقرر ستاتيكياً . ومن السهل مراعاة ان عدد مركبات رد الفعل الخارجي في كل هذه النماذج يزيد على ثلاث مركبات وهي ما لا يمكن تحديده بشروط التوازن الستاتيكية وحدها . وفي بعض الحالات يكون الانشاء مقرراً ستاتيكياً من الخارج بمعنى انه يمكن تحديد مركبات ردود افعال المساند من شروط التوازن الستاتيكية ولكنه مع ذلك يظل غير مقرر ستاتيكياً من الداخل بحيث لا يمكن ايجاد القوى الداخلية المؤثرة على قطوعه دون الاستعانة بدراسة التغير الذي يطرأ على شكل الانشاء نتيجة للحمولات المؤثرة عليه . وابسط مثل لهذا النوع من الانشاءات هو إطار مغلق يستند استناداً بسيطاً على مسندين مفصليين ، احدهما ثابت والآخر يسمح بالحركة الانتقالية ، وغني عن البيان ان قوى ردود افعال المساند في حالة انشاءات السطوح القشرية تكون موزعة على اطرافها . وتتوقف قيم هذه القوى على طريقة استناد هذه الاطراف وهو ما يطلق عليه اسم **شروط الاطراف** وهي على كل حال غير مقررة ستاتيكياً سواء من الداخل او الخارج ومع ذلك فان من الممكن في بعض الاحيان معاملة هذه السطوح القشرية بطريقة سهلة تقريبية وذلك بردها الى نوع مشابه من انواع الانشاءات الخطية اذا كانت ابعادها الخارجية وسمك الغشاء القشري تسمح من ذلك .

١ ـ ٤ انواع الحمولات

١ ـ ٤ ـ ١ تقسيم الحمولات حسب توزيعها

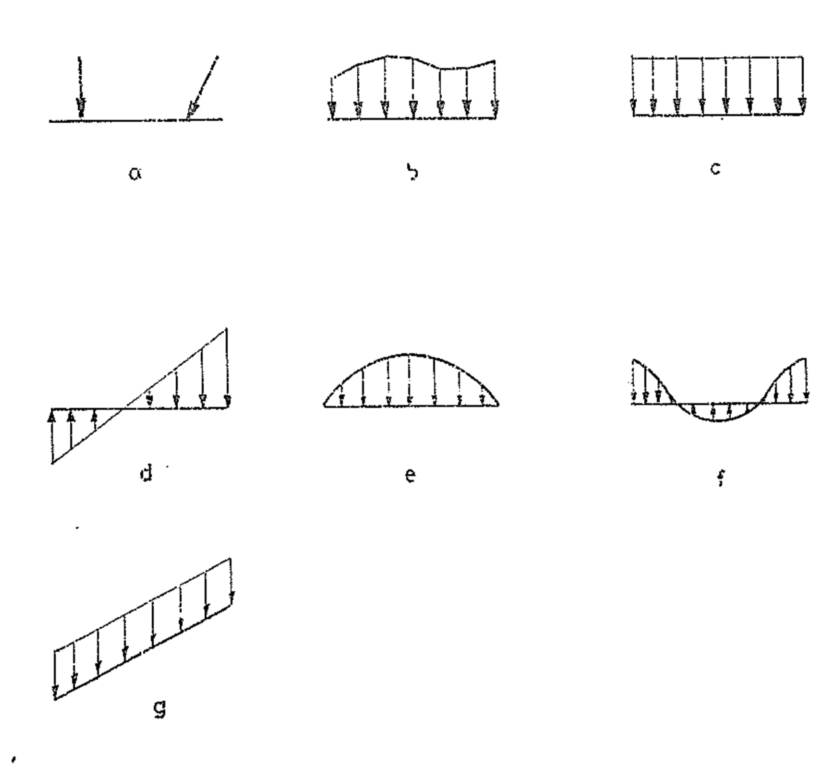
يمكن تقسيم الحمولات حسب توزيعها الى :

١ - **حمولات وحيدة** (حمولات مركزة) .

٢ - **حمولات موزعة** .

الحمولة الوحيدة(الحمولة المركزة): هي التي تؤثر عند نقطة معينة وفي اتجاه معلوم (شكل 1-12 a) ومن الواضح ان تركيز الحمولة في نقطة واحدة امر لا يمكن تحقيقه بسهولة وذلك لان هذه الحمولات لا بد وان يمتد تأثيرها الى مساحة ما حـــول نقطة تأثيرها (نقطة تطبيقها ، نقطة فعلها) على الانشاء . ولكن تأثير هذا التوزيع المحدود يكون من الضآلة بحيث يمكن اهماله .

الحمولة الموزعة : هي التي لا يتركز تأثيرها عند نقطة معينة وانما يمتد الى منطقة كبيرة من الانشاء كما هو مبين في الشكل (1-12 b) ويبين التهشير (التظليل) شدة الحمولة عند كل نقطة.والحمولة الموزعة يمكن ان تكون **موزعة بانتظام** كما في الشكل (1-12 c) أو **موزعة بغير انتظام** وذلك كما في الشكل (1-12 d) . كما ان الحمولات غير الموزعة بانتظام يمكن مع هذا ان تحقق علاقات هندسية معلومة كأن يكون التغير في الشدة خاضعاً لعلاقة خطية من الدرجة الاولى شكل (1-12 d) ويسمى التوزيع في هذه الحالة **توزيعاً خطياً** (حمولات خطية التوزيع) او لعلاقة تحددها معادلة قطع مكافىء من الدرجة الثانية او اكثر شكل (1-12 e) ويمكن ان يسمى



شكل 1-12

هذا توزيعاً مكافئياً واخيراً يبين الشكل (1-12 f) حمولات موزعة على هيئة منحني جيبي او جيب تمام . وليس من الضروري ان تكون الحمولات الموزعة متعامدة مع محور الانشاء عند نقاط تأثيرها ، ويبين الشكل (1-12 g) حمولة شاقولياً موزعة بانتظام تؤثر على محور مائل . ويلاحظ في هذه الحالة ان يحدد تهشير (تظليل) الحمولة باتجاه هذه الحمولة (يحدد تظليل الحمولة اتجاه هذه الحمولة) . ولهذا يظهر التهشير في الشكل 1-12 g شاقولياً ليدل على ان الحمولة شاقولية . وتعطي الشدة عند اي نقطة في هذه الحالة بمقدار ما يقع على المتر الطولي من الحمولة . ويجوز ان يكون هذا الطول في الاتجاه الافقي وتسمى الشدة في هذه الحالة : شدة على المتر الافقي ويجوز ان يكون قياس المتر على طول المحور المائل وتسمى هذه الشدة : شدة على المتر المائل . ومن الواضح ان قيمة الشدة لحمولة معينة اذا اعطيت على المتر الافقي تكون اكثر منها لو اعطيت على المتر المائل وذلك لان المتر الافقي يقابل طولا اكبر من متر على المائل . وعلى العكس من ذلك فان حمولة تعينها شدة ما على المتر الافقي تكون أقل من حمولة تحددها نفس القيمة العددية لشدة ولكن على المتر المائل وذلك لنفس السبب السابق .

١ ـ ٤ ـ ٢ تقسيم الحمولات حسب طبيعة عملها .

ويمكن تقسيم الحمولات ايضاً تبعاً لطبيعة عملها (بالنسبة لزمن تأثيرها) الى النوعين التاليين

١ ـ **حمولات دائمة** (حمولات ميتة ، حمولات ثابتة) .

٢ ـ **حمولات متحركة** (حمولات حية) .

ويقصد بالنوع الاول (الحمولات الدائمة) تلك الحمولات التي لا تتغير في القيمة او الموضع وذلك مثل وزن الانشاء الذاتي (الوزن الذاتي للانشاء) .

أما الحمولات المتحركة فهي التي تغير وضعها على الانشاء كما يمكن ان تتغير قيمتها وذلك مثل العربات التي تعبر فوق انشاء ما او الضغوط الناجمة عن هبوب الرياح بشدة او تأثير ضغط المياه أو التربة على الجدران الاستنادية او القوى الناشئة من تغير درجات الحرارة او دوران اجزاء معينة في الانشاء أو تحركها بسرعة .

١ ـ ٤ ـ ٣ تقسيم الحمولات تبعاً لأهمية الحمولة على الانشاء .

وهناك تصنيف آخر للحمولات وهو التقسيم تبعا لاهمية الحمولة على الانشاء وهو يستخدم بكثرة في مواصفات الانشاءات المعدنية .

١ ـ **حمولات رئيسية** ويرمز لها بالحرف H .

٢ ـ **حمولات إضافية** ويرمز لها بالحرف Z .

٣ ـ **حمولات خاصة** ويرمز لها بالحرف S .

ويقصد بالنوع الاول (الحمولات الرئيسية) تلك التي تتألف من الحمولات الدائمة وحمـولات المواصلات بما فيها وزن الثلوج دون ضغط الرياح وكذلك قوى الكتل الحرة للآليـات . أما حمولات النوع الثاني (الحمولات الاضافية) فهي تلك التي تتألف من حمولات الرياح (ضغط الرياح) قوى الاقلاع والفرملة للحمولات المتحركة والقوى الجانبية الافقية (على سبيـل المثال الناتجة عن الروافع) والتأثير الحراري (الحرارة الجوية وحرارة العمل) .

١ ـ ٤ ـ ٤ تقسيم الحمولات حسب طبيعتها الحركية .

ويمكن تقسيم الحمولات تبعا لطبيعتها الحركية الى النوعين التاليين :

١ ـ **حمولات ستاتيكية** (سكونية) .

٢ ـ **حمولات ديناميكية** (حركية) .

ويقصد بالنوع الاول من الحمـولات (الحمولات الستاتيكية) تلك الحمولات السـاكنة التي لا تتحرك ، مثل الوزن الذاتي للانشاء . أما النوع الثاني للحمولات (الحمولات الديناميكية) فهي تلك الحمولات التي تتحرك بسرعـة ما على الانشاء كحمولات القاطرات او العـربات على الجسور مثلا .

ان حمولة ديناميكية ما تكون اكبر من نفس الحمولة لو اصبحت حمولة ستاتيكية .

الفصل الثاني

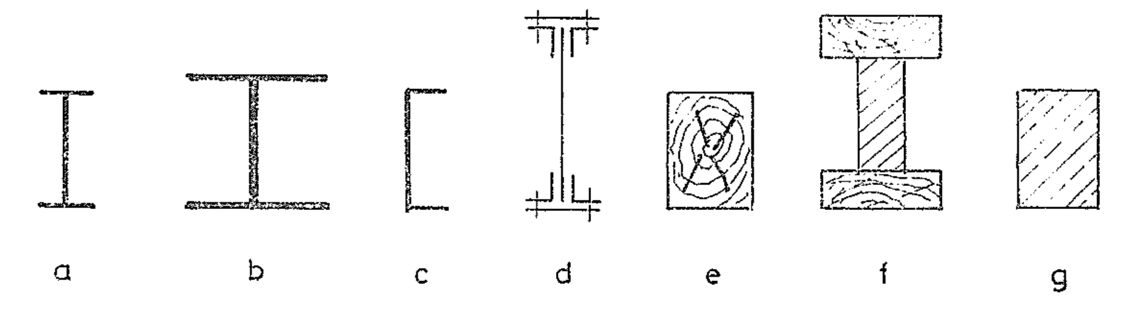
الجيزان المقررة ستاتيكياً

٢ ـ ١ مقدمة وتعاريف

يفهم مبدئياً تحت كلمة جائز ، العنصر الانشائي الخطي (القضيبي) الذي يغطي فراغاً أو الذي يبرز من فراغ والذي انشأ لتحمل الحمولات .

سوف تتم في هذا الفصل دراسة بعض الجيزان المقررة ستاتيكياً والتي يكثر استعمالها في الحياة العملية ، نذكر منها الجائز البسيط (الجائـز المسنود على مسندين بسيطين) والجـائز البسيط ممتد الاطراف والجائز البارز (الظفر) والجائز المفصلي (جائز جربر) والجـائز الاطـاري والجـائز القوسي والجائـز الشبكي .

ينبغي ان تتوافق اشكال المقاطع العرضيه للجائز مع المادة المكونة له ، على سبيل المثال فولاذ ، خشب ، بيتون مسلح ، بيتون مسبق الاجهاد ، مواد لدنة (مواد بلاستيكية) والخ .



شكل 2-1

تشير الاشكال (2-1) الى بعض المقاطع العرضية المستخدمة في الانشاءات . فعلى سبيل المثـال يمثل الشكل (2-1a) بروفيل عادي بشكل حرف I ويمثل الشكل (2-1b) بروفيل بشـكل حرف I من النوع الخاص ذو الاجنحة المتوازية العريضة ولذلك يرمز له بالاحرفIP للتفريق بينه وبين البروفيل السابق . اما الشكل (2-1c) فيمثل بروفيل على شكل حرف C . كل هـذه المقاطع

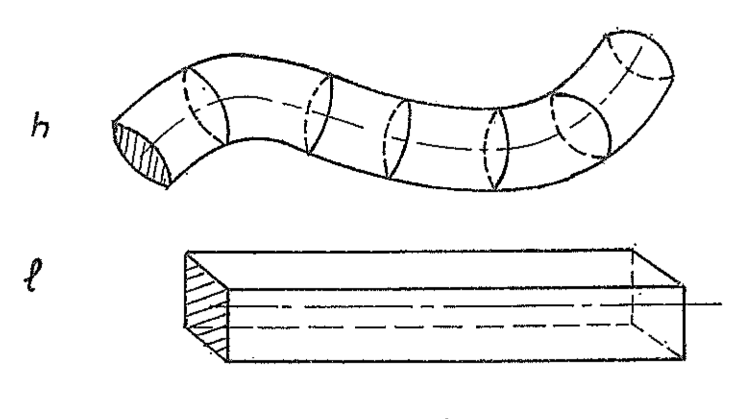
العرضية المسماة بالبروفيلات تصنع بواسطة الدرفلة ، ابعادها ومقاييسها وقيمها الستاتيكية مثبتة في جداول المواصفات .

تستخدم في الانشاءات المدنية الكبيرة جيزان مجمعة مصنوعة من صفائح وزوايا فولاذية مبرشمة أو ملحومة (شكل I2-1d) .

تشير الاشكال (2-1 e,f) إلى بعض المقاطع العرضية المصنوعة من الخشب والتي يعتبر من أبرزها وأكثرها استعمالا هو المستطيل (المقطع العرضي مستطيل الشكل) كما تشير ايضاً الى مقطع عرضي آخر يشابه المقاطع العرضية الفولاذية في الشكل وهو يستخدم لحمل حمولات عالية .

يشير الشكل (2-1g) الى مقطع عرضي مصنوع من البيتون المسلح . كما ان هناك أشكال كثيرة من المقاطع العرضية لا حصر لها .

يسمى الخط الواصل بين مراكز ثقل المقاطع العرضية لجائز **بمحور الجائز** أو ايضاً **محور القضيب** (**المحور الاوسط**) . اما التسمية الاخيرة (محور القضيب) فقد نتجت عن النظرية المتسادة التي تعتمد على أبعاد الجائز والتي تفترض ان الجائز طويل جداً بالنسبة لابعاد مقطعه العرضي وبذلك يظهر كقضيب رفيع . أما محور القضيب (المحور الاوسط) فيمكن أن يكون مستقيماً (شكل 2-1e) أو منحنياً (شكل 2-1h) أو مركباً من خطوط مستقيمة وخطوط منحنية .



شكل 2-1 h,e

ليكون الجائز متوازناً (توازن مستقر) يجب ان يستند استناداً كافياً . تسمى مواضع استناد الجائز بمساند الجائز . يؤثر الجائز المحمل على المساند بقوى (قوى فعل) فترد عليه المساند

(حسب مبدأ الفعل ورد الفعل) بقوى معاكسة تكافئها (تساويها قيمة وتعاكسها اتجاهاً) وتسمى بردود أفعال المساند (أو قوى الاستناد أو أيضاً قوى المساند) .

تدخل جميع القوى المؤثرة على الجائز من الخارج (الحمولات) وردود أفعال المساند تحت اسم **الحمولات الخارجية** .

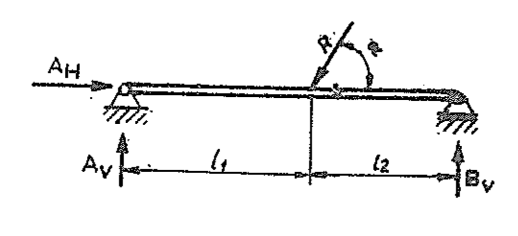
٢ ـ ٢ ردود افعال المساند وطرائق ايجادها

٢ ـ ٢ ـ ١ الاستناد بواسطة مسند ثابت ومسند متحرك

اذا استند الجائز كما في الشكل (2-2) على مسندين أحدهما ثابت والاخر متحرك عندئذ تتشكل ٣ مركبات لردود افعال المساند . لايجادها هناك طريقان ، الاول تحليلي (ويتم بتطبيق شروط التوازن المستوية) والثاني تخطيطي (ويتم بتحقيق شروط التوازن المستوية تخطيطياً) .

آ ـ الطريق التحليلي لايجاد ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن المستوية ينتج :



شكل 2-2

$$\Sigma H = 0 \ : \ A_H - P\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma V = 0 \ : \ A_v + B_v - P\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \ : \ B_v (l_1 + l_2) - P\sin\alpha . l_1 = 0$$

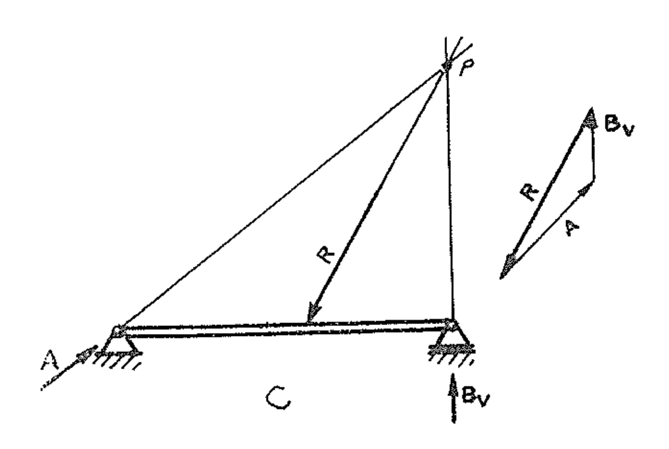
بحل هذه المعادلات يتم الحصول على ردود أفعال المساند المجهولة (يفضل اختيار ترتيب تطبيق شروط التوازن بحيث تعطي فيه كل معادلة وفي كل مرة مجهولا جديداً ان أمكن وذلك حتى لا يضطر في نهاية الامر لحل مجموعة معادلات خطية بعدة مجاهيل) :

$$A_H = P\cos\alpha$$

$$A_v = \frac{l_2}{l_1 + l_2} \; P \sin \alpha$$

$$B_v = \frac{l_1}{l_1 + l_2} \; P \sin \alpha$$

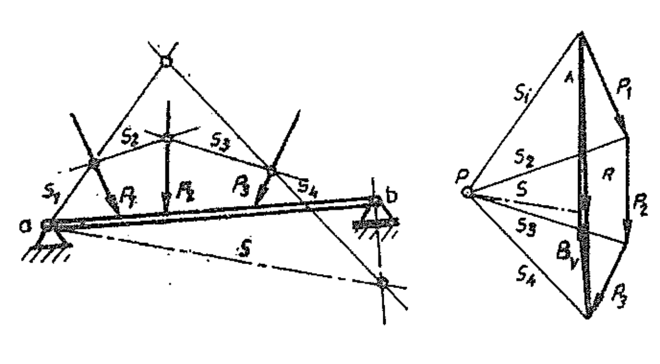
ب ـ الطريق التخطيطي لايجاد ردود أفعال المساند :



شكل 3 ـ 2

اثناء ايجاد ردود افعال المساند بالطريقة التخطيطية يتوجب مرور حامل قوة رد الفعل A من النقطة c ، النقطة الناتجة عن تقاطع حامل رد الفعل B_v الشاقولي مع حامل القوة الخارجية P (شكل 2-3)، هذا يعني ان القوى A و B_v و P التي تؤثر على الجسم تتلاقى في نقطة واحدة وبذلك فان شرط توازن العزوم $\Sigma M_c = 0$ محقق .

ج ـ طريقة المضلع الحبلي التخطيطية لايجاد ردود افعال المساند :



شكل 2-4

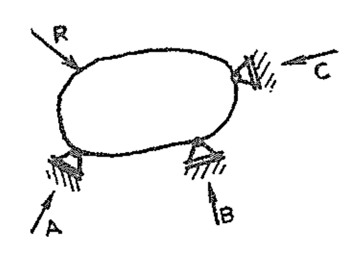
ينبغي ، اثناء ايجاد ردود افعال المساند بواسطة المضلع الحبلي ، الانتباه لوجوب مرور الشعاع الحبلي الاول (في هذه الحالة الشعاع الحبلي S_1) من النقطة a وذلك في حالة كون اتجاه حامل قوة رد الفعل A مجهولا (شكل 2-4) وذلك لان النقطة a هي النقطة الوحيدة المعلومة من حامل القوة A .

يسمى الخط الواصل بين النقطه a وبين نقطة تقاطع الشعاع الحبلي الاخير (في هذه الحالة S_4) مع حامل القوة B_v **بخط النهاية** (او **خط الاغلاق**) . من مخطط القوى ، يستطاع بواسطة S_4 و S ايجاد رد الفعل B_v وبواسطة S_1 , S يستطاع ايجاد رد الفعل A .

تتوازن مجموعة القوى المستوية العامة (اللامركزية) عندما يغلق مضلع القوى وكذلك المضلع الحبلي .

٢ ـ ٢ ـ ٢ الاستناد بواسطة ثلاث مساند او ثلاثة قضبان

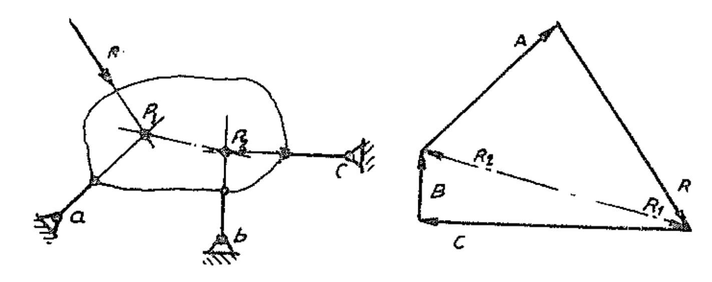
يكافيء استناد جسم على ثلاث مساند متحركة (شكل 2-5) الاستناد على ثلاثة قضبان (شكل 6 ـ 2) .



شكل 2-5

بالامكان تركيب (جمع) القوى **A** و **P** والحصول على المحصلة $\mathbf{R_1}$ كما يمكن تركيب القوى **B** و **C** للحصول على المحصلة R_2 .

يسود التوازن عندما تكون $\mathbf{R_1} = -\mathbf{R_2}$. مما ذكر يستخلص بأن الحامل المشترك للقوى $\mathbf{R_1}$ و $\mathbf{R_2}$ يجب ان يمر من النقاط p_1 و p_2 . يسمى الخط الواصل بين النقاط p_1 و p_2 بمستقيم كولمان . بواسطة هذا الخط المستقيم يمكن ايجاد ردود افعال المساند من مخطط القوى . يمكن ان يتم تحليل القوى في مضلع القوى ايضاً ، شريطة الانتباه الى امكانية بناء مفصل في كل نقطة تقاطع قضيبين وكذلك الى وجوب مرور الشعاع الحبلي الاول من تلك النقطة . اما متابعة الحل فتتم تماماً كما في الفقرة ١ ـ ٣ ـ ٢ (I)§

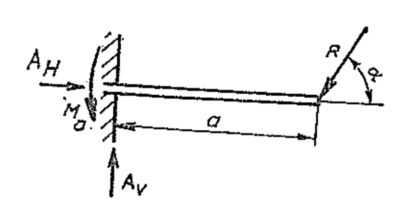


شكل 2-6

بتطبيق شروط التوازن (شروط توازن القوى وشروط توازن العزوم) يتم هنـا ايضا ايجـاد ردود افعال المساند تحليلياً (يفضل هنا تطبيق شرط توازن العزوم حول النقطة p_2) .

٢ ـ ٢ ـ ٣ الوثاقة

بتطبيق شروط التوازن الثلاثة ، يتم ايجاد ردود افعال المساند الثلاثة M_a , A_V , A_H (شكل 2-7) تحليلياً



شكل 2-7

$$1.\ \Sigma H = 0 \ :\ A_H = R \cos \alpha$$

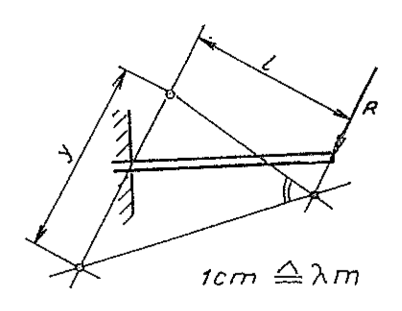
$$2.\ \Sigma V = 0 \ :\ A_v = R \sin \alpha$$

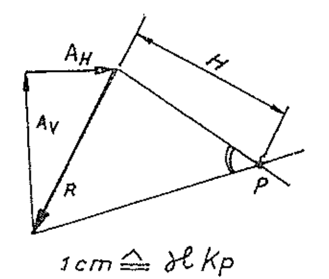
$$3.\ \Sigma M_a = 0 \ :\ M_a = a\, R \sin \alpha$$

بواسة مضلع القوى يمكن ايجاد ردود افعال المساند تخطيطياً . المسافـة y تكافىء العزم M_a (شكل 2-8) .

$$M_a = l B \ ,\ \frac{R}{H} = \frac{y}{l} \ ,\ R.l = yH$$

باستخدام عوامل المقياس ينتج :



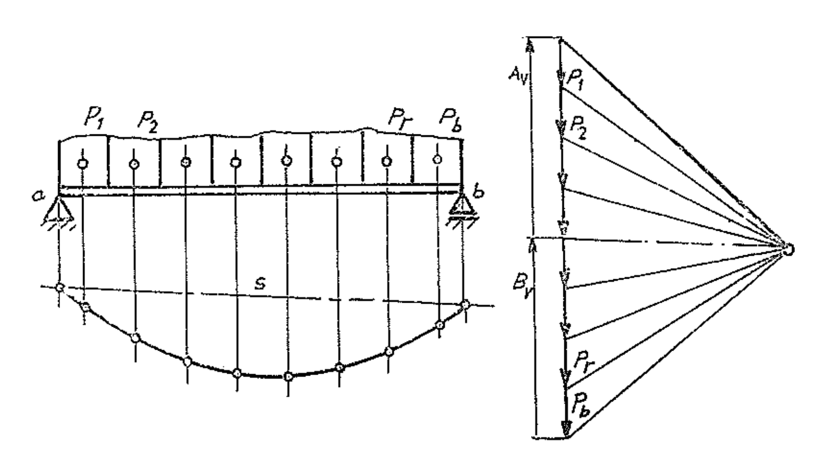


شكل 2.8

٢ ـ ٢ ـ ٤ ردود افعال المساند في حالة الحمولات الموزعة

آ ـ الطريق التخطيطي :

للحصول على قوى ردود افعال المساند تخطيطياً تقسم الحمولة ، التي تحـدد بشدتها ، الى شرائح صغيرة . يمكن اعتبار حمولات الشرائح الصغيرة كقوى وحيدة تؤثر في مراكز ثقل تلك الشرائح (شكل 2.9) .



شكل 2-9

بالاستعانة بطريقة المضلع الحبلي المنوه عنها في الفقرة ١ ـ ٣ ـ ٢ γ(I) يتم ايجاد قوى ردود افعال المسانـد . في حالة كون مراكز ثقل سطوح التحميل وكذلك مساحاتها معلومـة عندئذ يمكن تمثيل الحمولة الكلية لشريحـة التحميل كقوة وحيدة تؤثر في مركز ثقل تلك الشريحـة وبعد ذلك يلجأ لايجاد ردود افعال المساند .

ب ـ الطريق التحليلي :

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - \int_0^L q(x)\ dx = 0$$

$$\Sigma M_i = 0 : B_v . L - \int_0^L q(x)\, x\, dx = 0$$

حيث ان L هو طول المسافة $\overline{AB}$ و x هو الاحداثي الذي يسير باتجاه المحور الاوسط (محور القضيب) مبتدأ من a ومتجهاً الى b $(0 \leq x \leq L)$.

اما q(x) فهي شدة الحمولة (مقاسة بواحدة الحمولة الموزعة ، أي واحدة القوة على واحدة الطول) وتتعلق بالاحداثي x (وهي تابع للاحداثي x) .

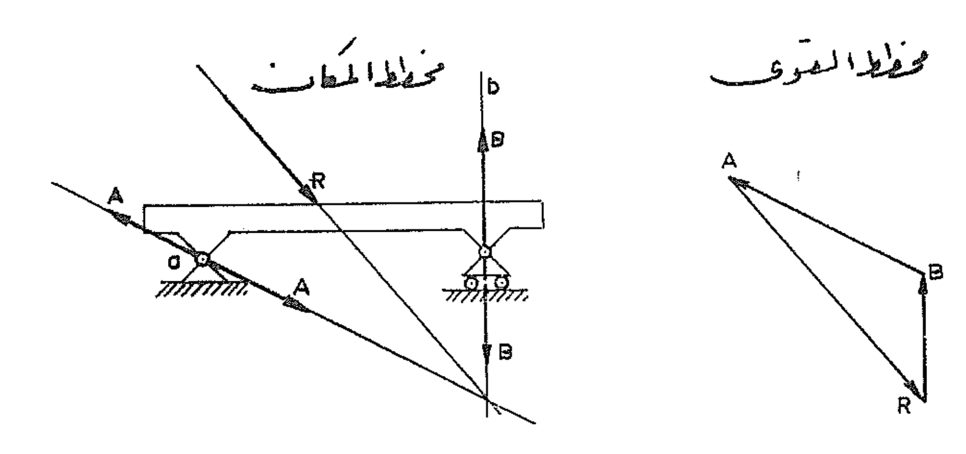
٢ ـ ٢ ـ ٥ أمثلة

آ ـ أمثلة على ايجاد ردود أفعال المساند بالطريقة التخطيطية :

سيتم فيما يلي ايجاد ردود افعال المساند لبعض الجيزان المستوية ذات الاستناد المقرر ستاتيكياً بواسطة الطريق التخطيطي .

مثال 1 :

المطلوب : تعيين ردود افعال مساند الجائز الممثل في الشكل (2-10) وهما A و B والمحمل بالقوة الوحيدة R .



شكل 2-10

الحل :

يتعين الحامل b للقوة B بواسطة المسند المتحرك افقياً (اذاً الحامل b شاقولي) .

تمر القوة A من نقطة التمفصل a للمسند الثابت . والان ينبغي تحقيق حالة التوازن بين القوة R والقوتين A و B مع العلم بأن نقطة من حامل القوة الاولى (وهي النقطة a) وحامل القوة الثانية (وهو المستقيم الشاقولي b) معلومين .

يقود الحل التخطيطي لهذه المسألة الى الشكل (2-10) .

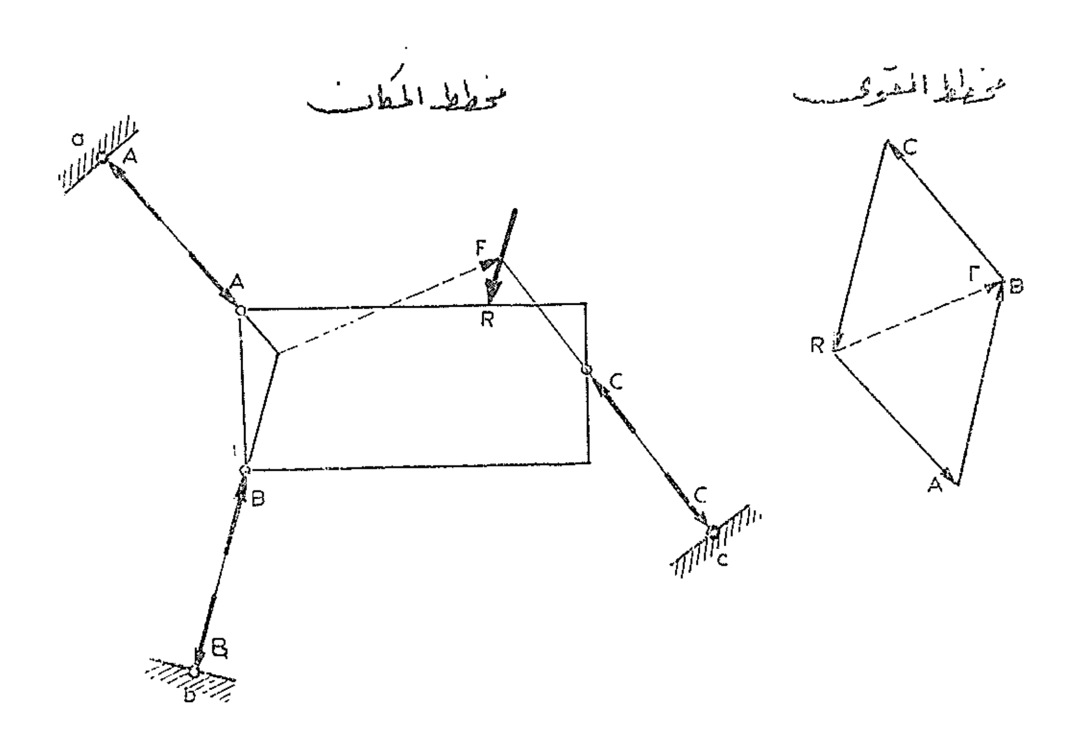
مثال 2 :

تؤثر على جائز يستند على ثلاثة قضبان (هما a , b , c) لا تتلاقى في نقطه واحدة ، القوة R (شكل 2-11) .

المطلوب : تعيين ردود افعال مساند الجائز .

الحل :

يتلخص حل المسألة بتحليل القوة R المعطاة الى ثلاثة مركبات علمت حواملها .



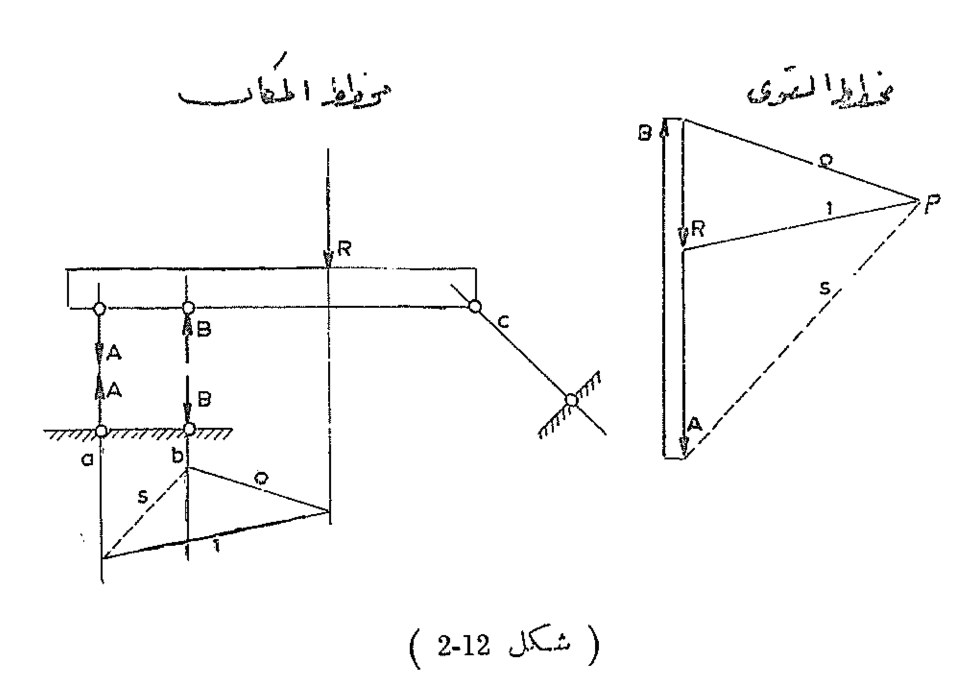
شكل 2-11

لقد استخدمت للحل طريقة كولمان المنوه عنها في الفقرة ١ — ٣ - ٢ γ (I) والـتي يعطي تطبيقها على هذا المثال الشكل (2-11) .

مثال 3 :

تؤثر على جائز مسنود على ثلاثة قضبان (هي a , b , c) القوة R (شكل 2-12) .

المطلوب : ايجاد ردود أفعال المسائد .



(شكل 2-12)

الحل :

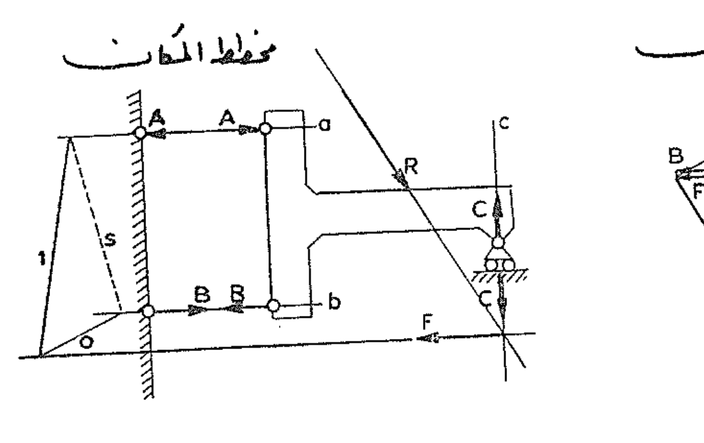
ينعدم رد فعل المسند C وذلك لانعدام المركبات الافقية للقوى A , B , R ، فمركباتهـــا الافقية هي الوحيدة التي تستطيع ان تحقق ، لو كانت موجودة ، مع المركبة الافقيـة للقوة C حالة التوازن .

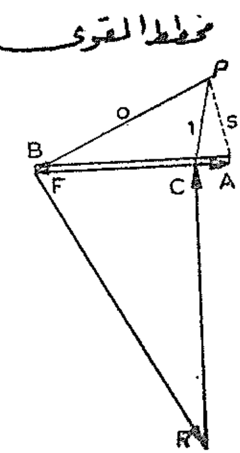
لقد تم الحل التخطيطي للمثال باستخدام المضلع الحبلي (الفقرة ١ -٣-٢ γ (I)) ولقد تم تمثيله في الشكل (2.12) .

مثال 4 :

المطلوب : تعيين ردود افعال مساند الجائز الممثل في الشكل (2-13) والمحمل بالقوة **R** .

الحل : باستخدام طريقة كولمان يتم التوصل للحل التخطيطي الممثل في الشكل (2-13) .



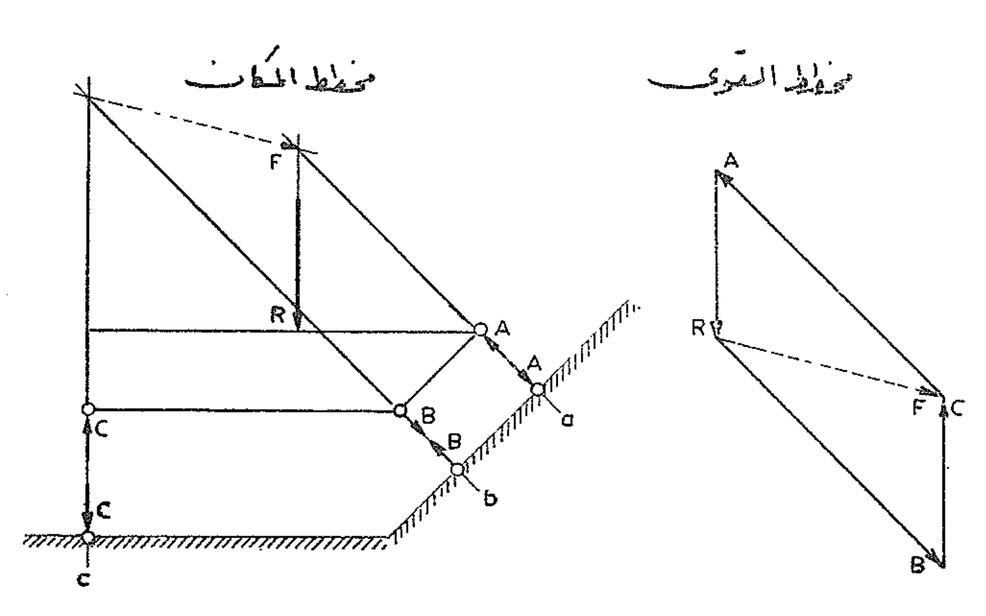


شكل 2-13

مثال 5 :

المطلوب : تعيين ردود افعال مساند الجائز الممثل في الشكل (2-15) .

الحل : بتطبيق طريقة كولمان يتم التوصل للحل .



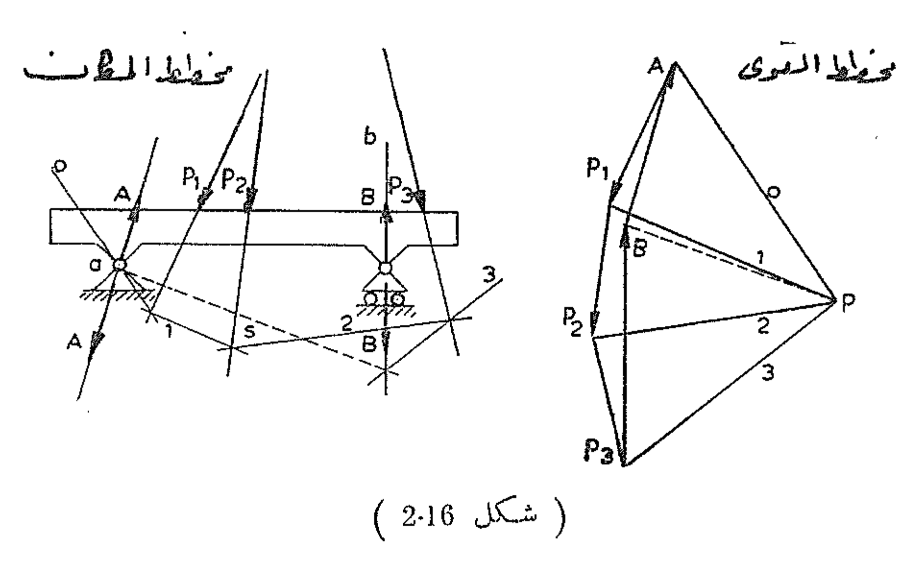
شكل (2-15)

مثال 6 :

المطلوب : ايجاد ردود افعال مساند الجائز الممثل في الشكل (2-16) والمحمـــل بالقـــوى . P_3 , P_2 , P_1

الحل :

بانشاء مضلع القوى والمضلع الحبلي الذي يلزم ان يمر شعاعه الحبلي الاول 0 من نقطة التمفصل a ، يتم تعيين ردود افعال المساند المطلوبة بواسطة خط الاغلاق s .



(شكل 2.16)

ب ـ أمثلة على حساب ردود أفعال المساند بالطريقة التحليلية

تتميز معالجة المشاكل الستاتيكية بالطريقة التحليلية بانها أسهل من معالجتها بالطريقة التخطيطية .
يتم حساب ردود افعال المساند بتطبيق شروط التوازن :

$$\Sigma H = 0 \quad , \quad \Sigma V = 0 \quad , \quad \Sigma M_i = 0$$

حيث ان ΣH هو مجموع مركبات القوى بالاتجاه الافقي وأن ΣV هو مجموع مركبات القوى بالاتجاه الشاقولي و ΣM_i هو مجموع العزوم بالنسبة للنقطة i . ويمكن ان يعبر عن شروط التوازن السابقة ايضاً بالشكل التالي :

$$\sum_{v=1}^{n} P_{xv} = 0 , \quad \sum_{v=1}^{n} P_{zv} = 0 , \quad \sum_{v=1}^{n} M_{yv} = 0$$

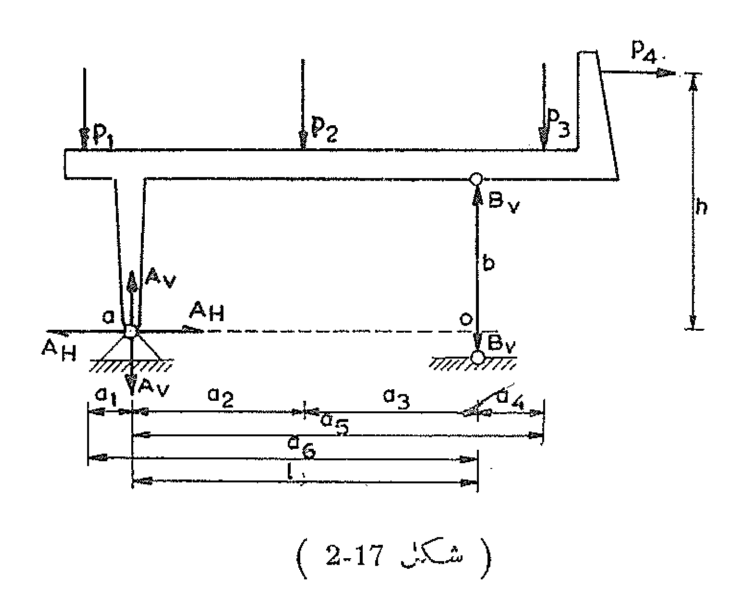
مثال 7 :

المعطى : الجائز المقرر ستاتيكياً الممثل في الشكل (2.17) .

المطلوب : ايجاد ردود افعال المساند .

الحل :

في البداية تثبت اتجاهات ردود افعال المساند A_V ، A_H ، B_V ثم بعد ذلك تطبق شروط التوازن.



(شكل 2-17)

شروط توازن القوى الافقية :

$$\Sigma H = 0 : A_H + P_4 = 0$$

شرط توازن العزوم حول النقطة 0 :

$$\Sigma M_0 = 0 \; ; - A_v l + P_1 . a_6 + P_2 . a_3 - P_3 . a_4 = P_4 . h = 0$$

شرط توازن القوى الشاقولية :

$$\Sigma V = : \; P_1 + P_2 + P_3 - A_v - B_v = 0$$

من المعادلات الثلاثة السابقة يتم تعيين ردود افعال المساند :

$$A_v = \frac{1}{l} (P_1 a_6 + P_2 a_6 - P_3 a_4 - P_4 h)$$

$$B_v = \frac{1}{l} (-P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_5 + a_4 h)$$

$$A_H = - P_4$$

التدقيق :

لتدقيق النتائج يطبق شرط توازن العزوم حول النقطة a :

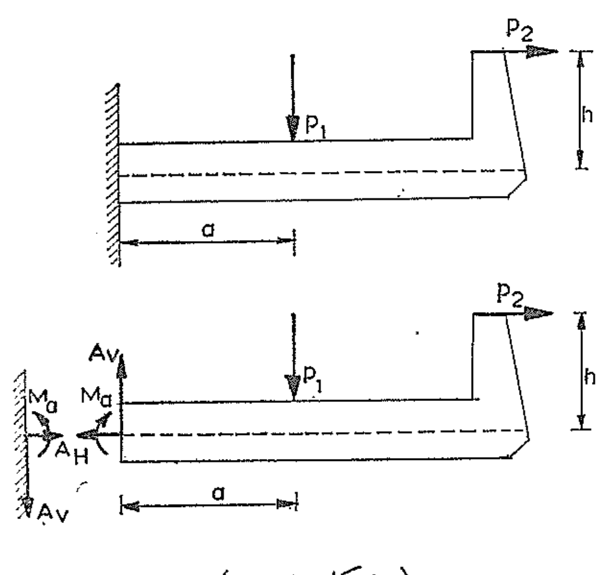
$$\Sigma M_a = 0 \quad : -B_v l - P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + P_4 h = 0$$

مثال 8 :

المعطى : الجائز البارز (الظفر) الممثل في الشكل (2-18) .

المطلوب : ايجاد ردود افعال المساند بالطريقة التحليلية .

الحل : بعد تثبيت اتجاهات ردود افعال المساند تطبق شروط التوازن.



(شكل 2-18)

شرط توازن العزوم حول نقطة الوثاقة a :

$$\Sigma M_a = 0 : M_a + P_1 a + P_2 h = 0 \quad : \quad M_a = -(P_1 a + P_2 h)$$

شرط توازن القوى الافقية :

$$\Sigma H = 0 : A_H - P_2 = 0 \quad : \quad A_H = P_2$$

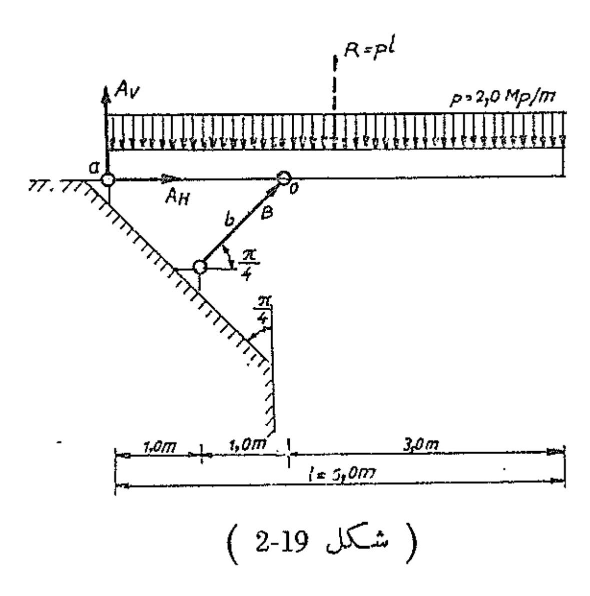
شرط توازن القوى الشاقولية :

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad A_v - P_1 = 0 \quad : \quad A_v = P_1$$

مثال 9 :

المعطى : الجائز ممتد الاطراف الممثل في الشكل (2-19) .

المطلوب : ايجاد ردود افعال المساند بالطريقة التحليلية .



(شكل 2-19)

الحل : بعد تثبيت اتجاهات ردود افعال المساند ، تطبق شروط التوازن .

شرط توازن العزوم حول النقطة a :

$$\Sigma M_a = 0 : R.2,5 - B_v .2,0 = 0 : B_v = \frac{2,5}{2} R = 12,5 Mp$$

بسبب كون المسند b مسند نوسي فان رد الفعل ينطبق على اتجاه محور القضيب المشكل للمسند، وبذلك فان :

$$B_v = B_H = 12,5 Mp \ ; \ B = \sqrt{B_H^2 + B_v^2} = 12,5\sqrt{2} = 17,675 Mp$$

شرط توازن القوى الافقية :

$$\Sigma H = 0 : A_H + B_H = 0 \ : \ A_H = - 12,5 \ Mp$$

شرط توازن القوى الشاقولية :

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - R = 0 \ ; \ A_v = - 2,5 \ Mp$$

التدقيق :

لتدقيق النتائج يطبق شرط توازن العزوم حول النقطه c :

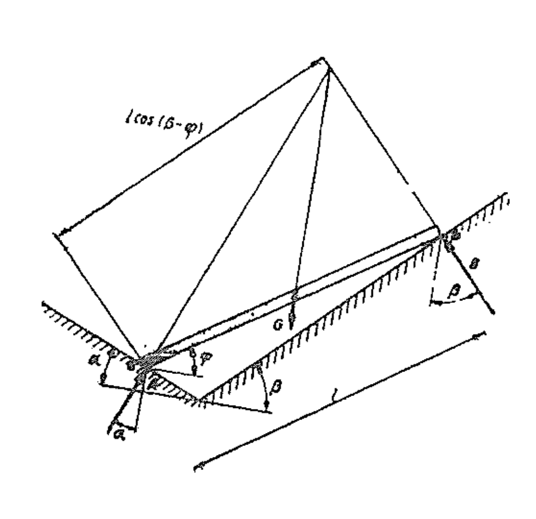
$$\Sigma M_c = 0 : A_v .5,0 + B_v . 3,0 + R.2,5 = 0$$

بتبديل قيم ردود افعال المساند المحسوبة تتحقق هذه العلاقة مما يؤكد صحة النتائج .

مثال 10 :

المعطى : قضيب طوله l ووزنه G يستند على جدارين ناعمين . يميل الجدار الاول بالنسبة للافق بزاوية α كما يميل الجدار الثاني بالنسبة للافق بزاوية β (شكل 2-20) .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند A , B في حالة توازن القضيب ثم حساب الزاوية التي يشكلها القضيب في تلك الحالة .



(شكل 2-20)

الحل :

يدرس القضيب عندما يأخذ وضع التوازن .

نتيجة لاستناد القضيب على الجدارين تتشكل ردود الافعال A و B حيث يأخذ كل منهما اتجاها ناظمياً (عموديا) على اتجاه الحركة (بالاتجاه الممنوع للحركة) .
مركبات رد الفعل A بالاتجاه الافقي والشاقولي :

$$A \sin \alpha \ , \ A \cos \alpha$$

مركبات رد الفعل B بالاتجاه الافقي والشاقولي :

$$B \sin \beta \ , \ B \cos \beta$$

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

شرط توازن القوى الافقية :

$$\Sigma H = 0 : A \sin \alpha - B \sin \beta = 0$$

شرط توازن القوى الشاقولية :

$$\Sigma V = 0 : A \cos \alpha + B \cos \beta - G = 0$$

بحل المعادلتين ينتج :

$$A = G \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \ , \ B = G \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

بتطبيق شرط توازن العزوم حول النقطة a ينتج :

$$\Sigma M_a = 0 : - G \frac{1}{2} \cos\varphi + Bl \cos(\beta - \varphi) = 0$$

بتبديل قيمة B في هذه العلاقة ينتج :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{2 \sin\alpha \ . \ \sin \beta} - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{2 \sin \alpha \ . \sin \beta}$$

حالة خاصة $(\alpha = \beta)$:

من اجل الحالة الخاصة تصبح القيم التي تم الحصول عليها سابقاً كالاتي :

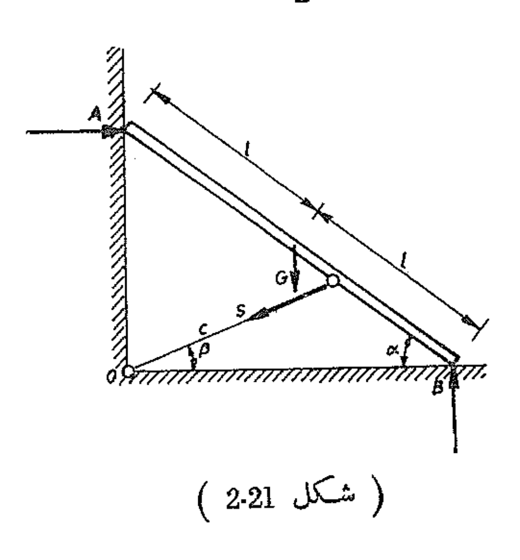
$$A = B = \frac{G}{2 \cos \alpha} \ ; \ \varphi = 0$$

وبذلك فان الوضع الافقي يمثل حالة توازن القضيب .

مثال 11 :

يستند قضيب وزنه G وطوله $2l$ على جدار ناعم (أملس) . يهمل الاحتكاك بين القضيب والجدار والارض ولذلك يثبت القضيب في النقطة c بحبل (شكل 2-21) .

المطلوب : ايجاد ردود افعال المساند A و B وكذلك قوة الحبل S .



(شكل 2.21)

الحل :

تأخذ ردود الافعال A و B منحاً يتعامد مع اتجاه الحركة . أما منحى قوة الحبل فينطبق على محور الحبـل . بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على المعادلات الثلاثة التالية :

$$\Sigma H = 0 : -A + S\cos\beta = 0$$

$$\Sigma V = 0 : -B + S\sin\beta + G = 0$$

$$\Sigma M_0 = 0 : G\,l\cos\alpha + A\,2l\sin\alpha - B.2l\cos\alpha = 0$$

وبحلها ينتـج :

$$A = S\cos\beta$$

$$B = S\sin\beta + G$$

$$G\cos\alpha = 2S\sin(\alpha - \beta)$$

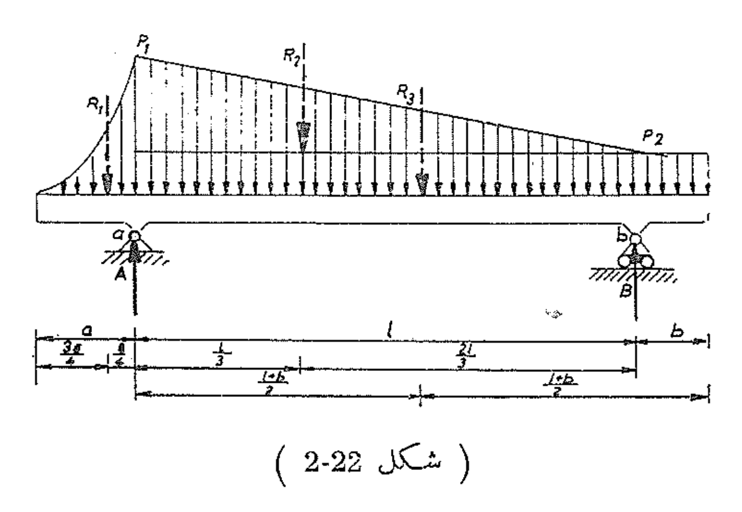
وبحل هذه العلاقات بالنسبة للمجاهيل A و B و S يتم الحصول على القيم المطلوبة :

$$S = \frac{G}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}\ ;\ A = \frac{G}{2}\,\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\ ;\ B = G + \frac{G}{2}\,\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

مثال 12 :

المعطى : جائز ممتد الاطراف (شكل 2.22) .

المطلوب : ايجاد ردود أفعال المساند بالطريقة التحليلية .



(شكل 2-22)

الحل : لتقسم الحمولة الموزعة الى مجموعة حمولات : حمولة على شكل مقطع مكافىء (حمولة مكافئية) وحمولة مثلثية وحمولة مستطيلة (حمولة موزعة بانتظام) ثم ليستعاض عن هذه الحمولات بمحصلاتها R_1 , R_2 , R_3 .

معادلة الحمولة الموزعة على شكل قطع مكافىء (الحمولة المكافئية) :

$$p(x) = p_1 \frac{x^2}{a^2}$$

ان محصلة هذه الحمولة هي :

$$R_1 = \int_0^a p(x)\,dx = p_1 \frac{a}{3}$$

اما مكان تأثيرها (تطبيقها) فيبعد :

$$x_0 = \frac{\int_0^a p(x)\,x\,dx}{\int_0^a p(x)\,dx} = \frac{\int_0^a p(x)x\,dx}{R_1} = \frac{3a}{4}$$

أما المحصلات R_2 , R_3 فتبلغ :

$$R_2 = \frac{p_1 - p_2}{2}\, l \ , \ R_3 = p_2\ (l+b)$$

وتؤثر على بعد $l/3$ و $(1/2)(l+b)$ من المسند a .

بسبب كون الجائز القضيبي مستقيم وبسبب تاثير حمولات شاقولية فقط ، لذلك ينعدم رد الفعل الافقي للمسند a $(A_H = 0)$ وبذلك لا ضرورة لتطبيق شرط توازن القوى الافقيـة . بتطبيـق ما تبقى من شروط التوازن ينتج :

$$\Sigma M_b = 0 : - A_v l + R_1 \left(\frac{a}{4} + l\right) + R_2 \frac{2l}{3} + R_3 \left(l - \frac{l+b}{2}\right) = 0$$

$$\Sigma V = 0 \quad : A_v + B_v - R_1 - R_2 - R_3 \qquad = 0$$

بحل هاتين المعادلتين يتم تعيين ردود افعال المساند المطلوبة :

$$A_v = \frac{l}{12}\left[p_1\left(4 + 4\,\frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2}\right) + 2p_2\left(1 - 3\,\frac{b^2}{l^2}\right)\right]$$

$$B_v = \frac{l}{12}\left[p_1\left(2 - \frac{a^2}{l^2}\right) + 2P_2\left(2 + 6\,\frac{b}{l} + 3\,\frac{b^2}{l^2}\right)\right]$$

التدقيق :

لتدقيق النتائج يطبق شرط توازن العزوم حول النقطة a :

$$\Sigma M_a = 0 \ : \ - B_v l - R_1 \frac{a}{4} + R_2 \frac{l}{3} + R_3 \frac{l+b}{2} = 0$$

مثال 13 :

المعطى : جائز مفصلي مركب مؤلف من ثمانية أجزاء (شكل 23-2) .

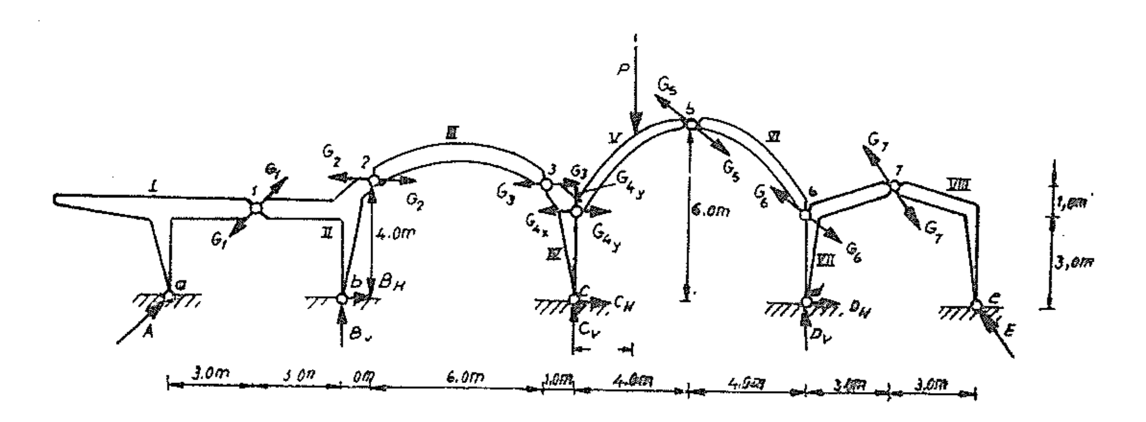
المطلوب : حساب ردود افعال المساند بالطريقة التحليلية .

الحل :

في البداية تثبت اتجاهات ردود أفعال المساند وقوى المفاصل (قوى التمفصل) .

بعد ذلك تطبق شروط التـوازن على الاقراص غـير المحملة والحاوية على مفصـلين (VIII , VI , III , I) والتي تعطي النتائج التالية :

$$A - G_1 = 0 \ ; G_2 - G_3 = 0 \ ; \ G_5 - G_6 = 0 \ ; \ G_7 - E = 0$$



شكل 2-23

بتطبيق شروط التوازن على القرص V (بعد فصله عن الجائز) ينتج :

$$\Sigma M_4 = 0 \quad : P.2{,}0 + G_5 \left(\frac{4}{5}\ 3{,}0 + \frac{3}{5}.4{,}5\right) = 0$$

$$\Sigma H = 0 \quad : \quad + G_5 \frac{4}{5} \qquad - G_{4H} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : \quad + G_5 \frac{3}{5} \qquad + G_{4v} - P = 0$$

من هذه العلاقات يتم الحصول على القوى التالية :

$$G_5 = G_6 = \frac{5}{12} P = 0{,}417 P$$

$$G_{4H} = \frac{1}{3} P \qquad = 0{,}333 P$$

$$G_{4v} = \frac{3}{4} P \qquad = 0{,}750 P$$

وبتطبيق شروط التـوازن على القرص VII (بعد فصـله عن الجائز) يتم الحصـول على المعادلات التالية :

$$\Sigma M_d = 0 : + G_6 \frac{4}{5}\ .3{,}0 - G_7 . \left(\frac{4}{5}\ .\ 3.0 + \frac{3}{5}.4{,}0\right) = 0$$

$$\Sigma H = 0 \ : \ - G_6 \frac{4}{5} + G_7 \frac{3}{5} \qquad - D_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : + G_6 \frac{3}{5} - G_7 \frac{4}{5} \qquad - D_v = 0$$

وبحلها يتم التوصل للقوى الآتية :

$$E = G_7 = \frac{1}{2} \quad G_6 = \frac{5}{24} P = 0,208 P$$

$$D_H = - \frac{5}{24} P = - 0,208 P$$

$$D_v = \frac{1}{12} P = 0,083 P$$

أما تطبيق شروط التوازن على القرص IV (بعد فصله من الجائز) :

$$\Sigma M_c = 0 : - G_3 .4,0 + G_{4H} . 3.0 = 0$$

$$\Sigma H = 0 : - G_3 + G_{4H} \qquad - C_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : \qquad G_{4v} - C_v = 0$$

فيعطي القوى التالية :

$$G_3 = G_2 = \frac{3}{4} \frac{P}{3} = \frac{1}{4} P = 0,250 P$$

$$C_H = - \frac{P}{4} + \frac{P}{3} = \frac{1}{12} P = 0,083 P$$

$$C_v = \frac{3}{4} P = 0,750 P$$

ويعطي تطبيق شروط التوازن على القرص II (بعد فصله عن الجائز) المعادلات التالية :

$$\Sigma M_b = 0 : + G_1 \sqrt{2} .3,0 - G_2 .4,0 \qquad = 0$$

$$\Sigma H = 0 : - G_1 \frac{1}{2} \sqrt{2} + G_2 \qquad - B_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : + G_1 \frac{1}{2} \sqrt{2} \qquad + B_v = 0$$

والتي تعطي بعد الحل القوى الآتية :

$$A = G_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} = 0{,}236\ P$$

$$B_H = \frac{1}{12}\ P = 0{,}083\ P$$

$$B_v = -\ \frac{1}{6}\ P = -\ 0{,}167\ P$$

التدقيق :

يؤكد تطبيق شروط التوازن على الجملة ككل صحة النتائج المحسوبة :

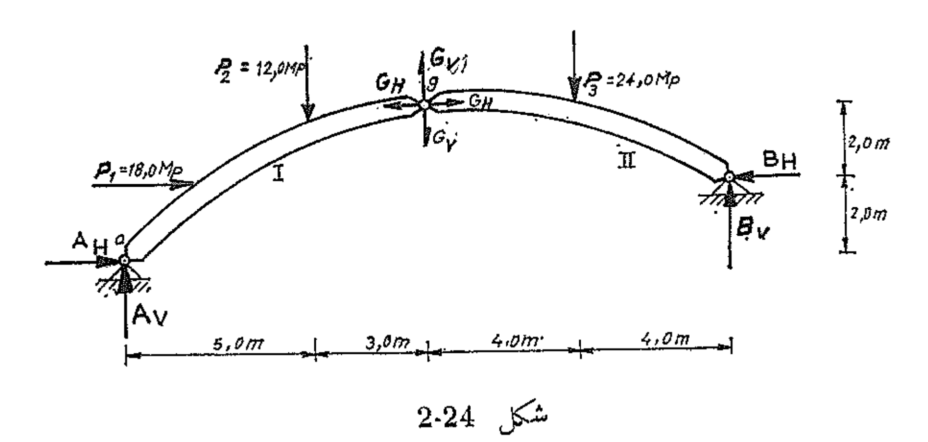
$$\Sigma V = 0 \quad : \quad A\ \frac{1}{2}\ \sqrt{2} + B_v + C_v + D_v + E\ \frac{4}{5} - P = 0$$

$$\Sigma H = 0 \quad : \quad A\ \frac{1}{2}\ \sqrt{2} + B_H + C_H + D_H - E\ \frac{3}{5} \qquad = 0$$

مثال 14 :

المعطى : قوس ثلاثي المفصل (شكل 2-24) .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند وقوى المفاصل .



شكل 2-24

الحل :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء I (بعد فصله عن الجائز) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \; : \; A_H - G_H + P_1 \quad = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; A_v + G_v - P_2 \quad = 0$$

$$\Sigma Mg = 0 \; : \; A_v \cdot 8{,}0 - A_H \cdot 4{,}0 - P_1 \cdot 2{,}0 - P_2 \cdot 3{,}0 = 0$$

أما تطبيق شروط التوازن على الجزء II (بعد فصله عن الجائز) فيعطي :

$$\Sigma H = 0 \; : \; -B_H + G_H \quad = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; B_v - G_v - P_3 \quad = 0$$

$$\Sigma M = 0 \; : \; B_v \cdot 8{,}0 - B_H \cdot 2{,}0 - P_3 \cdot 4{,}0 \quad = 0$$

بجمع شرطي توازن القوى الافقية وكذلك شرطي توازن القوى الشاقولية لكلا الجزئين تنتج المعادلات التالية :

$$A_H - B_H + P_1 \quad = 0$$

$$A_v + B_v - P_2 - P_3 = 0$$

لكن هاتين المعادلتين تمثلان شرطي توازن القوى الافقية والشاقولية على القوس ثلاثي المفصل ككل . وبالاضافة لشروط توازن العزوم تتشكل مجموعة مؤلفة من أربعة معادلات ذات أربع مجاهيل A_H , A_V , B_H , B_V . إن حل هذه المعادلات يعطي :

$$A_H = 14{,}0 \text{ Mp} \quad ; \quad B_H = 32{,}0 \text{ Mp}$$

$$A_v = 61{,}0 \text{ Mp} \quad ; \quad B_v = 20{,}0 \text{ Mp}$$

أما قوى المفاصل ، فيتم الحصول عليها بتبديل هـــذه القيمة في المعادلات الستـة السابقة ، وهي تبلغ :

$$G_H = B_H = 32{,}0 \text{ Mp} \quad ; \quad G_v = P_2 - A_v = -4{,}0 \text{ Mp}$$

التدقيـق :

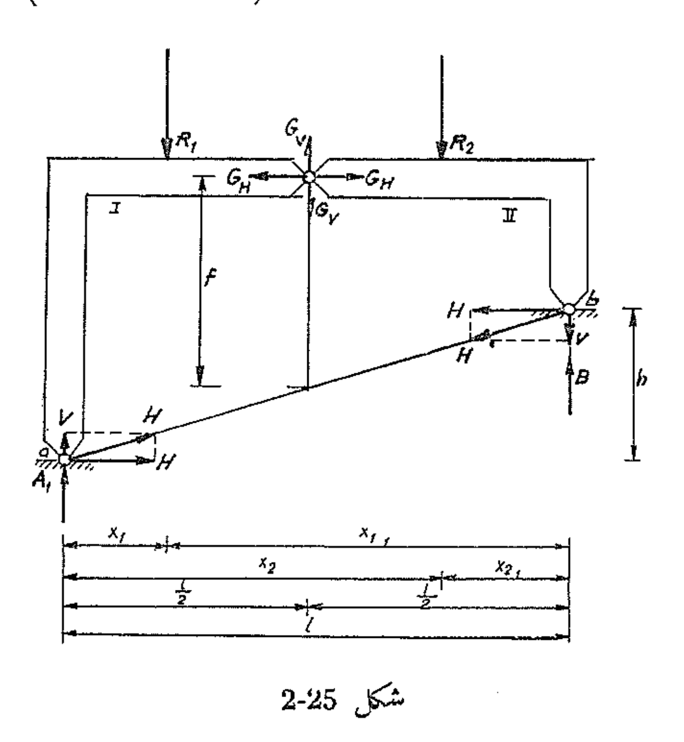
لتدقيق النتائج تطبق شروط توازن العزوم على الجملة ككل وحول مفاصـــل الدعم (مفاصل الاستناد) a , b :

$$\Sigma M_a = 0 \; : \; B_v \cdot 16{,}0 + B_H \cdot 2{,}0 - P_3 \cdot 12{,}0 - P_2 \cdot 5{,}0 - P_1 \cdot 2{,}0 = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 \; : \; A_v \cdot 16{,}0 - A_H \cdot 2{,}0 - P_2 \cdot 11{,}0 - P_3 \cdot 4{,}0 \quad = 0$$

مثـال 15 :

المعطى : إطارثلاثي المفصل (شكل 25-2) محمل بحمولتين وحيدتين (مركزتين)شاقوليتين R_1, R_2.
المطلوب : حساب ردود أفعال المساند وقوى المفاصل (بالطريقة التحليلية) .



شكل 25-2

الحـل :

في حالة تحميل إطار ثلاثي المفصل بحمولات شاقولية يفضل تحليل كل من ردي الفعل المتشكلة عند مفاصل الدعم (الأستناد) a , b الى مركبتين إحداهما بالاتجاه الشـــاقولي والاخرى على إستقامة الخط المستقيم الواصل بين مفصلي الدعم .

بتطبيق شرطي توازن العزوم على الجملة كـكل وحول كل من النقطتين a , b :

$$\Sigma M_b = 0 \; : \; A' l - R_1 x'_1 - R_2 x'_2 = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \; : \; B' l - R_1 x_1 - R_2 x_2 = 0$$

يتم الحصول على قيمة ردي الفعل الشاقوليين A',B' (والتي تـكافىء ردي الفعل التي تتشـكل في جائز قضيبي مستقيم طوله l) التالية :

$$A' = \frac{1}{l} (R_1 x'_1 + R_2 x'_2)$$

$$B' = \frac{1}{l} (R_1 x_1 + R_2 x_2)$$

بتطبيق شرط إنعدام العزم في المفصل بالنسبة للجزء القوسي الواقع على يسار المفصل :

$$M_{gl} = 0 : A' \frac{l}{2} - R' \left(\frac{l}{2} - x'\right) - H . f = 0$$

يتم الحصول على القوة الافقية :

$$H = \frac{1}{f} \left[A' \frac{l}{2} - R_1 \left(\frac{l}{2} - x\right)\right]$$

وبواسطتها ينتج :

$$V = H . tg\, \alpha = H . \frac{h}{l}$$

وبذلك تبلغ المركبة الشاقولية لقوى الدعم :

$$A_v = A' + V \quad , \quad B_v = B' - V$$

أما مركباتها الافقية فتساوي H، وأما قوة المفصل G فتبلغ :

$$G_H = H \quad ; \quad G_v = -A_v + R_1 = B_v - R_2$$

إن لايجاد قوى الدعم (ردود أفعال المساند) وقوى المفصل للقوس ثلاثي المفصل بهذه الطريقة فائدة ظاهرة بالنسبة لطريقة إيجاد ردود أفعال المساند في المثال السابق وهي أن هذه الطريقة لاتؤدي لتشكيل مجموعة معادلات ينبغي حلها للحصول على المطلوب .

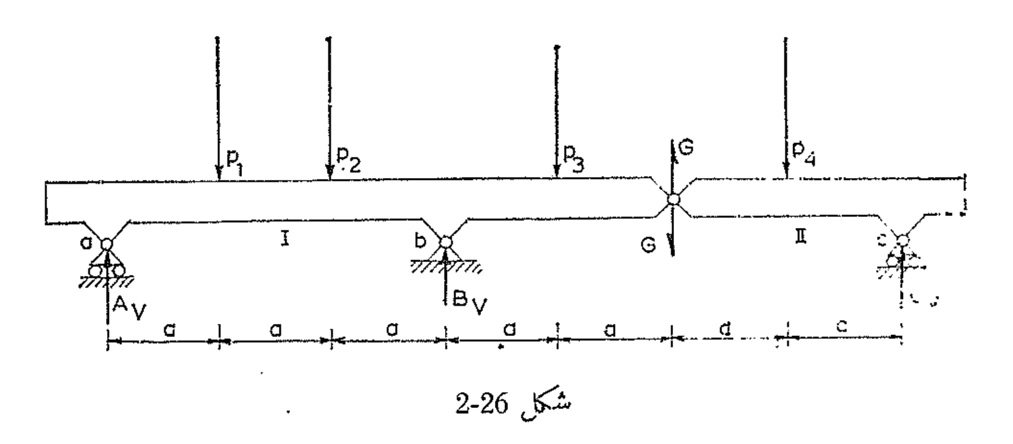
مثـال 16 :

المعطى : جائز مفصلي مستقيم (جائز جربر Gerberträger) (شكل 2-26) .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند .

الحـل :

إن تطبيق شرطي توازن العزوم على الجزء II (بعد فصله عن الجائز) :



شكل 2-26

$$\Sigma M_g = 0 : C . 2a - P_4 . a = 0$$

$$\Sigma M_c = 0 : G . 2a - P_4 . a = 0$$

يعطي :

$$C = G = \frac{1}{2} P_4$$

أما تطبيق شرطي توازن العزوم على الجزء I (بعد فصله عن الجائز) :

$$\Sigma M_b = 0 : A . 3a - P_1 . 2a - P_2 . a + P_3 . a + G . 2a = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : B . 3a - P_1 . a - P_2 . 2a - P_3 . 4a - G . 5a = 0$$

فيعطي القوى التالية :

$$A = \frac{1}{3} (2P_1 + P_2 - P_3 - P_4)$$

$$B = \frac{1}{3} (P_1 + 2P_2 + 4P_3 + 2{,}5 P_4)$$

التدقيـق :

بتطبيق شرط توازن القوى الشاقولية على الجملة كـكل :

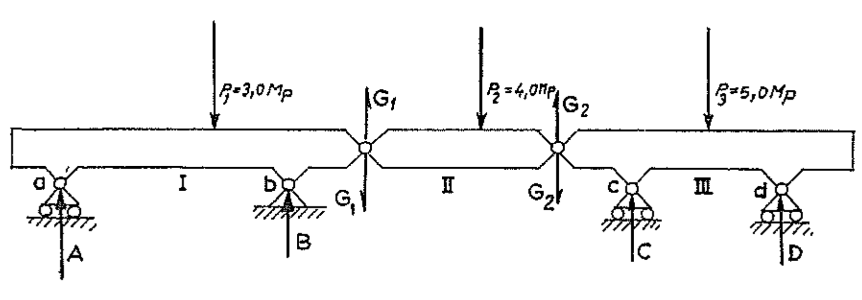
$$\Sigma V = 0 : A + B + C - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = 0$$

تتأكد صحة النتائج المحسوبة .

مثـال 17 :

المعطى : الجائز المفصلي المستقيم (جائز جربر) (شكل 2-27) .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند وقوى المفاصل .



شكل 2-27

الحـل :

سيتم الحساب ابتداء من الجزء الاوسط (الجزء II ، بعد فصله عن الجائز) .

بتطبيق شروط توازن العزوم :

$$\Sigma V_{g2} = 0 \quad : - G_1 \,.\, 2,5 + P_2 \,.\, 1,0 = 0$$

$$\Sigma M_{g1} = 0 \quad : - G_2 \,.\, 2,5 + P_2 \,.\, 1,5 = 0$$

يتم الحصول على قوى المفاصل :

$$G_1 = 1,600 \text{ Mp} \quad ; \quad G_2 = 2,400 \text{ Mp}$$

بتطبيق شروط التوازن على الجزء I (بعد فصله عن الجائز) :

$$\Sigma M_b = 0 \quad : \quad - A \,.\, 3,0 + P_1 \,.\, 1,0 - G_1 \,.\, 1,0 \quad = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \quad : \quad - B \,.\, 3,0 + P_1 \,.\, 2,0 + G_1 \,.\, 4,0 = 0$$

يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$A = 0,467 \text{ Mp} \quad , \quad B = 4.133 \text{ Mp}$$

وبتطبيق شروط التوازن على الجزء III (بعد فصله عن الجائز) :

$$\Sigma M_d = 0 \quad : - C \cdot 2{,}0 + P_3 \cdot 1{,}0 + G_2 \cdot 3{,}0 = 0$$

$$\Sigma M_c = 0 \quad : - D \cdot 2{,}0 + P_3 \cdot 1{,}0 - G_2 \cdot 1{,}0 = 0$$

يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$C = 6{,}100 \text{ Mp} \quad ; \quad D = 1{,}300 \text{ Mp}$$

التدقيـق :

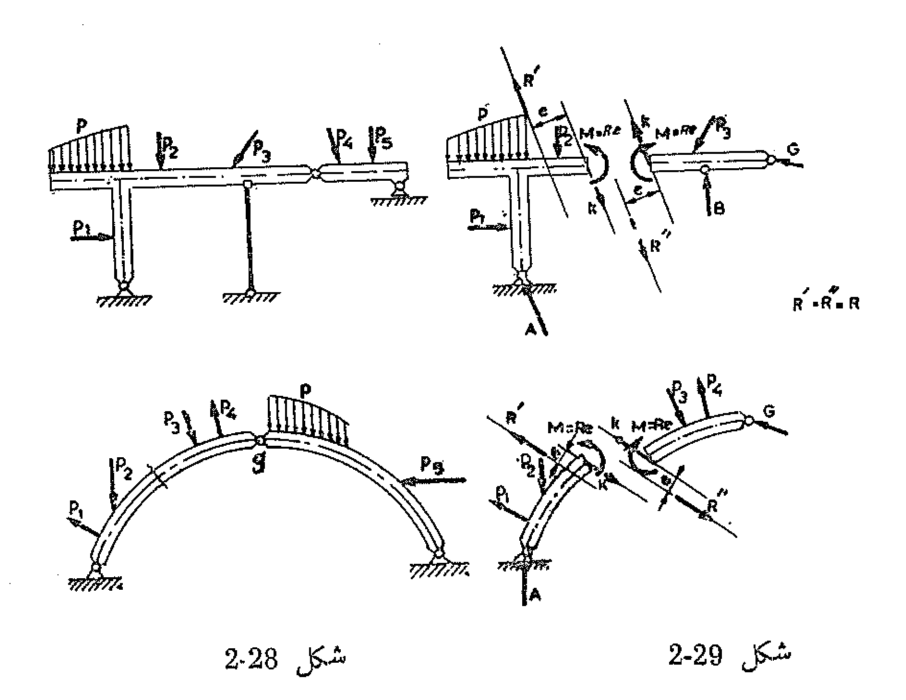
لتدقيق النتائج يطبق شرط توازن القوى الشاقولية على الجملة كسكل :

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad A + B + C + D - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

٢ ـ ٣ ردود أفعال القطع « قيم القطع » في الجائز المستقيم .

٢ ـ ٣ ـ ١ مبدأ القطع :

تنقل الحمولات الخارجيه التي تؤثر على الجسم الصلب الى المساند بواسطة القوى الداخليـة التي تسمى ردود أفعال القطع أو أيضاً قيم القطع .



شكل 2-28

شكل 2-29

لوصف نقل الحمولات داخل الجملة الحاملة القضيبية يقطع أحــد قضبان الجملة الحاملة (شكل 2-28) ، التي علمت ردود أفعال مساندها وقوى مفاصلها ، بواسطة قطع ناظمي (عمودي) على محور القضيب (شكل 2-29) وبذلك يضطرب التوازن في القضيب . ليستعاض عن الحمولات الخارجية (الحمولات المؤثرة وردود افعال المساند وقوى المفاصل) التي تؤثر على يمين وعلى يسار القطع بمحصلاتها R' و R'' (هذه القوى تتساوى بالقيمة وتتعاكس بالاتجاه وذلك لان القوى المؤثرة على القضيب تشكل مجموعة متوازنة) . لقد كانت الجملة قبل اجراء القطع في حالة توازن وتبقى بعد اجراء القطع ايضاً في حالة توازن ، لذلك ينبغي (بعد اجراء القطـع) أن تؤثر على كل ضفة من ضفاف القطع قوة القطع K وعزم القطع M والتي تعتبر كحمولات خارجيـة وذلك ليسود التوازن على الجملة بعد القطع ايضاً وبذلك تصلح ، من أجــل كلا الجزئين ، العلاقة التالية :

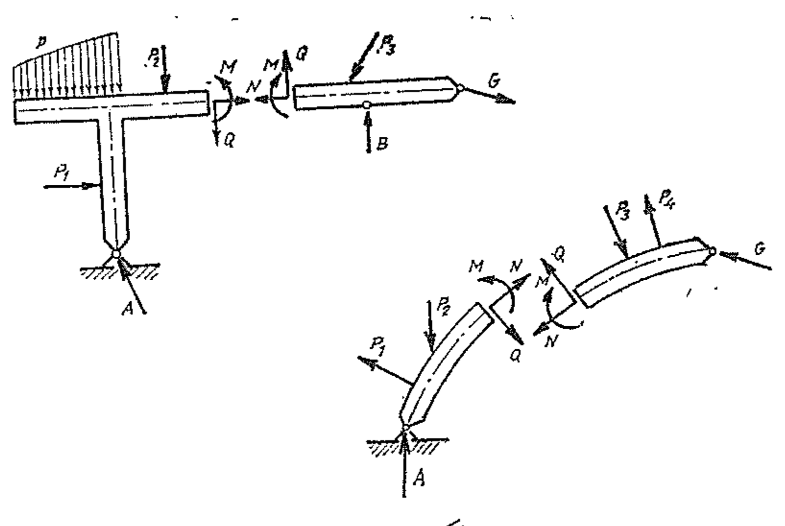
$$(R\ ,\ K\ ,\ M) = 0 \qquad (2\cdot1)$$

ليس لنقطة تأثير قوة القطع K في المقطع العرضي اية اهمية بالنسبة لتوازن الاجزاء الواقعة على يسار وعلى يمين القطع . لكن نظراً للاعتبارات التي ستتم دراستها في مقاومــة المواد يفضل إختيار مركز ثقل المقطع العرضي نقطة لتأثير القوة K . إذاً وبشكل عام يتم نقــل القوى الخارجية التي تؤثر على جملة حاملة قضيبية إلى نقاط الاستناد وداخل المقاطع العرضيـة لقضبان الجملة الحاملة ، بواسطة القوة K والعزم M . لتسهيل تعيين القوة K يفضل الاستعاضة عن هذه القوة بمركبتيها التي تتجه اولاها باتجاه محور القضيب (باتجاه المحور x) وثانيها بالاتجاه الناظمي (العمودي) عليه (باتجاه المحور z) .

تسمى المركبة باتجاه محور القضيب **بالقوة الناظمية** (القوة الطولية) ويرمز لها بالحرف N كما تسمى المركبة بالاتجاه الناظمي (العمودي) على محور القضيب **بالقوة العرضية** ويرمز لها بالحرف Q . أما العزم فيسمى **بعزم الانعطاف** (وذلك للعلاقـة التي تربط بين العزم المذكور وبـين انعطاف القضيب المرن) . تسمى القوة الناظمية والقوة العرضيـة وعزم الانعطاف مجتمعة **بقيم القطع** وهي تتغير بشكل عام من قطع لقطع آخر .

ففي حالة إجراء قطع في مكان ما من الجملة الحاملة القضيبية ، عندئـذ تتشكل في مكان القطع نتيجة لوجود القوى الداخلية ما تسمى بقيم القطع والتي يجب أن تحقـق مع القوى الخارجيـة التي تؤثر على الجزء المقطوع من الجائز حالة التوزن كما ويجب ايضاً أن تحقــق قيم القطع الموجودة في الضفة اليمنى مع قيم القطع الموجودة في الضفة اليسرى حاله التوازن (اذا توازن

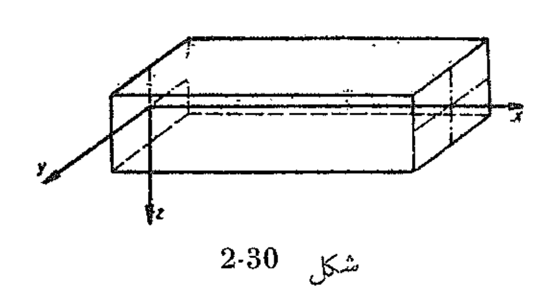
جسم صلب تحت تأثير مجموعة من الحمولات فان كل جزء من اجزاءه يتوازن تحت تأثير الحمولات التي تؤثر على ذلك الجزء) (شكل 2-29 b) .



شكل 2-29 b

لتوحيد اتجاه قيم القطع في كل ما يلي من الدراسات سوف تثبت مجموعة المحاور الاحداثية z,y,x ، فبفضلها يتم تثبيت اتجاه قيم القطع .

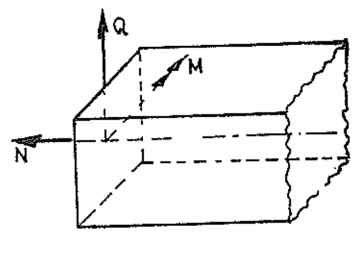
عادة يثبت الاحداثي x بحيث ينطبق على محور القضيب ويثبت الاحداثي z بحيث ينطبق على الاتجاه العمودي على محور القضيب فيشير الى أسفل القضيب أو أعلاه أما الاحداثي y فيثبت بالاتجاه العمودي على كل من الاحداثيين x , z فيشير الى خارج أو داخل مستوي الرسم (بتثبيت اتجاه احداثيين يثبت بشكل قسري اتجاه الاحداثي الثالث وذلك لتشكيلها مجموعة يمينية فمثلا يشير الاحداثي x الى اتجاه ابهام اليد اليمنى والاحداثي y الى اتجاه السبابة والاحداثي z الى اتجاه الأصبع الوسطى) (شكل 2-30) .

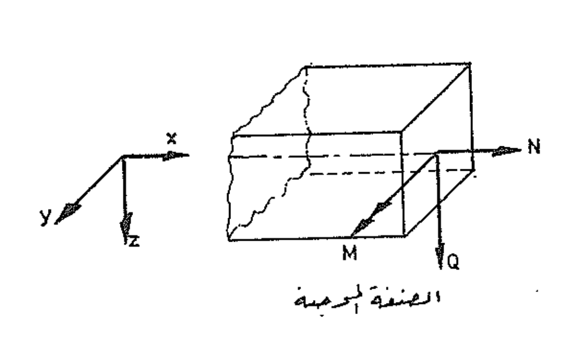


شكل 2-30

تسمى بعد اجراء القطع ، الضفة التي يخرج منها أحد الاحداثيات الموجبة (في الجمل القضيبية

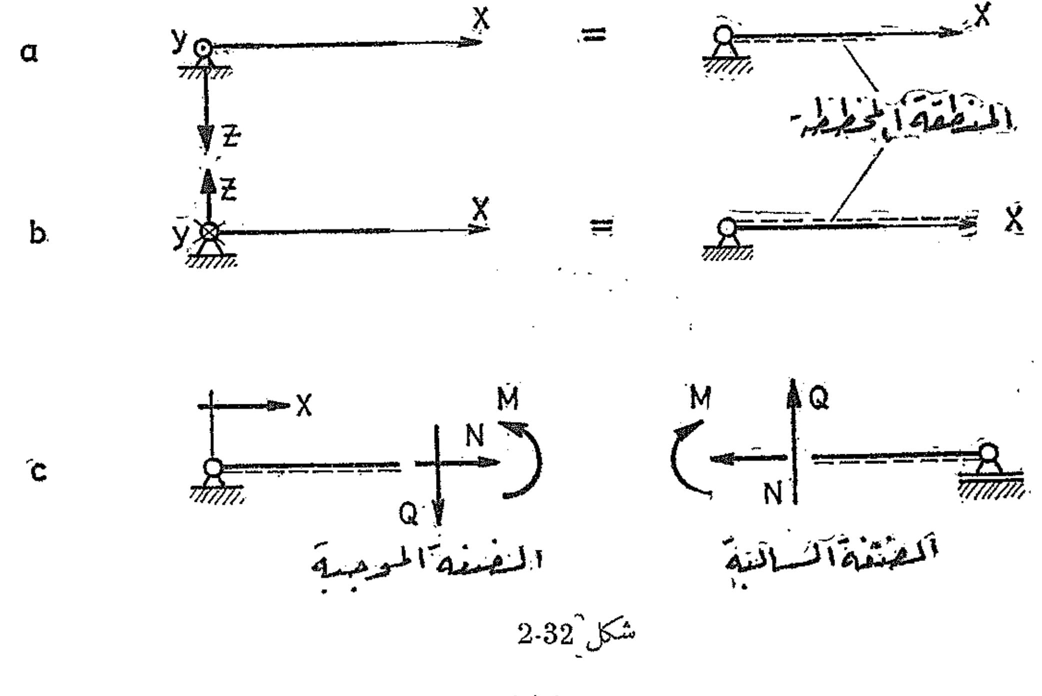
المستوية ، الاحداثي x) **بالصفه الموجبة** والضفة التي يدخل فيها احد الاحداثيات الموجبة (في الجمل القضيبية المستوية الاحداثي x) **بالضفة السالبة** . بعـد كل هذا يعرف اتجاه قيم القطع (ردود أفعال القطع) بأنه موجب عندما يأخذ في الضفة الموجبة إتجاه مجموعة المحاور الاحداثية وفي الضفة السالبة عندما يكون بعكس اتجاه المحاور الاحداثية الموجبة (شكل 2-31)





شكل 2-31

في الجمل المستوية ، يصعب رسم مجموعة الاحداثيات x , y , z . وبما أنه يكفي ، لتحديـد اتجاه الاحداثيات ، تثبيت اتجاه احداثيين منها فقط لذلك يكتفى برسم الاحداثي x (الذي ينطبق على محور القضيب) والاحداثي z العمودي عليه . وتفادياً للوقوع في الخطأ وحتى لا يعتبر الاحداثي z كقوة (لان أغلب القوى هي عمودية على المحور الاوسط) لذلك يستعاض عن التمثيل الشعاعي للاحداثي z بمنطقة مخططة يحدد مكانها اتجاه الاحداثي z (شكل 2-32)



شكل 2-32

لصعوبة رسم عزم الانعطاف M في الجمل المستوية ، بشكله الشعاعي ذو السهـم المزدوج الذي ينطبق حامله على اتجـاه المحور y العمودي على مستوي الرسم ، لذلك يستعاض عن الدلالة الشعاعية (ذات السهم المزدوج) بالرمز المنحني الذي يحمل في رأسه سهماً يشير الى اتجـاه العزم . للحصول على تطابق بين الرمزين ، الشعاعي والمنحني ، توضع رؤوس اصابع اليد اليمنى باتجاه سهم منحني العزم ثم تدور بنفس دوران السهم عندئذ يشير رأس الابهام الى اتجاه شعاع العزم (شكل 2-33)

يعرف اتجاه العزم الموجب في الضفة الموجبة والضفة السالبة ، حسب الطريقة الجديـدة للتعبير عن الاحداثيات ، بأنه العزم الذي يشد المنطقـة المخططـة متجهاً عن أقرب طريق الى محـور



شكل 2-33

القضيب ماراً بمكان القطع (المنطقة غير المخططة) (شكل 2-32).

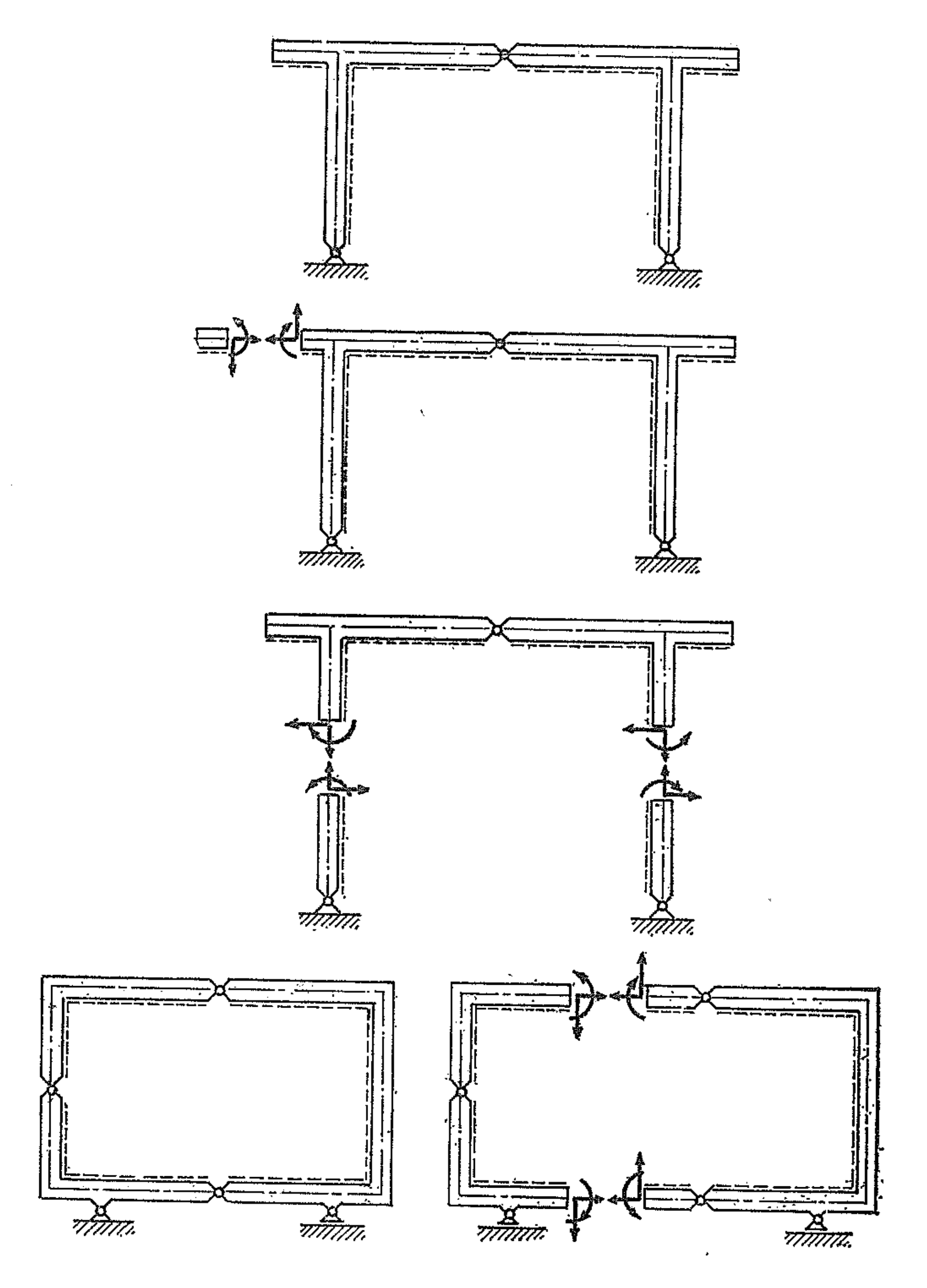
لقد تم في الشكل 3-33b تمثيل قيم القطع لبعض الجمل الانشائية .

٢ ـ ٣ ـ ٢ توزيع قيم القطع (ردود افعال القطع)

بتصور الجزء المقطوع من الجائز والممثل في الشكل (2-34) يظهر تغير قيم القطع (ردود أفعال القطع) بتغير الاحداثي x وهذا يعني أن القوة الناظمية (القوة الطولية أو ما تسمى أيضاً بالقوة المحورية) والقوة العرضية وعزم الانعطاف هم توابع للاحداثي x .

أثناء ايجاد ردود أفعال القطع يمكن اعتبار منطقة القطع كمكان للوثاقة ومن ثم حساب القيم المجهولة بتطبيق شروط التوازن ، بواسطة التكامل يتم ايجاد أجزاء قيم القطع (ردود افعال القطع) الناتجة عن تأثير الحمولات الموزعة q (x) . أما حدود التكامل فهي من 0 حتى x . باجراء إدخال المتغير الجديد ع يتم الحصول على قيم القطع (ردود أفعال القطع) :

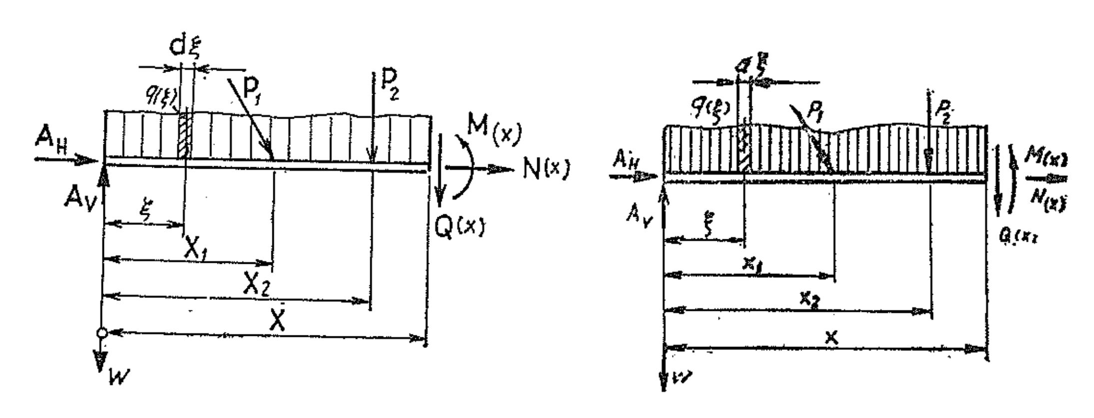
1. $\Sigma H = 0 \; : \; N(x) = - A_H - \Sigma P_{ix}$ (2.2)



شکل 2-33b

$$2. \quad \Sigma V = 0 \quad : \quad Q(x) = + A_V - \Sigma P_{iz} - \int_0^x q(\xi)\, d\xi \qquad (2\text{-}3)$$

$$3. \quad \Sigma M_x = 0 \quad : \quad M(x) = A_v \cdot x - \Sigma (x - x_i) P_{iz} - \int_0^x (x-\xi) q(\xi) d\xi \qquad (2.4)$$



شكل 2-34

بالقاء نظرة على المعادلات (2-2) حتى (2-4) يثبت ان قيم القطع تشير الى عـــدم استمرار في الامكنة التي تؤثر فيها قوى وحيدة (قوى مركزة) وفي الامكنة التي تتغير فيها الحمولات الموزعة تغيراً فجائياً بشكل قفزة (على شكل ازلاق) . ولذلك ينبغي تقسيم الجائز الى مجالات تحددها امكنة عدم الاستمرار (في الجيزان المستقيمة عدم استمرار الحمولات بما فيه الحمولات الوحيدة وفي الجيزان المضلعة علاوة على ذلك امكنة التغير المفاجىء للمحور الاوسط) . هناك امكانية اختيار عدة احداثيات x_i يحدد الاحداثي الواحد منها مجالا واحداً فقط ويبتـــدأ في نقطة ابتداء المجال كما ان هناك امكانية اخرى الا وهي اختيار احداثي x مستمر ووحيد لكل المجالات ، بدايته بداية المجال الاول ونهايته نهاية المجال الاخير . يقسم هذا الاحداثي الى حدود تحدد بداية ونهاية المجال الواحد . بذلك يتحدد عدد المجالات بما يلي :

١ ـ تطبيق حمولات وحيدة (قوى او عزوم) بما فيها ردود افعال المساند .

٢ ـ التغير المفاجىء للحمولات الموزعة (مثلا على شكل قفزة اي ازلاق) .

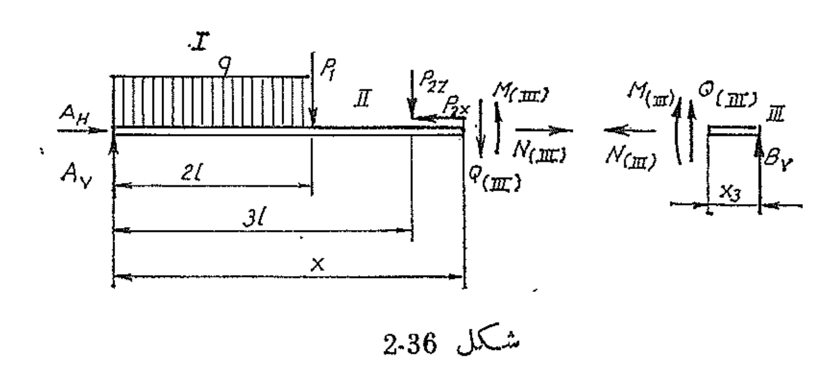
٣ ـ عدم استمرار تابع الحمولة الموزعة (فقدان تابع الحمولة الموزعة استمراره) .

٤ ـ التغير المفاجىء للشكل الهندسي سواء بوجود عقدة صلبة او بوجود عقدة مفصلية .

(لا يغير وجود المفصل الذي يفصل بين قضيبين تقع على استقامة واحدة من عدد المجالات)

يشير ايجاد قيم القطع (ردود افعال القطع) للجائز الممثل في الشكل (2-36) والذي يبلغ طوله

4l الى ان اختيار احداثي x مستمر هو غير مناسب ويفضل عنه اختيار احداثي x_i لكل مجال (للمجال الواحد) .



شكل 2-36

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر من المجال III للجائز الممثل في الشكل 2-37 العلاقات التالية :

1. $\Sigma H = 0 \;:\; N_{III}(x) = -A_H + P_{2x}$

2. $\Sigma V = 0 \;:\; Q_{III}(x) = A_v - 2\,l\,q - P_1 - P_{2z}$

3. $\Sigma M_x = 0 :\; M_{III}(x) = A_v \,.\, x - (x - l)\,.\,2\,lq - (x - 2\,l)\,P_1 - (x - 3\,l)P_{2z}$

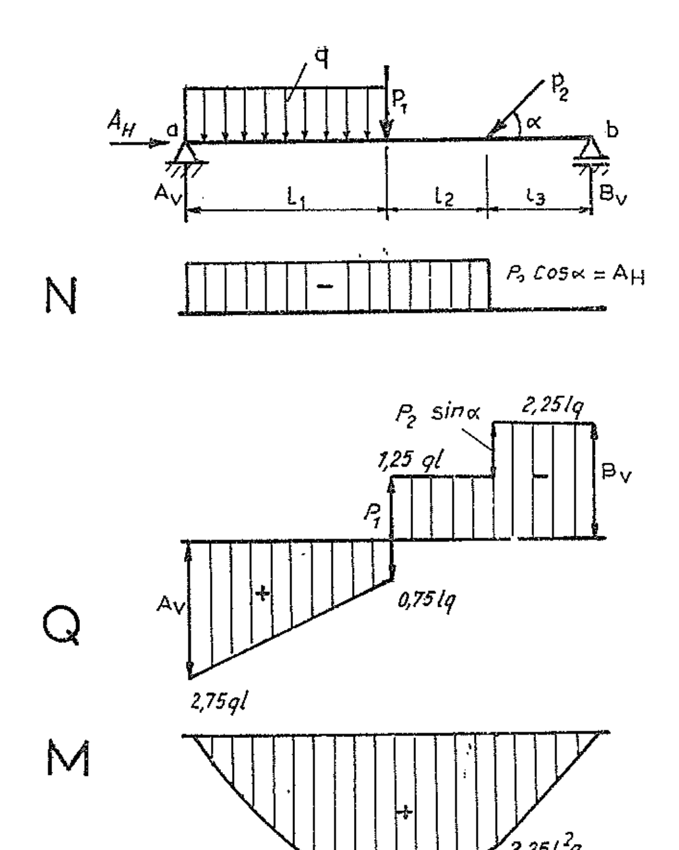
أما تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن من نفس المجال فيعطي العلاقات التالية :

1. $\Sigma H = 0 \;:\; N_{III}(x_3) = 0$

2. $\Sigma V = 0 \;:\; Q_{III}(x_3) = -B_v$

3. $\Sigma M_{x3} = 0 :\; M_{III}(x_3) = B_v \,.\, x_3$

هناك لاستعمال الاحداثي المستمر بعض المنافع تظهر في بعض مشاكل مقاومة المواد على سبيل المثال اثناء ايجاد خط الانعطاف (الخط المرن) . لاتعطي قيم القطع (ردود افعال القطع) ، المحسوبة كتابع سواء للاحداثي x او للاحداثي x_3 أية صورة ايضاحية ولذلك يفضل رسم التوابع تخطيطياً . بأخذ القيم $P_1 = 2P$ و $P_{2x} = P_{2z} = P$ و $P = q\,l$ بعين الاعتبار يمكن الحصول على ردود افعال القطع (قيم القطع) لمجالات الجائز الثلاثة (I , II , III) والممثلة في الشكل (2-37) .



شـكل 37-2

مثال 18 :

المعطى : الجائز البسيط الممثل فى الشـكل (38-2) والمحمل بحمولة موزعة بانتظام شدتها q_0 .

المطلوب : تعيين قيم القطع باستخدام طريقة القطع .

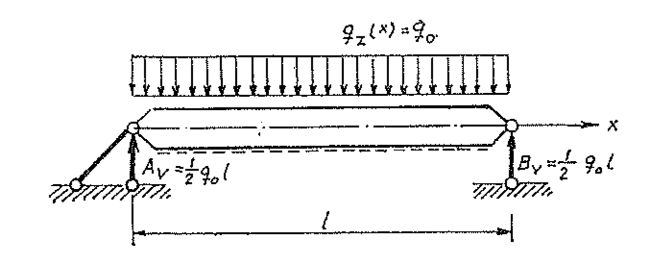
الحل :

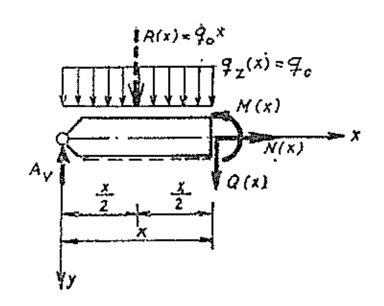
تحسب في البداية ردود افعال المساند وذلك بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل :

$$\Sigma M_b = 0 \quad : \quad A_v = \frac{q_0\, l}{2}$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad B_v = \frac{q_0\, l}{2}$$

(الجملة متناظرة هندسياً بالنسبة للحمولات الشاقولية لذلك فان من البديهي أن تتساوى ردود أفعال المساند B_v,A_v) .





شكل 2-38

بقطع الجائز في النقطة x (شكل 2-38) ثم بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايسر (لقد كان بالامكان تطبيق شروط التوازن على الجزء والنتيجة لاتتغير) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \;:\; N(x) = 0$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; A_v - R(x) - Q(x) = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 :\; A_v \, . \, x - R(x)\frac{x}{z} - M(x) = 0$$

حيث ان $R(x) = q_0\, x$ وهي محصلة القوى الموزعة على طول الجزء x .

من العلاقات السابقة وبعد الاستعاضة عن محصلة القوى الموزعة بما يساويها ، يتم الحصول على قيم القطع المطلوبة :

$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = \frac{q_0 l}{2}\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)$$

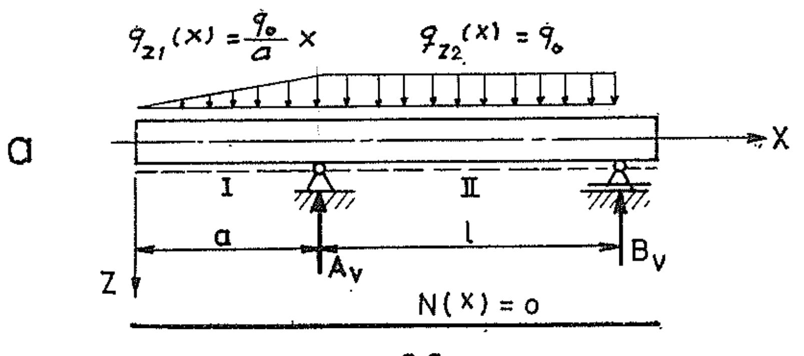
$$M(x) = \frac{q_0\, l^2}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

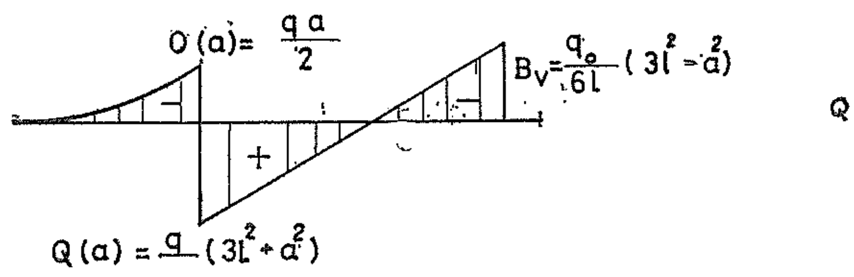
سيتم فيما بعد وبطريقة العلاقات التفاضليه تعيين نفس المعادلات .

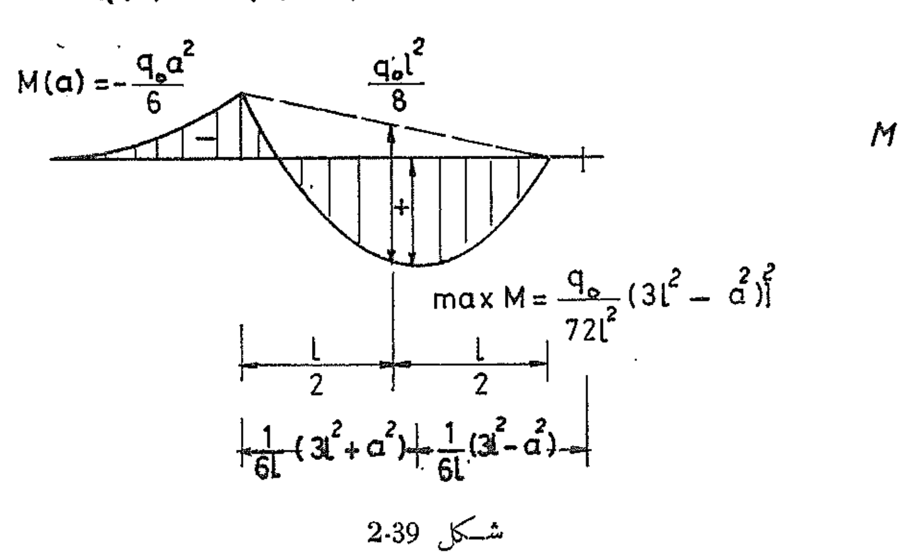
ملاحظة : بعد اجراء القطع ينصح بدراسة الجزء الذي تؤثر عليه حمولات أقل (الجزء الاقل تحميلاً) ، كما ينصح بانشاء مخطط Q اولا ثم مخطط M .

مثال 19 :

حمل جائز بسيط ممتد الاطراف كما في الشكل (2-39a) .







شكل 2.39

المطلوب : تعيين قيم القطع .

الحل :

في البداية تحسب ردود انعال المساند وذلك بتطبيق شروط التوازن :

$$\Sigma M_b = 0 \ : \ A_v = \frac{q_0}{6\,l}(3\,l^2 + 3\,al + a^2)$$

$$\Sigma V = 0 \ : \ B_v = \frac{q_0}{6\,l}(3\,l^2 - a^2)$$

بعد ذلك تحدد المجالات . في هذا المثال يبلغ عددها مجالين .

المجال I $(0 \leqq x \leqq a)$:

باقتطاع عنصر قضيبي من الجـزء الممتـد للجائز (شكل 2-40) ثم بتطبيـق شروط التوازن عليه ينتج :

$$\Sigma H = 0 \ : \ N(x) = 0$$

$$\Sigma V = 0 \ : \ -R_1(x) - Q(x) = 0$$

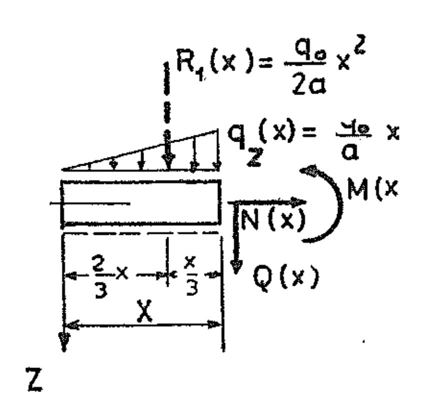
$$\Sigma M_x = 0 : \ -R_1(x)\frac{x}{3} - M(x) = 0$$

أما قيم القطع فيتم الحصول عليها بعد تبديل x^2 $R_1 = \frac{q_0}{2a}$:

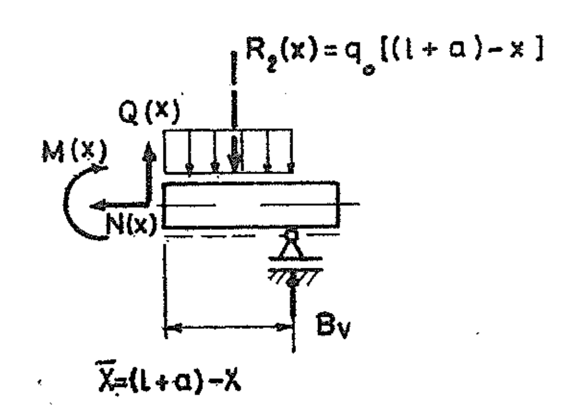
$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = -\frac{q_0}{2a}x^2$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{6a}x^3$$



شـكل 2-40



شكل 2-41

المجال II $(a \leqq x \leqq l+a)$:

بتطبيق شروط التوازن على الشكل (2-41) ينتج :

$$= 0$$

$$\Sigma H = 0 \quad : \quad N(x) \qquad = 0$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad Q(x) + B_v - R_2 \; (x) \qquad = 0$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad Q(x) - B_v \, [(l + a) - x] + R_2 (x) \; \frac{(l + a) - x}{2} \qquad = 0$$

من هذه العلاقات يتم ، بعد تبديل $R_2(x) = q_0 [(l+a) - x]$ ، الحصول على قيم القطع المطلوبة:

$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = \frac{q_0 l^2}{6 l} + \frac{q_0 l}{2} \left(1 - 2 \frac{x - a}{l} \right)$$

$$M(x) = - \frac{q_0 a^2}{6} + \frac{q_0 a^2}{6} \; \frac{x - l}{l} + \frac{q_0 l^2}{2} \left[\frac{x - a}{l} - \frac{(x - a)^2}{l^2} \right]$$

لقد تم في الشكل (2.39) رسم مخططات نيم القطع . ففي المكان الذي تنعدم فيه القوة العرضية يأخذ عزم الانعطاف قيمة أعظمية وهي تبلغ هناك :

$$x_0 = \frac{1}{6 l} (3 \, l^2 + a^2)$$

$$\max \; M = M(x = x_0) = \frac{q_0}{72 \, l^2} \; (3 l^2 - a^2)^2$$

لتدقيق النتائج تساعدنا القيم المعلومة للقوة العرضية وعزم الانعطاف في النقطة $x = a + l$ حيث ينبغي لها ان تكون $Q = (a+l) = -B$ و $M(a+l) = 0$.

يراعى اثناء رسم اشكال القوى العرضية وعزوم الانعطاف ما يلي :

١ – تهشر (تظلل) هذه الاشكال (المخططات) بخطوط شاقولية يحدد اتجاهها طريقة قياس احداثيات الشكل . وتكون خطوط التهشير هذه خفيفة رقيقة بقدر الامكان . ويجوز التحكم في نظام توزيعها بحيث تفيض على الشكل رونقاً وتزيده وضوحا .

٢ – يكون خط القاعدة (خط النسب) في الشكل أكثر الخطوط وضوحا ويقل عنه في ذلك ولو بدرجة يسيرة ، الخط الذي يحدد معادلة الشكل .

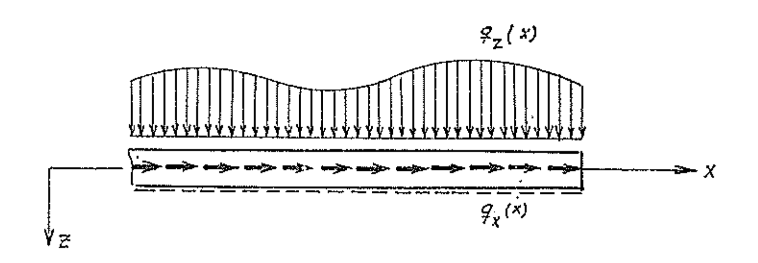
٣ – تعطى قيم الاحداثيات الهامة في الشكل على الرسم . وقد يكون من المناسب ايضاً كتابة المعادلة التي تحدد العلاقة الموضحة للشكل على ان يظهر موضع القطع (s - s) وطريقة قياس البعد x الذي يتعين به القطع وذلك في الجائز المرسوم في الجزء العلوي .

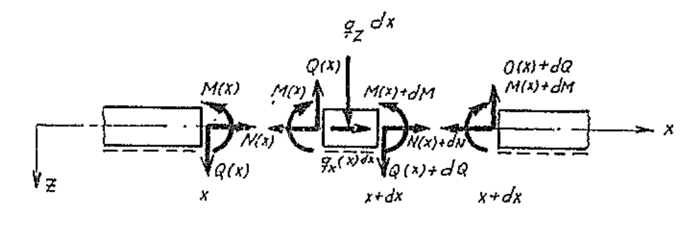
٤ ـ يجب ان يحدد لكل شكل مقياس رسم الشكل ولم يظهر مقياس الرسم في هذا المثال لان القيم العددية للحمولة q_0 والطول l لم تعطى في هده الحالة .

٢ ـ٣ـ٣ العلاقات التفاضلية التي تربط بين الحمولات الموزعة وبين قيم القطع في القضيب المستقيم

بعد أن يتم ايجاد ردود أفعال المساند يمكن ايجاد قيم القطع في الجمل الحاملة المقررة وغير المقررة ستاتيكياً وذلك بتطبيق شروط التوازن على عنصر طولي تفاضلي (قطعة صغيرة قدر الامكان) يقتطع من القضيب المدروس (يتم اجراء القطع لجعل قيم القطع في القضيب مرئية) .

بعد اقتطاع عنصر طولي تفاضلي من جملة حاملة مقررة أو غير مقررة ستاتيكياً ومحملة بحمولة شاقوليه $q_z(x)$ وبحمولة افقيه $q_x(x)$ (الحمولات $q_z(x)$ و $q_x(x)$ هي حمولات موزعة)، ترسم ردود أفعال القطع (قيم القطع) الموجبه (وذلك حسب تعريفها الذي تم سابقاً) على ضفتي القطع ، فمثلا على ضفتي القطع العائدة لعنصر قضيبي مستقيم ، قيم القطع الممثلة في الشكل (2-42) .





شكل 2-42

بالافتراض ان القوة الناظميه والقوة العرضية وكذلك عزم الانعطاف هي توابع قابلة للاشتقاق باستمرار عندئذ تؤثر على ضفة القطع const=x قيم القطع التالية :

$$N(x) \quad , \quad Q(x) \quad , \quad M(x)$$

كما وتؤثر على ضفة القطع x+dx=const. قيم القطع الاتية :

$$N(x + dx) = N(x) + \frac{dN}{dx} dx = N(x) + dN$$

$$Q(x + dx) = Q(x) + \frac{dQ}{dx} dx = Q(x) + dQ$$

$$M(x + dx) = M(x) + \frac{dM}{dx} dx = M(x) + dM$$

لقد اهملت في منشورات تايلور (Taylor-Entwicklung) حدود المرتبة الثانيةوبقية الحدود ذات المراتب الاعلى (الحدود اللاخطية) لصغرها .

نتيجة لتأثير الحمولات الخطية (خطية التوزيع) $q_z(x)$, $q_x(x)$ على القضيب ، بذلك تؤثر على العنصر القضيبي المقطوع ، الحمولات الوحيدة $q_x dx$ (قوة تؤثر باتجاه محور القضيب او بالاحرى باتجاه المحور x وتطبق في مركز ثقل العنصر القضيبي) و $q_z dx$ (قوة وحيدة تؤثر بالاتجاه العمودي على محور القضيب او بالاحرى باتجاه المحور z وتطبق في مركز ثقل العنصر القضيبي) .

لازالة اضطراب التوازن الذي تشكل نتيجة لاجراء القطع ينبغي ان تحقق الحمولات التي تؤثر على العنصر مع قيم القطع التي تؤثر على ضفتي العنصر شروط التوازن . فبتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 : \quad - N(x) + N(x) + dN + q_x(x)\,dx = 0$$

$$\Sigma V = 0 : \quad - Q(x) + Q(x) + dQ + q_z(x)\,dx = 0$$

$$\Sigma M_{x+dx} = 0 : \quad Q(x)\,dx - M(x) + dM + q_z(x)\,dx\,\frac{dx}{2} = 0$$

ان الحد الاخير من المعادلة الاخيرة هو حد لاخطي (حد من المرتبة الثانية) ويمكن اهماله لصغره (تهمل نظرية المرتبة الاولى التي تستخدم في هذه الفصول كل الحدود اللاخطية) وبذلك تعطي شروط التوازن العلاقات التالية :

$$\frac{dN}{dx} = - q_x(x) \qquad (2.6\,a)$$

$$\frac{dQ}{dx} = - q_z(x) \qquad (2.6\,b)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \qquad (2.6\,c)$$

يتم إيجاد القوة الطولية $N(x)$ عدا عن الثابت k بمكاملة العلاقة $(2\text{-}6\,a)$ وذلك كما يلي :

$$N(x) = - \int q_x(x)\,dx + k \qquad (2.7)$$

اما عزم الانعطاف $M(x)$ فيتم الحصول عليه باختزال Q من العلاقتين $(2\text{-}6\,b)$ و $(2\text{-}6\,c)$.
باشتقاق العلاقة $(2\text{-}6\,b)$ بالنسبة للمتغير x ينتج :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx}$$

وبتعويض العلاقة $(2\text{-}6\,a)$ في العلاقة الاخيرة يتم الحصول على معادلة تفاضلية من اجل عزم الانعطاف :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = - q_z(x) \qquad (2\text{-}8)$$

باجراء مكاملة مضاعفة يتم الحصول على القوه العرضية وعزم الانعطاف،عدا عن ثوابت التكامل C_2 و C_1 ، كتوابع للاحداثي x .

القوة العرضية :

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) = - \int q_z(x)\,dx + C_1 \qquad (2.9)$$

عزم الانعطاف :

$$M(x) = - \int dx \int q_z(x)\,dx + C_1 x + C_2 \qquad (2.10)$$

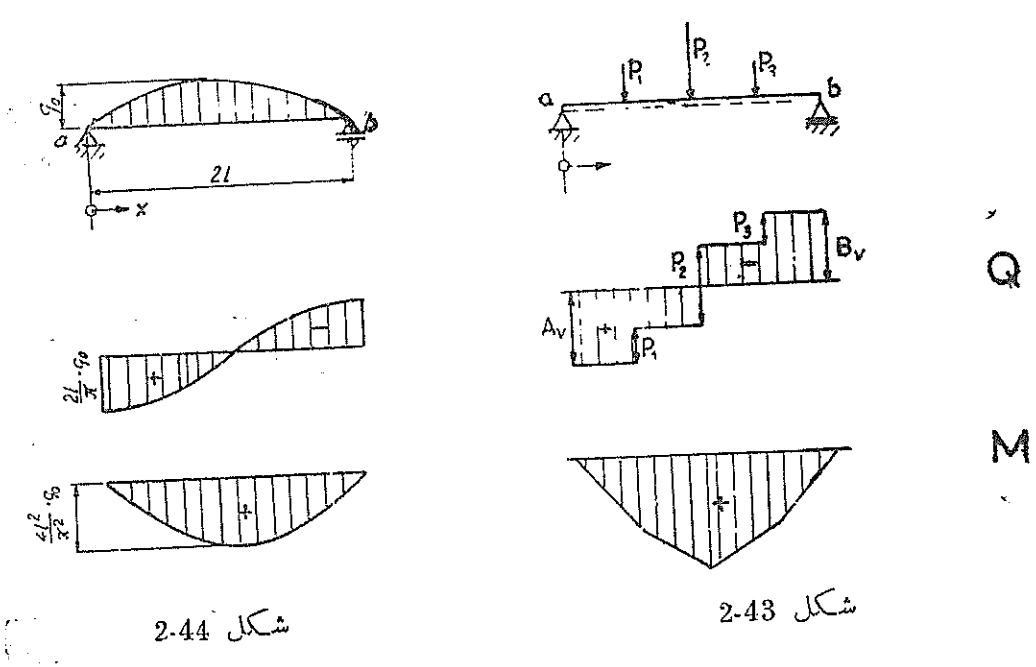
بامعان النظر في العلاقات $(2\text{-}6)$ و $(2\text{-}8)$ تستخلص النتائج الاساسية التالية :

١ ـ شدة الحمولة الافقية الموزعة $q_x(x)$ تساوي القيمة السالبة لمشتق القوة الناظمية وهذا يشير الى ان شدة الحمولة الافقية الموزعة تساوي هندسياً ظل الزاوية المحصورة بين المحور x والمماس لمخطط القوة الناظمية .

يمكن ايجاد القوة الناظمية لقضيب مستقيم بشكل غير مباشر من الحمولة $q_x(x)$ وذلك بمكاملة شرط توازن القوى بالاتجاه الافقي الممثل في العلاقة $(2\text{-}7)$.

٢ – القوة العرضية $Q(x)$ هي مشتق عزم الانعطاف $M(x)$ بالنسبة للمحور x . هذا يشير الى ان القوة العرضية Q تساوي هندسياً ظل الزاوية المحصورة بين المماس لمخطط عزم الانعطاف في القطع المدروس وبين المحور x (يعطي مخطط القوة العرضية ميل مخطط عزم الانعطاف) . اما شدة الحمولة الموزعة $q_z(x)$ فتساوي هندسياً ظل الزاوية الواقعة بين المحور x والمماس لمخطط القوة العرضية .

٣ – حيثما تنعدم القوة العرضية يكون لعزم الانعطاف قيمة حدية وحيثما تنزلق (تقفز) القوة العرضية مارة بالصفر يفقد مخطط عزم الانعطاف استمراره وازدياده (شكل 2-44) .



شكل 2-44

شكل 2-43

٤ – حيثما يحتوي مخطط القوة العرضية على قفزة (ازلاق) لا تمر من الصفر فان مخطط عزم الانعطاف يتعرض لانكسار (شكل 2-44) .

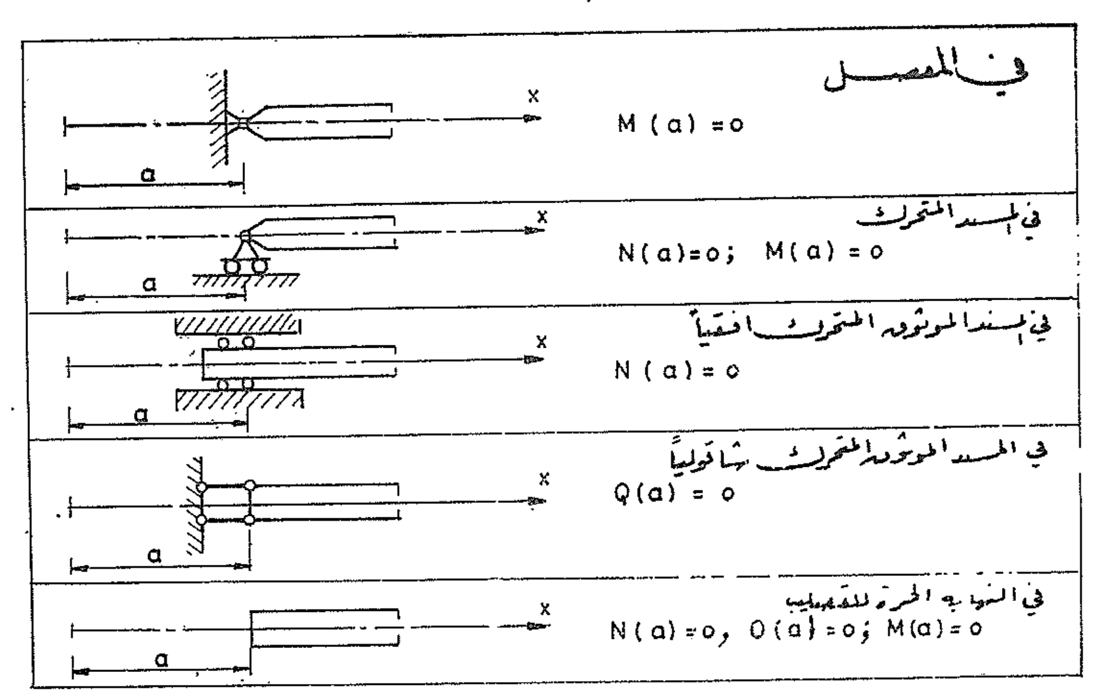
٥ – اذا كانت توابع تغير الحمولة الموزعة توابع جبرية فدرجة تابع القوة العرضية على كل مجال من الجائز (الحامل) أعلى بدرجة واحدة من تابع الحمولة الموزعة على هذا المجال من الجائز اما درجة تابع عزم الانعطاف فأعلى بدرجة واحدة من تابع القوة العرضية ، وبالاحرى أعلى بدرجتين من تابع الحمولة الموزعة .

٦ – اذا كان مخطط القوة العرضية على طول الجائز او على جزء منه متناظر عكسيا فان مخطط عزم الانعطاف على نفس الطول من الجائز يكون متناظر مباشرة والعكس صحيح (شكل 2-43).

٧ – على كل مجال من الجائز فان تغير قيمة عزم الانعطاف بين قطعين ما يساوي مساحة مخطط القوة العرضية بين هذه القطعين (شكل 2-43) و (شكل 2-44) .

يمثل الشكل (2-44) جائزا بسيطا محملا بحمولات وحيدة كما ويمثل ايضا مخطط Q , M . بمعرفة قيمة واحدة للقوة الناظمية في نقطة ما من القضيب يمكن تعيين ثابت التكامل k الذي ظهر في العلاقة (2-7) . وبمعرفة قيمة واحدة لكل من $Q(x)$ و $M(x)$ او بمعرفة قيمتين للعزم $M(x)$ يمكن تعيين ثوابت التكامل C_1 , C_2 التي ظهرت في العلاقات (2-9) و (2-10). تعطي شروط استناد القضيب الستاتيكية قيماً مجهولة لبعض قيم القطع مما يساعد على حساب ثوابث التكامل k , C_1 , C_2. فعلى سبيل المثال (الجدول 2-1) .

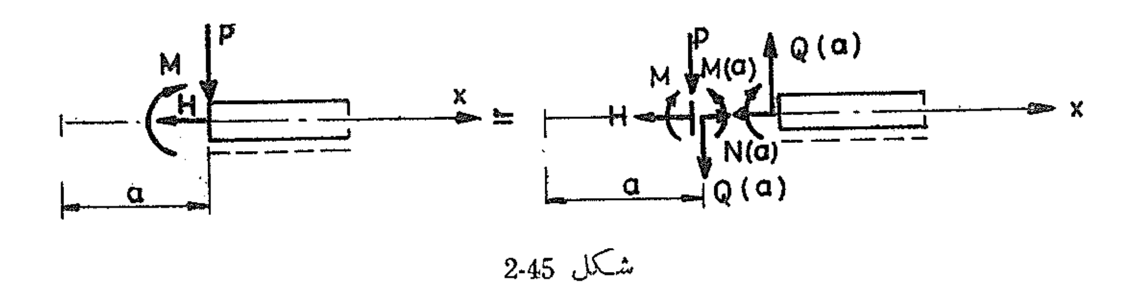
الجدول 2-1



اذا اثرت على نهاية قضيب $x=a$ القيم المعلومة H , P , M (شكل 2-45) عندئذ تصبح قيم القطع $N(a)$, $Q(a)$, $M(a)$ ، حسب شروط التوازن ، كما يلي :

$$N(a) = H \quad , \quad Q(a) = -P \quad , \quad M(a) = M \qquad (2.11)$$

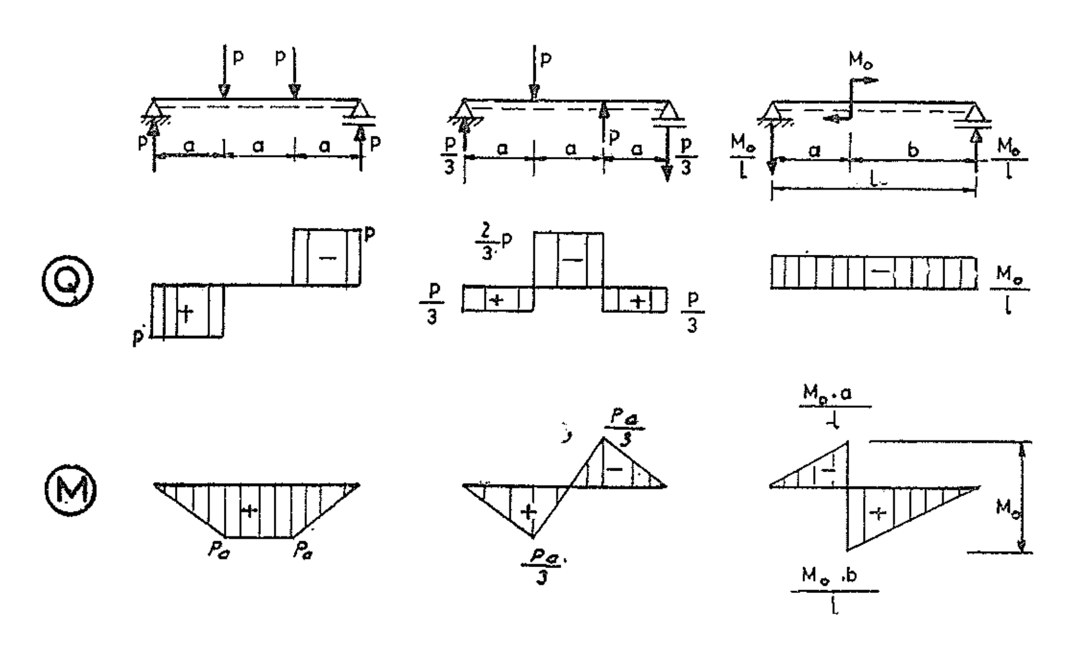
باستخدام شروط الاطراف المدونة في الجدول (2-1) يمكن تعيين قيم القطع في جملة مستوية مقررة ستاتيكياً ومركبة من قضبان مستقيمة والناتجة عن تأثير الحمولات $q_z(x)$ و $q_x(x)$.



شكل 2-45

تشير مخططات Q , M الممثلة في الشكل (2-46) الى أن مخطط القـوة العرضية يحتـوي في الامكنة التي تؤثر فيها قوى وحيدة على انزلاق (قوة) كما تشير الى ان قيمة الانزلاق تساوي قيمة الحمولة الوحيدة التي تؤثر في ذلك المكان . مما ذكر يستنتج أن القوة العرضية تشـير على يمين ويسار مكان تأثير القوة الوحيدة مباشرة على قيم مختلفة .

كما يلاحظ أن مخطط عزم الانعطاف يحتوي في المـكان الذي تؤثر فيـــه قوى وحيدة على إنكســار . من الملاحظ أيضـاً ان مخطط M يحتوي في المـكان الذي يؤثر فيه عزم وحيـد (مزدوجة قوى) على قفزة (انزلاق) قيمتها تساوي قيمة العزم الوحيـد (عزم مزدوجة القوى الخارجية) .



شكل 2-46

يمكن استخدام العلاقة التي تربط بين $M(x)$ ، $Q(x)$ ، $q(x)$ كتدقيق للنتائج التي يتم الحصول عليها بواسطة طريقة القطع ، كما يمكن أيضاً بواسطتها الانطلاق من تابع الحمولة $q(x)$ ثم اجراء التكامل مرة واحدة للحصول على تابع القوة العرضية $Q(x)$ وباجراء التكامل ثانيـــة يتم الحصول على تابع عزم الانعطاف $M(x)$. تحدد ثوابت التكامل بواســطة شروط الاطراف الستاتيكية (المنسوبة على القوة العرضية وعزم الانعطاف) .

بفضل العلاقات التفاضلية (6 2) امكن التوصل الى الجدول التالي :

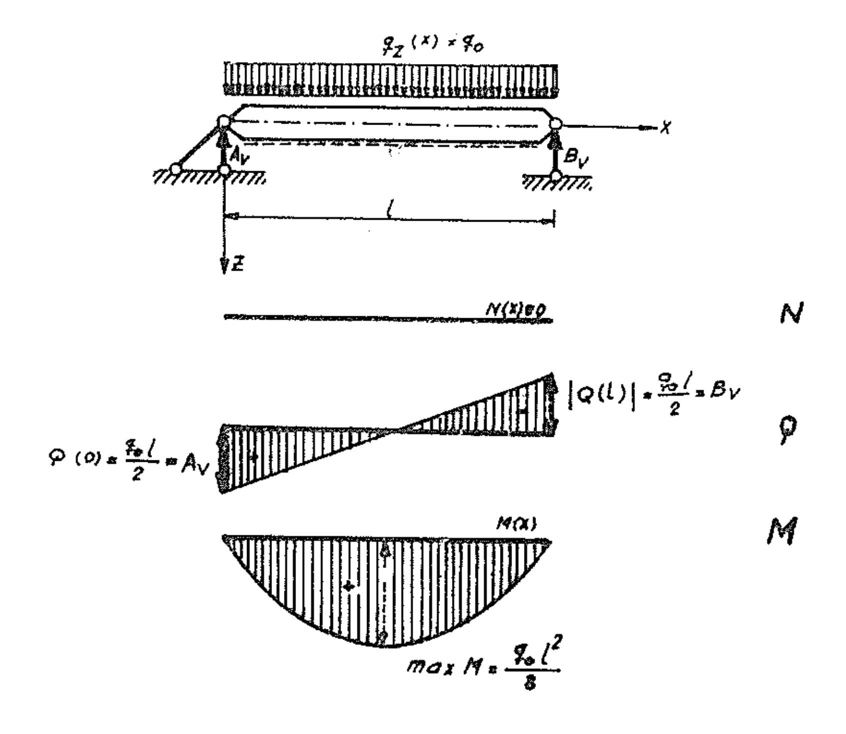
جدول (2-2)

q	Q	M
0	قيمة حدية (عظمى بالقيمة المطلقة)	نقطة انعطاف (نقطة انقلاب)
	0	قيمة حدية (عظمى بالقيمة المطلقة)
مخطط « تابع » q	مخطط « تابع » Q	مخطط « تابع » M
0	0	ثابت
	ثابت	خطي
ثابت	خطي	قطع مكافىء درجة ثانية
خطي	قطع مكافىء درجة ثانية	قطع مكافىء درجة ثالثة
قوة وحيدة P	انزلاق (قفزة) في مكان تأثير P	انكسار في مكان تأثير P
عزم وحيد M	لا يتغير	انزلاق في مكان تأثير P

مثال 20 :

حمل جائز مسنود على مسندين بسيطين بحمولة موزعة بانتظام شدتهـــا $q_z(x) = q_0$ (شكل 2-47) .

المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع (ممثلة بمعادلات ومنحنيات) .



شكل 2-47

الحـل :

من المعادلات التفاضلية :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q_z(x) = -q_0 \quad , \quad \frac{dN}{dx} = -q_x(x) = 0$$

ينتج بعد المكاملة :

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) = -q_0 x + C_1$$

$$M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad ; \quad N(x) = k$$

بسبب استناد الجائز المفصلي (مسند ثابت ومسند نوسي يقوم مقام مسند متحرك) تصلح حسب الجدول (2-1) الشروط التالية :

$$M(o) = 0 = C_2$$

$$M(l) = 0 = -q_0 \frac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 \quad ; \quad N(l) = 0 = k$$

بواسطتها يتم الحصول على الثوابت الاتية :

$$k = 0 \quad ; \quad C_1 = \frac{q_0 l}{2} \quad ; \quad C_2 = 0$$

بتبديل قيم الثوابت في المعادلات الاولى يتم الحصول على قيم القطع المطلوبة :

$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = \frac{q_0 l}{2} \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)$$

$$M(x) = \frac{q_0 l}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

أما قيم القطع فترسم على شكل منحنيات (المخططات) تحت الجائز مباشرة ، حيث ترسم القيم الموجبة باتجاه المنطقة المخططة (هنا للاسفل) أما القيم السالبة فترسم بعكس إتجاه المنطقة المخططة (هنا للاعلى) .

تنعدم القوة العرضية في منتصف الجائز ولهذا السبب يحتوي مخطط عزم الانعطاف هنـاك (في تلك النقطة) قيمة أعظمية :

$$\max M = \frac{q_0 l^2}{8}$$

تتوازن القوى العرضية عند نقاط الاستناد (عند القطوع الموجودة بجانب المسـاند) مع ردود أفعال المساند ، وبذلك يصلح :

$$Q(o) = A_v = \frac{q_0 l}{2}$$

و

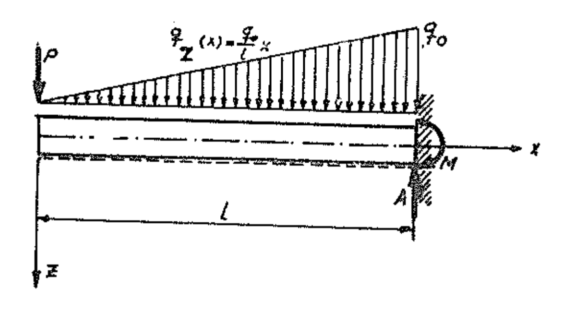
$$-Q(l) = B_v = \frac{q_0 l}{2}$$

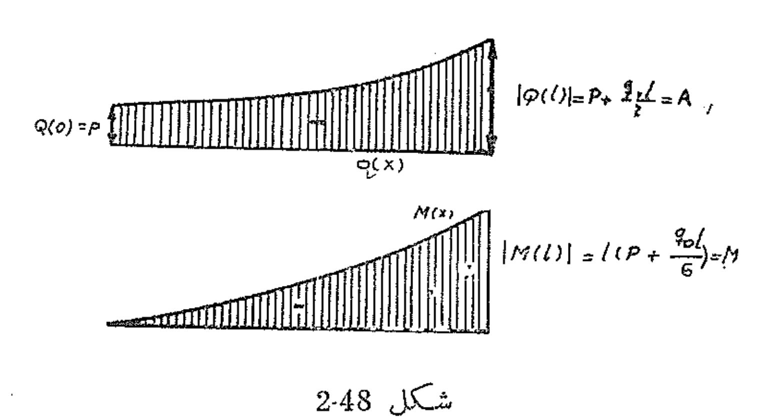
مثـال 21 :

حمل جائز بارز (ظفر) بحمولة موزعة خطية (حمولة مثلثية) تعطى بالعلاقة التالية :

$q_z(x) = \frac{q_0}{l} x$ كما حمل في نهاية الحرة بقوة وحيدة P (شكل 48-2) .

المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع (ممثلة بشكل معادلات ثم بشكل منحنيات) .





شكل 2-48

الحـل :

بشكل واضح ، فان القوة الناظمية تنعدم على طول الجائز . من العلاقة التفاضلية :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q_z(x) = -\frac{q_0}{l}x$$

ينتج بعد المكاملة :

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) = -\frac{q_0}{l}\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{l}\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

باستخدام شروط الاطراف الستاتيكية حسب الجدول (1-2) يتم تعيين الثوابت :

$$Q(o) = -P = C_1$$
$$M(o) = 0 = C_2$$

وبذلك تصبح قيم القطع، بعد تبديل الثوابت بقيمها، كما يلي :

$$Q(x) = -\left(P + \frac{q_0}{2l} x^2 \right)$$

$$M(x) = -\left(Px + \frac{q_0}{6l} x^3 \right)$$

بواسطة القوة العرضيـــة وعزم الانعطـاف عند نقطة الوثاقة يتم الحصول على قوة الاستنـاد (رد فعل المسند) :

$$-Q(l) = A_v = P + \frac{q_0 l}{2}$$

وعلى عزم الوثاقـــة :

$$-M(l) = M_a = l\left(P + \frac{q_0 l}{6}\right)$$

مثال 22 :

حمل جائز مسنود على مسندين بسيطين (جائز بسيط) كما يشير الشكل (2-49) بحمولة موزعة تعطى شدتها بالعلاقات التالية :

$$q_{z1}(x) = 4 q_0 \frac{x^2}{l^2} \quad , \quad q_{z2} = \frac{4q_0}{3}\left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

وكذلك أيضاً حمل بقوة وحيدة H .

المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع (ممثلة بشكل توابع ثم بشكل منحنيات) .

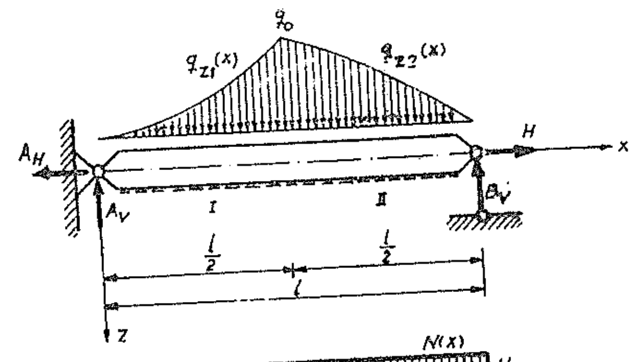
الحل :

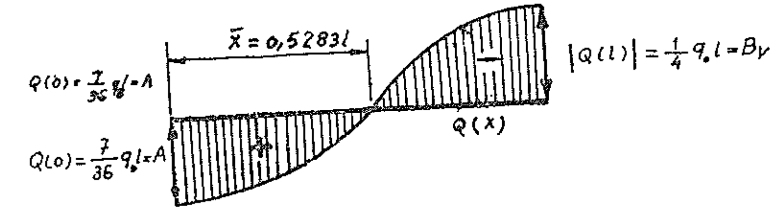
نتيجة لتأثير القوة الافقية الوحيدة H تظهر في القضيب قوة ناظمية تبلغ :

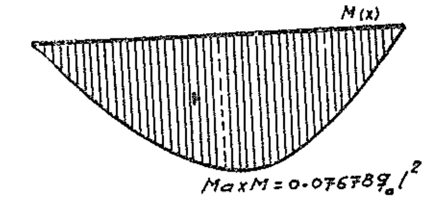
$$N(x) = H$$

سيتم إيجاد القوة العرضية وعزم الانعطاف لكل مجال على حـدة . فالجـائز يتألف من مجالين الأول $0 \leqq x \leqq l/2$ والثاني $l/2 \leqq x \leqq l$.

المجال I $(0 \leqq x \leqq l/2)$:







شكل 2-49

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -4q_0\frac{x^2}{l^2}$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) = -4q_0\left(\frac{x^3}{3l^2} + C_1\right)$$

$$M(x) = -4q_0\left(\frac{x^4}{12l^2} + C_1x + C_2\right)$$

المجال II $(l/2 \leqq x \leqq l)$:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{4q_0}{3}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) = -\frac{4q_0}{3}\left(x - \frac{x^3}{3l^2} + C_3\right)$$

$$M(x) = -\frac{4q_0}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12l^2} + C_3x + C_4\right)$$

حسب الجدول (2-1) فان شروط الاطراف الستاتيكية عند نقاط الاستناد هي التالية :

$$M(o)=0=C_2,\ M(l)=0=-\frac{4q_0}{3}\left(\frac{l^2}{2}-\frac{l^2}{12}+C_3 l+C_4\right)$$

من أجل النقطة $x = l/2$ المشتركة بين المجالين تتساوى القوة العرضية وعزم الانعطاف وذلك لأسباب التوازن . من شرط الاستمرار :

$$Q_I\left(\frac{l}{2}\right)=Q_{II}\left(\frac{l}{2}\right),\ M_I\left(\frac{l}{2}\right)=M_{II}\left(\frac{l}{2}\right)$$

ينتج :

$$-4q_0\left(\frac{l}{24}+C_1\right)=-\frac{4q_0}{3}\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{24}+C_3\right)$$

$$-4q_0\left(\frac{l^2}{192}+C_1\frac{l}{2}+C_3\right)=-\frac{4q_0}{3}\left(\frac{l^2}{8}-\frac{l^2}{192}+C_3\frac{l}{2}+C_4\right)$$

بفضل الشروط الأربعة المذكورة يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1=-\frac{7}{144}l,\ C_2=0,\ C_3=-\frac{23}{48}l,\ C_4=\frac{l^2}{16}$$

وبذلك تأخذ معادلات قيم القطع، بعد تبديل ثوابت التكامل بقيمها،شكلها النهائي التالي :

المجال I $(0 \leqq x \leq l/2)$:

$$Q(x)=\frac{q_0 l}{36}\left(7-48\frac{x^3}{l^3}\right)$$

$$M(x)=\frac{q_0 l^2}{36}\left(7\frac{x}{l}-12\frac{x^4}{l^4}\right)$$

المجال II $(l/2 \leqq x \leqq l)$:

$$Q(x)=\frac{q_0 l}{36}\left(23-48\frac{x}{l}+16\frac{x^3}{l^3}\right)$$

$$M(x)=\frac{q_0 l^2}{36}\left(-3+23\frac{x}{l}-24\frac{x^2}{l^2}+4\frac{x^4}{l^4}\right)$$

عند النقطة $x = 0{,}5283\, l$ تنعدم القوة العرضية . أما عزم الانعطاف في تلك النقطة فيبلغ :

$$\max M = 0{,}0778\ q_0 l^2$$

أما ردود أفعال المساند فيتم تعيينها بالاستعانة بالقوى العرضية :

$$Q(o) = A_v = \frac{7}{36}\ q_0 l\ ;\ -Q(l) = B_v = \frac{1}{4}\ q_0 l$$

أما رد الفعل الافقي A_H فيتم الحصول عليه من القوة الناظمية :

$$N(o) = A_H = H$$

٢ - ٤ الجائز البسيط

يمكن تعريف الجائز البسيط بأنه الإنشاء ذو المحور المستقيم الذي يستند عند طرفيه على مسندين مفصليين احدهما من النوع الثابت وأخرهما من النـوع المتحرك الذي يسمح بحركة انتقاليـة في اتجاه ما . وهذا النوع من الاستناد يسمى إستناداً بسيطاً ومنه أخذ الجائز إسمه .

٢ - ٤ - ١ أمثلة على الجائز البسيط

مثال 23 :

المعطى : الجائز البسيط (شكل 2-50) .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند وحساب قيم القطع ورسم مخططاتها .

الحل :

١ - حساب ردود أفعال المساند:

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$\Sigma H = 0\ ;\ A_H = 0$$

$$\Sigma M_b = 0\ :\ A_v \cdot l - P \cdot b = 0\ ,\ A_v = P \cdot b / l$$

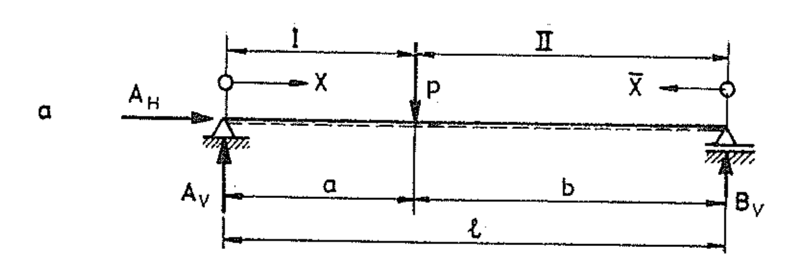
$$\Sigma V = 0\ :\ A_v + B - P = 0\ ,\ B_v = P \cdot a / l$$

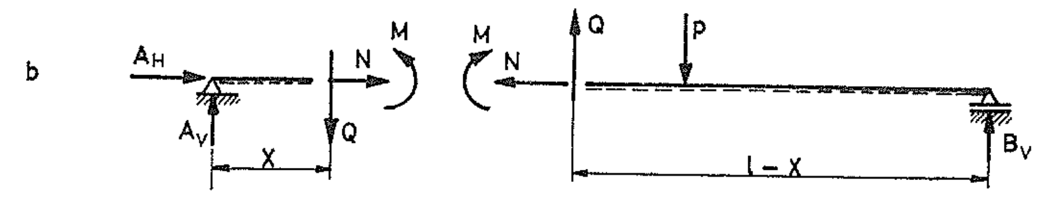
التدقيق :

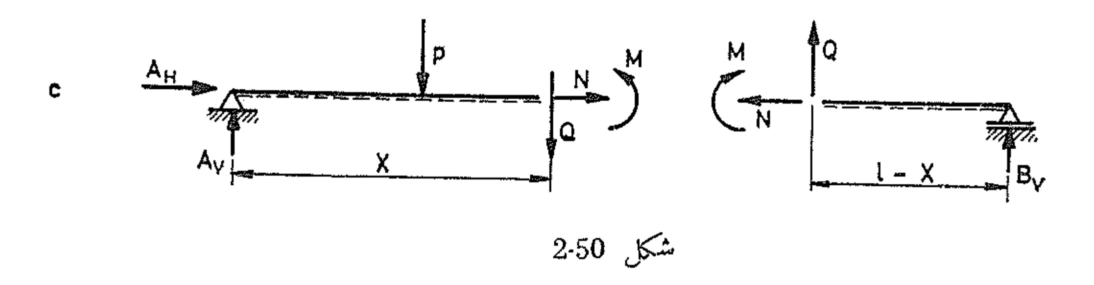
$$\Sigma M_G = 0\ :\ A_v \cdot a - B_v \cdot b = 0$$

٢ - حساب قيم القطع:

يتألف الجائز من مجالين فقط هما المجال I والمجال II .







شكل 2-50

المجال I $(0 \leqq \bar{x} \leqq a)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الأيسر المقطوع (شكل 2-50 b) يتم تعيين قيم القطع :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q - A_v = 0 ; Q = P \frac{b}{l}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M - A_v . x = 0 ; M = P b \frac{x}{l}$$

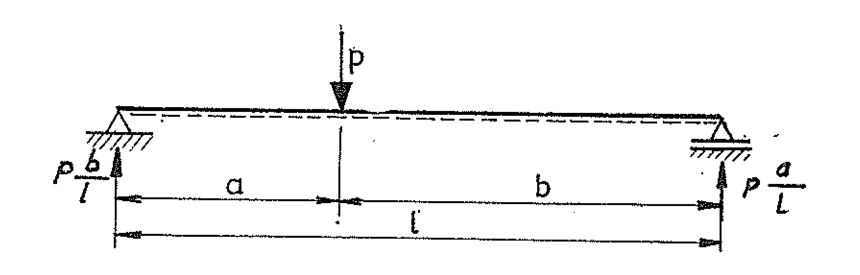
المجال II $(0 \leqq x \leqq b)$:

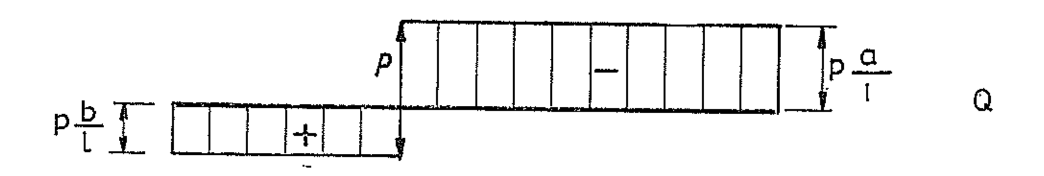
بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن المقطوع (شكل 2-50c) يتم تعيين قيم القطع :

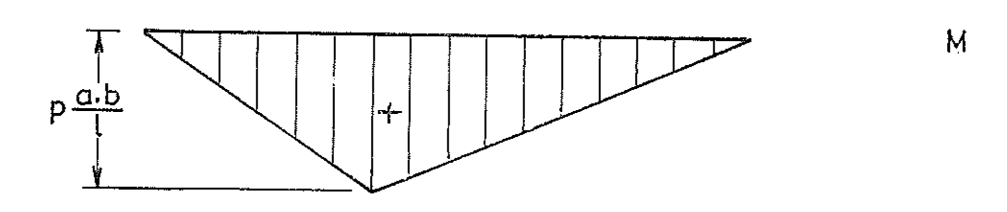
$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q + B_v = 0 ; Q = - P \frac{a}{l}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M - B_v . \bar{x} = 0 ; M = + P \frac{a}{l} \bar{x}$$







شكل 2-51

لقد تم في الشكل (2-51) رسم مخططات قيم القطع .

حالة خاصة . القوة P تؤثر في منتصف الجائز $a = b = l/2$ (شكل 2-52) .

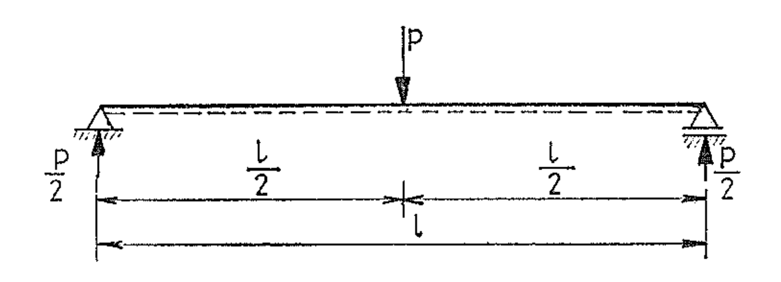
مثال 24 :

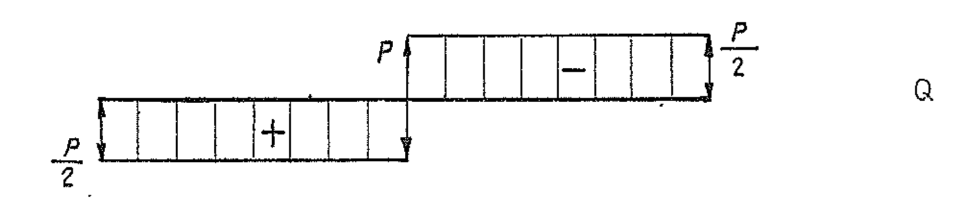
المطلوب . ايجاد قيم قطع الجائز البسيط الممثل في الشكل (2-53) (ايجـاد المعادلات ورسم المخططات) .

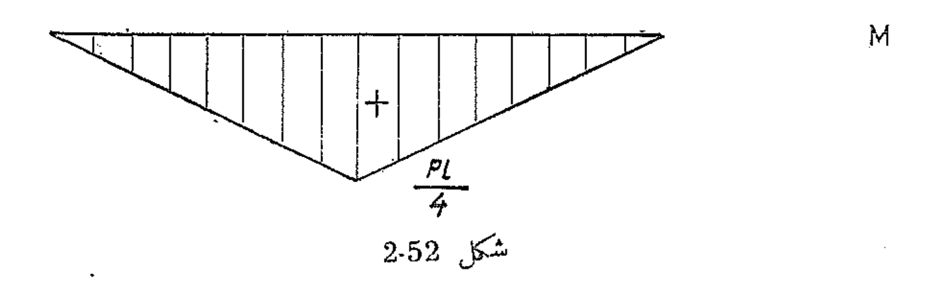
الحل .

١ - حساب ردود أفعال المساند :

من تناظر الجملة (هندسياً وحمولياً) يمكن فوراً القول بان $A_v = B_v = P$ وكذلك لعدم وجود قوى افقية بأن $A_H = 0$. بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على نفس النتائج .







M

+

PL/4

شكل 2-52

$\Sigma H = 0 : A_H = 0$

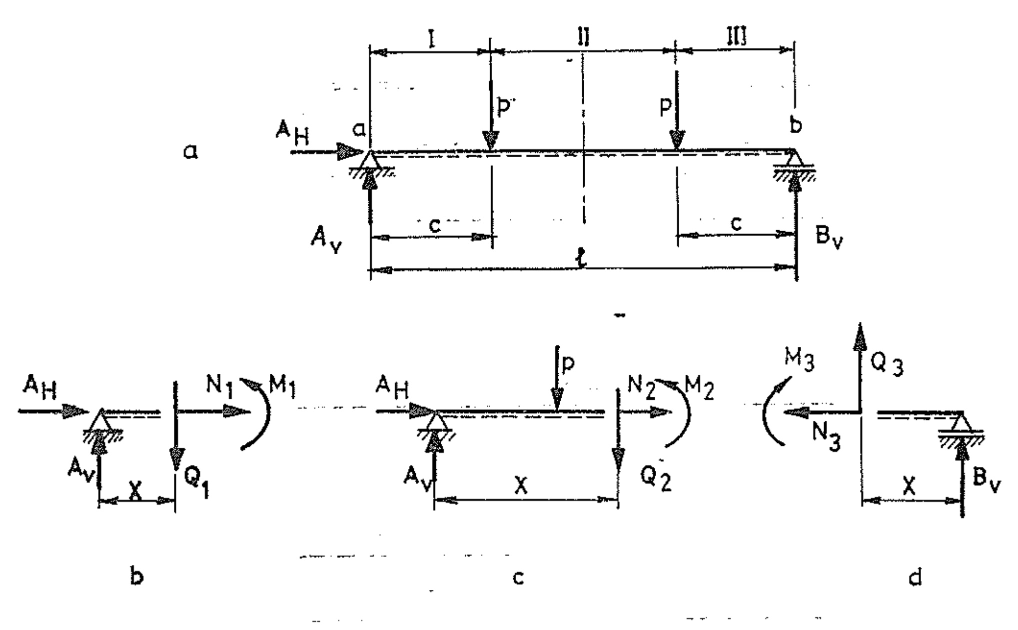
$\Sigma M_a = 0 : B_v . l - P(l-c) - P.c = 0 \; ; \; B_v = P$

$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - P - P = 0 \; ; \; A_v = P$

التدقيق .

$$\Sigma M_d = 0 : A_v . \frac{l}{2} - B_v . \frac{l}{2} + P. (\frac{l}{2} - c) - P(\frac{l}{2} - c) = 0$$

يؤكد تبديل قيم A_v و B_v صحة النتائج المحسوبة .



شكل 2-53

٢ ـ ايجاد معادلات قيم القطع (M , Q , N) :

يتألف الجائز من ثلاث مجالات .

المجال I $(0 \leqq x \leqq c)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء الايسر المقطوع (شكل 2-53 b) العلاقات التالية .

$$\Sigma H = 0 \; : \; N_1 = - A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; Q_1 = A_v = P$$

$$\Sigma M_x = \; : \; M_1 = A_v . x = P.x$$

$$x = 0 \; ; \; M_1 = 0$$
$$x = c \; ; \; M_1 = c . P$$

المجال II $(c \leq x \leq l - c)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايسر المقطوع (شكل 2-53 c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \; : \; N_2 = - A_H = 0$$
$$\Sigma V = 0 \; : \; Q_2 = A_v - P = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \; ; \; M_2 = A_v . x - P\,(x - c) = P.c$$

المجال III $(0 \leq \overline{x} \leq c)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن المقطوع (شكل 2-53 d)قيم القطع في المجال الثالث:

$$\Sigma H = 0 : \; N_3 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : Q_3 = -B_v = - \; P$$

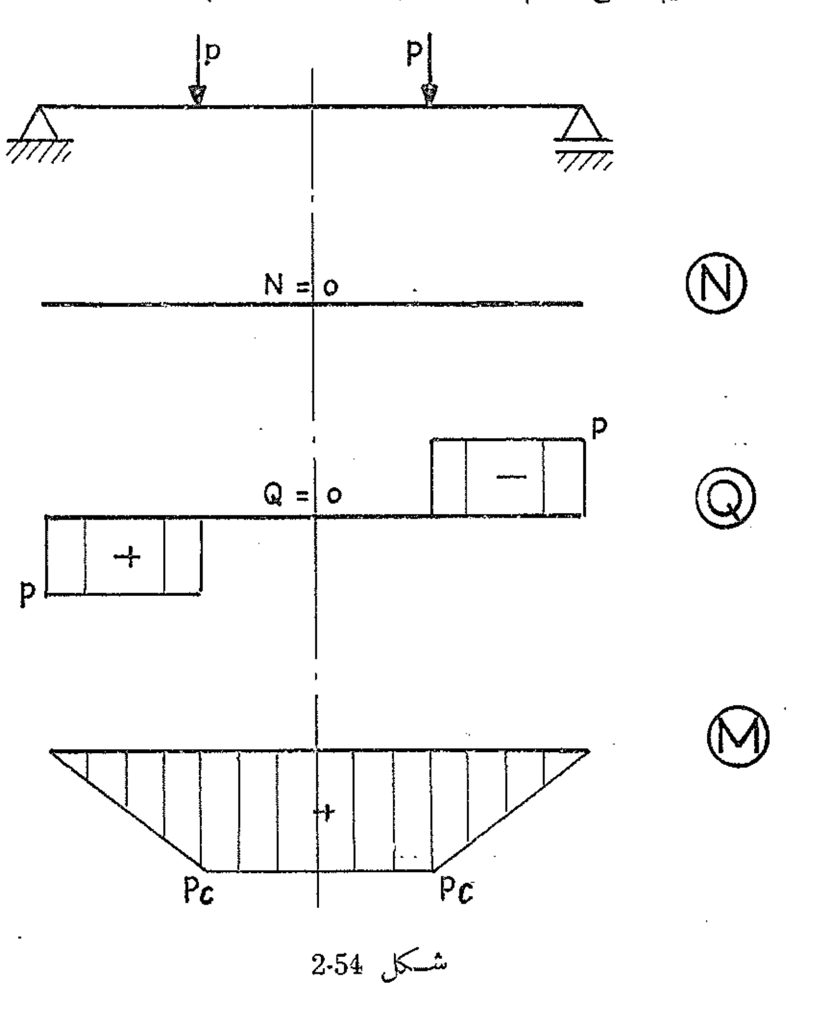
$$\Sigma M_{\overline{x}} = 0 \; : \; M_3 = B_v \, \overline{x} = P \, \overline{x}$$

$$\overline{x} = 0 \; ; \; M_3 = 0$$

$$\overline{x} = c \; ; \; M_3 = Pc$$

٣ ـ رسم مخططات قيم القطع :

بعد ايجاد معادلات قيم القطع ترسم المخططات (شكل 2-54)



شكل 2-54

ملاحظة : من الشكل (2.51) يتم التوصل للنتيجة التالية :

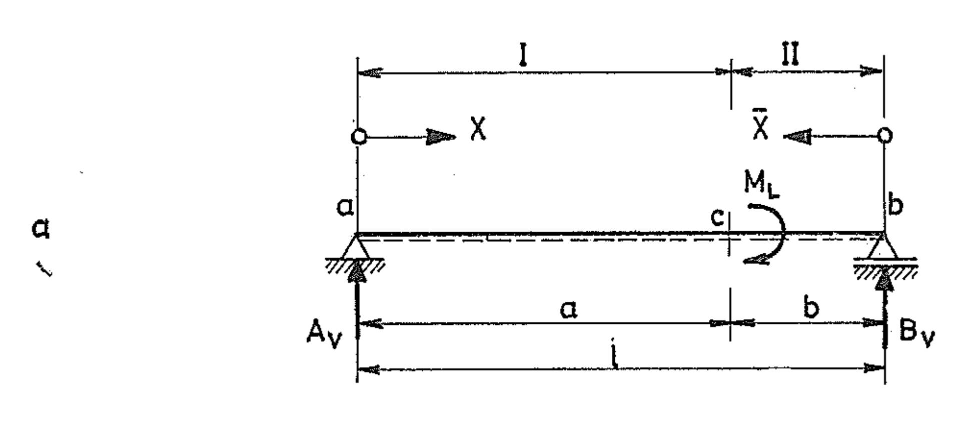
١ ـ الجملة متناظرة هندسياً وحمولياً .

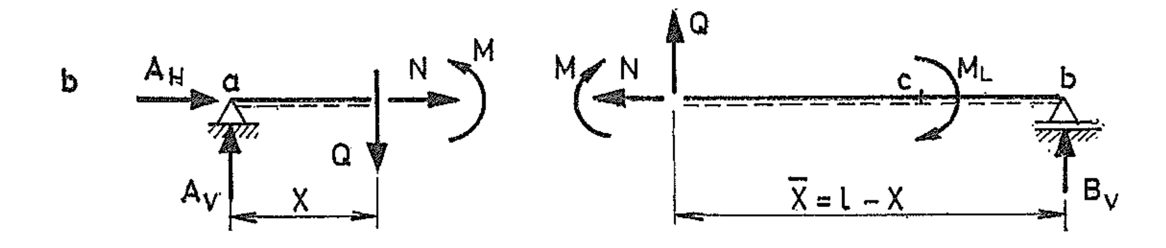
٢ ـ القوة العرضية Q متناظرة عكسياً .

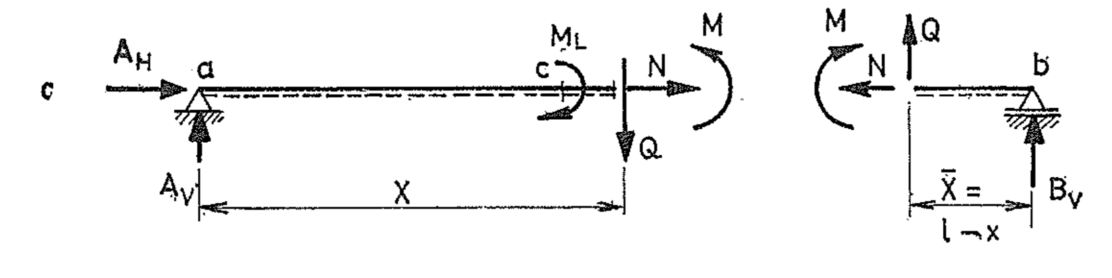
٣ ـ عزم الانعطاف M متناظر .

مثال 25 :

المطلوب : ايجاد ردود افعال المساند وقيم القطع (M , Q , N) (معادلات ومخططات) للجائز البسيط الممثل في الشكل (2-55) .







شكل 2-55

الحل :

١ – حساب ردود أفعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن على الجملة كشكل ينتج :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 : A_v . l + M_L = 0 ; A_v = - \frac{M_L}{l}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v = 0 ; B_v = + \frac{M_L}{l}$$

التدقيق :

$$\Sigma M_a = 0 : B_v . l - M_L = 0$$

٢ – ايجاد معادلات قيم القطع .

يتألف الجائز من مجالين فقط .

المجال I $(0 \leqq x \leqq a)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايسر (شكل 2-55 b) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = - A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q = A_v = - \frac{M_L}{l}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M = A_v . x = - \frac{M_L}{l} x$$

$$x = 0 : M = 0$$

$$x = a : M = - M_L \frac{a}{l}$$

المجال II $(0 \leqq \bar{x} \leqq b)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن (شكل 2-55c) العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 \;:\; N = 0$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; Q = -B_v = -\frac{M_L}{l}$$

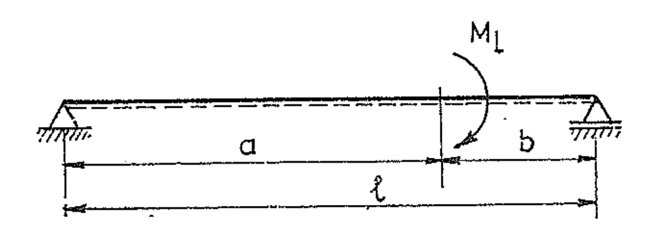
$$\Sigma M_{\overline{x}} = 0 \;:\; M = B_v . \overline{x} = M_L \frac{\overline{x}}{l}$$

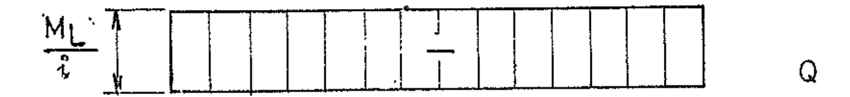
$$\overline{x} = 0 \;:\; M = 0$$

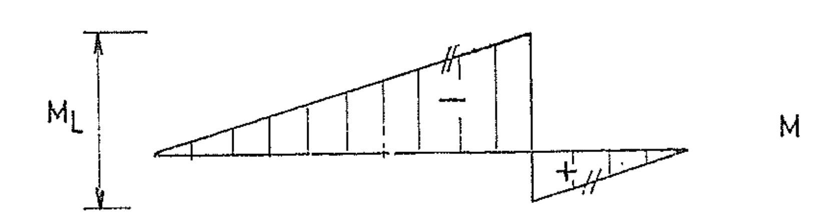
$$\overline{x} = b \;:\; M = M_L \frac{b}{l}$$

٣ ـ رسم مخططات قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-56) رسم مخططات قيم القطع .

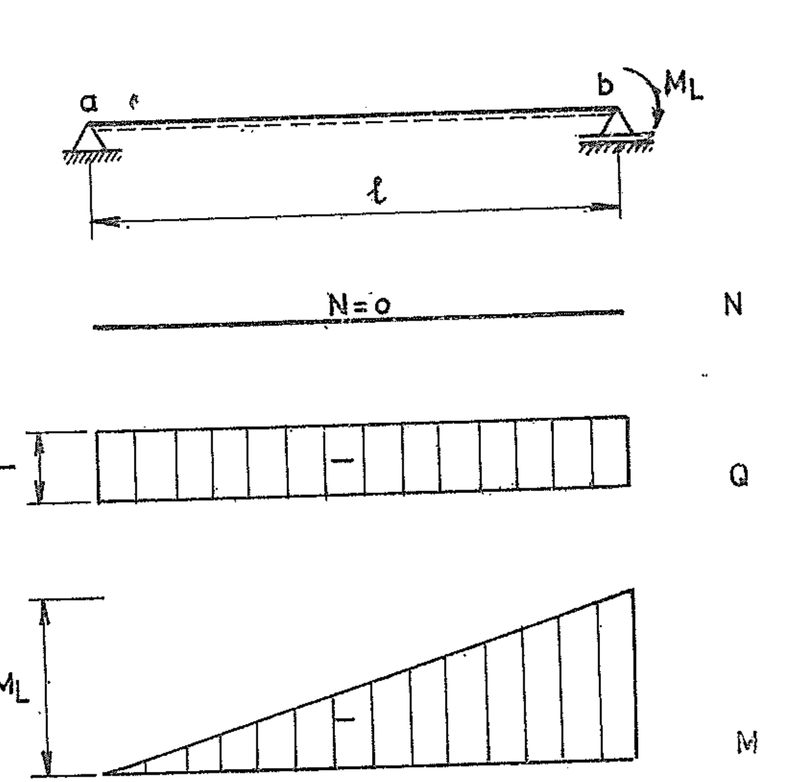






شكل 2-56

حالة خاصة : $a = l$, $b = 0$ (شكل 2-57) .



شكل 2-57

مثـال 26 :

جائز بسيط محمل بحمولة جيبية (على شكل منحني جيبي) ـ نصف موجة (شكل 2-58) .

المعطى : طول الجائز l ، الشدة العظمى للحمولة q_0 .

المطلوب : ايجاد مخططات قيم القطع (M , Q, N) (معادلات ومخططات) .

الحل :

١ ـ **معادلة شدة الحمولة** $q(x)$:

$$q(x) = q_0 \cdot \sin \alpha x$$

شروط اطراف التحميل :

$$q\ (x = l)\ =\ 0$$

بتحقيق معادلة شدة الحمولة لشروط الاطراف ينتج :

$$q_0 \sin \alpha l = 0\ ;\ \alpha l = 0\ ,\ \pi,\ 2\pi\ ,\ \cdots n\pi$$

جود نصف مولوجـة جيبيـة فان الحل $\alpha\, l = \pi$ هو المطلوب ومنه $\alpha = \pi/l$ وبذلك تصبح معادلة الحمولة (شدة الحمولة عند النقطة التي تبعد x عن النقطة a) :

$$q(x) = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x$$

٢ ـ ردود أفعال المساند .

يعطي تطبيق شروط التوازن ، المعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : B_v\, l - \frac{l}{2}\int_0^l q(x)\,dx\ ,\ B_v = \frac{1}{2}\int_0^l q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x\,dx$$

$$B_v = q_0\,\frac{l}{\pi}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - \int_0^l q(x)\,dx = 0 ; A_v = \int_0^l q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x\,dx - q_0\,\frac{l}{\pi}$$

$$A_v = q_0\,\frac{l}{\pi}$$

التدقيق :

لتناظر الجائز بالنسبة للحمولات الشاقولية ينبغي أن يتساوى ردي الفعـل الشاقوليين B_v , A_v ويساوي كل منها نصف الحمولة المؤثرة على الجائز :

$$A_v = B_v = \int_0^{l/2} q(x)\,dx = \int_0^{l/2} q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x\,dx = q_0\,\frac{l}{\pi}$$

٣ ـ قيم القطع :

آ ـ **باستخدام العلاقات التفاضلية** (والتي تفضل في حالة عدم معرفة مساحة سطوح التحميل أو عدم معرفة مراكز ثقلها) :

$$\frac{dQ}{dx} = -\,q(x)$$

بمكاملة هذه العلاقة ، بعد تبديل تابع الحمولة ، يتم الحصول على القوة العرضية :

$$Q = -\int q(x)\,dx = -\int q_0 \sin(\frac{\pi}{l})x dx = q_0 \frac{l}{\pi} \cos(\frac{l}{\pi})\,x + C_1$$

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

وبمكاملة هذه العلاقة يتم التوصل لعزم الانعطاف :

$$M = \int Q\,dx = \int [q_0 \frac{l}{\pi} \cos(\frac{\pi}{l})\,x + C_1]\,dx$$

$$= q_0 (\frac{l}{\pi})^2 \sin(\frac{\pi}{l})\,x + C_1 x + C_2$$

شروط الاطراف الستاتيكية (اللازمة لايجاد ثوابت التكامل C_1 , C_2)

يتم تحديد قيمة ثوابت التكامل بتحقيق معادلات Q , M للشرطين :

$$Q(x=0) = A_v ; A_v = q_0 \frac{l}{\pi} + C_1 \; ; C_1 = A_v - q_0 \frac{l}{\pi} = 0$$

$$M(x=0) = 0; \qquad C_2 = 0$$

بتبديل قيم ثوابت التكامل في معادلات Q , M ينتج :

$$Q = q_0 \frac{l}{\pi} \cos(\frac{\pi}{l})\,x$$

$$M = q_0 (\frac{l}{\pi})^2 \sin(\frac{\pi}{l})\,x$$

ويتضح من هذه المعادلات أن شكل القوة العرضية يمثله منحني جيب تمام طول الموجة فيه (وهو يقابل 2π) يتحدد بالطول $2l$ (أي ان l تقابل π) كما أن القيمة العظمى للقوة العرضية تساوي $\frac{P\,l}{\pi}$ وتقع عند a حيث x تساوي صفراً وعند b حيث x تساوي l (او حيث $x \frac{\pi}{l}$ تساوي π) .

أما شكل منحني عزوم الانعطاف فيمثله منحني جيبي يشبه منحني الحمولة ذاتها ، غير أن القيمة القصوى للعزم في منتصف الجائز عند c تصبح :

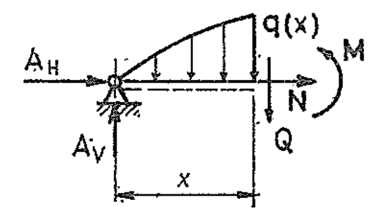
$$\max M = q_0 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2$$

التدقيــق :

$$Q(x=l) = -B_v \quad ; \quad -q_0 \frac{l}{\pi} = -q_0 \frac{l}{\pi}$$

$$M(x=l) = 0 \quad ; \quad 0 = 0$$

ب ـ باستخدام طريقة القطع :



شكل 2-58 a

بنطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2-58 a) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \ : \ N + A_H = 0 \ : \ N = -A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 \ : \ Q - A_v + \int_0^x q(x)\,dx = 0$$

بتبديل A_v بقيمتها والاستعاضة عن $q(x)$ بتابعها ينتج :

$$Q = q_0 \frac{l}{\pi} - \int_0^x q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x\,dx = \frac{l}{\pi} q_0 \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x$$

$$\Sigma M_z = 0 \ : \ M - A_v \,.\, x - \int_0^x q(x)\,dx \left(x - \frac{\int_0^x x\,q(x)dx}{\int_0^x q(x)\,dx}\right) = 0$$

$$M = (A_v - \int_0^x q(x)\,dx)\,x + \int_0^x x\,q(x)\,dx$$

يمثل الحدين الأولين بعد اشارة المساواة تابـع القوة العرضية :

$$Q = A_v - \int_x^x q(x)\,dx$$

وبذلك تصبـح العلاقة الاخيرة :

$$M = Q \cdot x + \int_0^x x\,q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x\,dx$$

بالاستعاضة عن Q بتابعها ينتج :

$$M = \left[\frac{l}{\pi}\,q_0 \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x\right] x + q_0 \int_0^x x \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x\,dx$$

يحل التكامل الأخير من العلاقة السابقة كالتالي :

$$\int_0^x x \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x\,dx = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2} - \frac{x \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x}{\frac{\pi}{l}}$$

وبالتبديل في المعادلة الاخيرة ينتج :

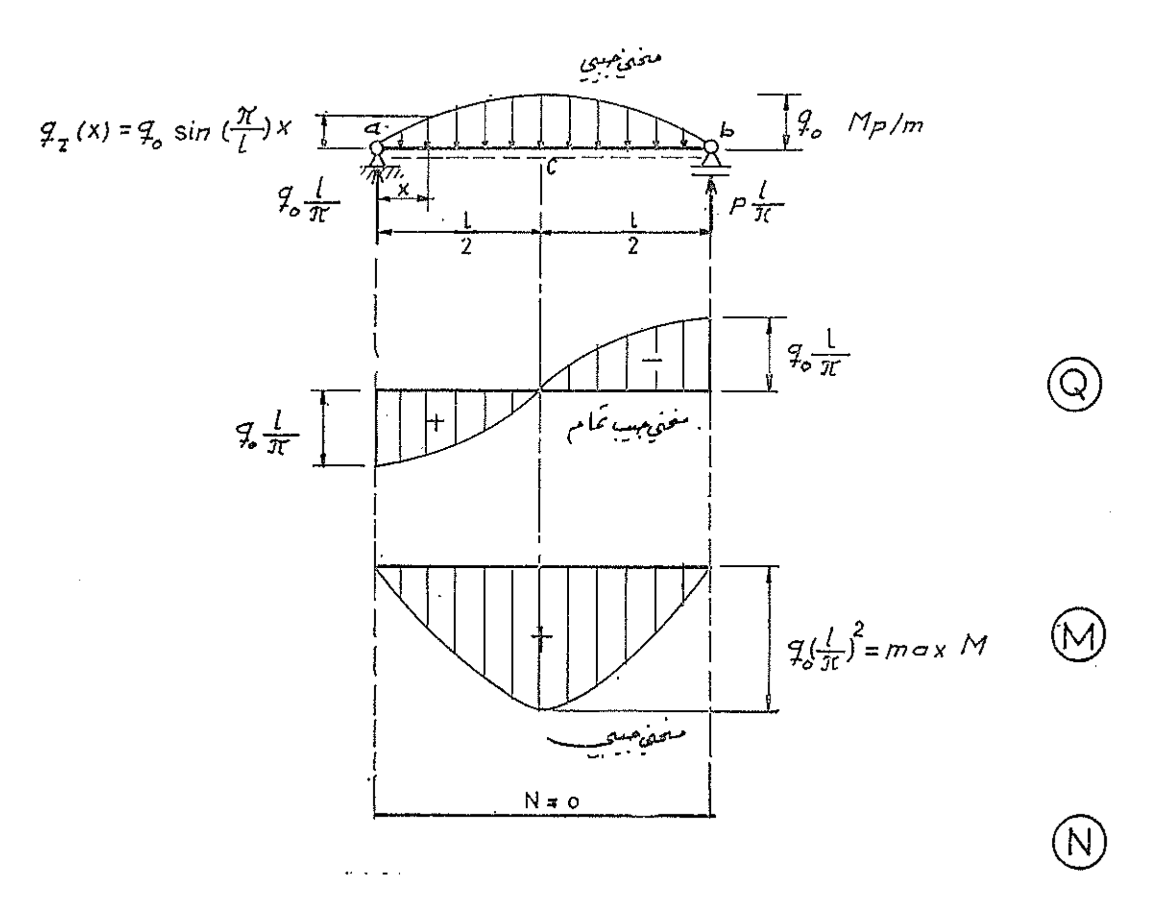
$$M = \frac{l}{\pi}\,q_0 \cdot x \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x + \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x - \frac{l}{\pi}\,q_0 \cdot x \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x$$

من هذه العلاقة يتم الحصول على عزم الانعطاف :

$$M = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x$$

٤ ـ مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-58) رسم مخططات قيم القطع .



شكل 2-58

مثـال 27 :

جائز بسيط محمل بحمولة موزعة على شكل منحني جيبي ـ موجة كاملة (شكل 2-59) .

المعطى : طول الجائز l والشدة العظمى للحمولة q_0 .

المطلوب : إيجاد قيم القطع (M , Q ,N) (معادلات ومخططات) .

الحـــل :

١ ـ معادلة الحمولة q_z (x) (شدة الحمولة عند أي قطع يقع على بعد x عن a) :

$$q(x) = -q_0 \sin \alpha x$$

بتحقيق المعادلة السابقة لشروط أطراف الحمولة ينتج :

$$q(x = \frac{l}{2}) = 0 \quad : -q_0 \sin \alpha \frac{l}{2} = 0 \quad ; \alpha \frac{l}{2} = 0, \pi, 2\pi, \cdots, n\pi$$

الحل الأصغر الذي يختلف عن الصفر هو :

$$\alpha \frac{l}{2} = \pi \quad : \quad \alpha = \frac{2\pi}{l}$$

بالتبديل في معادلة التحميل ينتج :

$$q(x) = -q_0 \sin \left(\frac{2\pi}{l}\right) x \qquad (1)$$

٢ ـ ردود أفعال المساند

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ينتج :

$$\Sigma H = 0 \quad : \quad A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \quad : \quad B_v = -\frac{1}{l}\left[\frac{1}{4} l \int_0^{l/2} q(x)\, dx + \frac{3}{4} l \int_{l/2}^{l} q(x)\, dx\right]$$

$$= -\left\{\frac{1}{4}\int_0^{l/2} q_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right) x\, dx + \frac{3}{4}\int_{l/2}^{l} q_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right) x\, dx\right\}$$

$$B_v = -\left[\frac{l}{4\pi} q_0 - \frac{3\,l}{4\pi} q_0\right] = +\frac{1}{2\,\pi} q_0\, l$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad A_v + B_v + \left[-\int_0^{l/2} q(x)\, dx\right] - \left[-\int_{l/2}^{l} q(x)\, dx\right] = 0$$

بسبب كون :

$$\int_0^{l/2} q(x)\, dx - \int_{l/2}^{l} q(x)\, dx = 0$$

ينتج أن :

$$A_v + B_v = 0 \quad ; \quad A_v = -B_v = -\frac{1}{2\pi} q_0 l$$

٣ ـ ايجاد قيم القطع باستخدام العلاقات التفاضلية :

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad ; \quad Q = -\int q(x)\,dx = \int q_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right) x\,dx$$

$$Q = -q_0 \frac{l}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) x + C_1$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad ; \quad M = \int Q\,dx = \int \left[-q_0 \frac{l}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) x + C_1\right] dx$$

$$M = -q_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right) x + C_1 x + C_2$$

بتحقيق معادلتي Q , M لشروط الاطراف الستاتيكية ينتج :

$$Q(x=0) = A_v \quad ; \quad -q_0 \frac{l}{2\pi} + C_1 = A_v \quad ; \quad C_1 = A_v + q_0 \frac{l}{2\pi} = 0$$

$$M(x=0) = 0 \quad ; \quad C_2 = 0$$

بانعدام ثابتي التكامل تصبح معادلات Q , M كما يلي :

$$Q = -q_0 \frac{l}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) x \tag{2}$$

$$M = -q_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right) x \tag{3}$$

تعني معادلة القوة العرضية (2) أن شكل القوى العرضية يحدده منحني جيب تمام ـ يمثل موجة كاملة ـ وان القوة العرضية عند الطرفين a , b تساوي $(q_0\, l/2\pi)$ وهي قيمة رد الفعل عندها مع ملاحظة أن رد الفعل A_v يتجه للاسفل .

أما المعادلة (3) فتعني ان شكل منحني عزم الانعطاف يتحدد بمنحني جيبي ـ يمثل موجة كاملة ـ ويشبه منحني الحمولة ذاتها . تبلغ القيمة الاعظمية $q_0\,(l/2\pi)^2$ وتقع عند النقاط $x=l/4$ و $x=3l/4$.

التدقيق :

$$Q\ (x=l) = -B_v \quad ; \quad -q_0\ \frac{l}{2\pi}\ \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) l - \frac{1}{2\pi} q_0\ l = -\frac{1}{\pi} q_0\ l$$

$$-\frac{1}{\pi} q_0\ l = -\frac{1}{\pi} q_0\ l$$

$$M\ (x=l) = 0 \quad ; \quad -q_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \sin \frac{2\pi}{l}\ l = 0$$

تحديد مكان وقيمة القيم الاعظمية لـ M , Q :

$$\frac{dM}{dx} = Q = 0 \quad ; \quad -q_0\ \frac{l}{2\pi}\ \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) x = 0 \quad ; \quad \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) x = 0$$

منها ينتج :

$$x_1 = \frac{l}{4} \quad : \quad \min M = -q_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$$

$$x_2 = \frac{3}{4} l \quad : \quad \max M = +\ q_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$$

$$\frac{dQ}{dx} = -q\ (x) = 0 \quad ; \quad -q_0\ \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right) x = 0 \quad ; \quad \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right) x = 0$$

منها ينتج :

$$x_3 = 0 \quad ; \quad x_4 = l \quad ; \quad \min Q = -\frac{1}{2\pi} q_0\ l$$

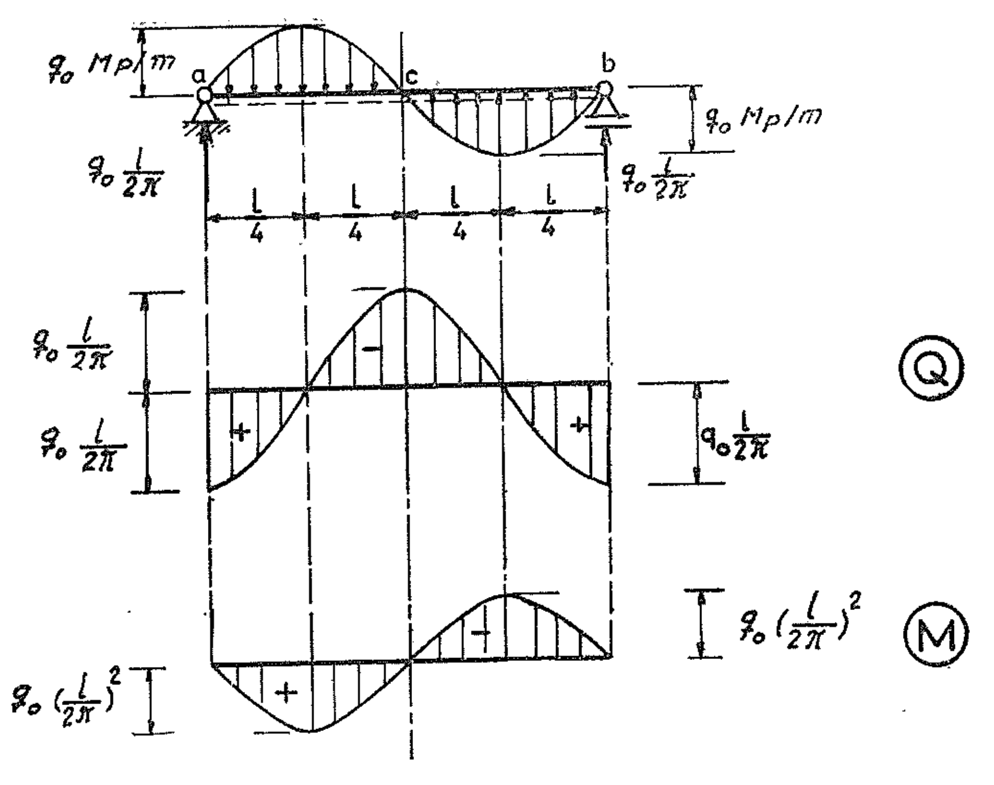
$$x_5 = \frac{l}{2} \qquad ; \quad \max Q = +\frac{1}{2\pi} q_0\ l$$

٤ ـ مخططات قيم القطع .

لقد تم في الشكل (2-59) رسم مخططات قيم القطع .

مثال 28 :

حمل جائز بسيط بحمولة موزعة على شكل منحني جيب تمام ـ يطول نصف موجة (شكل 2-60) .



شكل 2-59a

المعطى : طول الجائز l والشدة الاعظمية للحمولة q_0 .

المطلوب : ايجاد مخططات قيم القطع M , Q, N .

الحل :

معادلة شدة الحمولة :

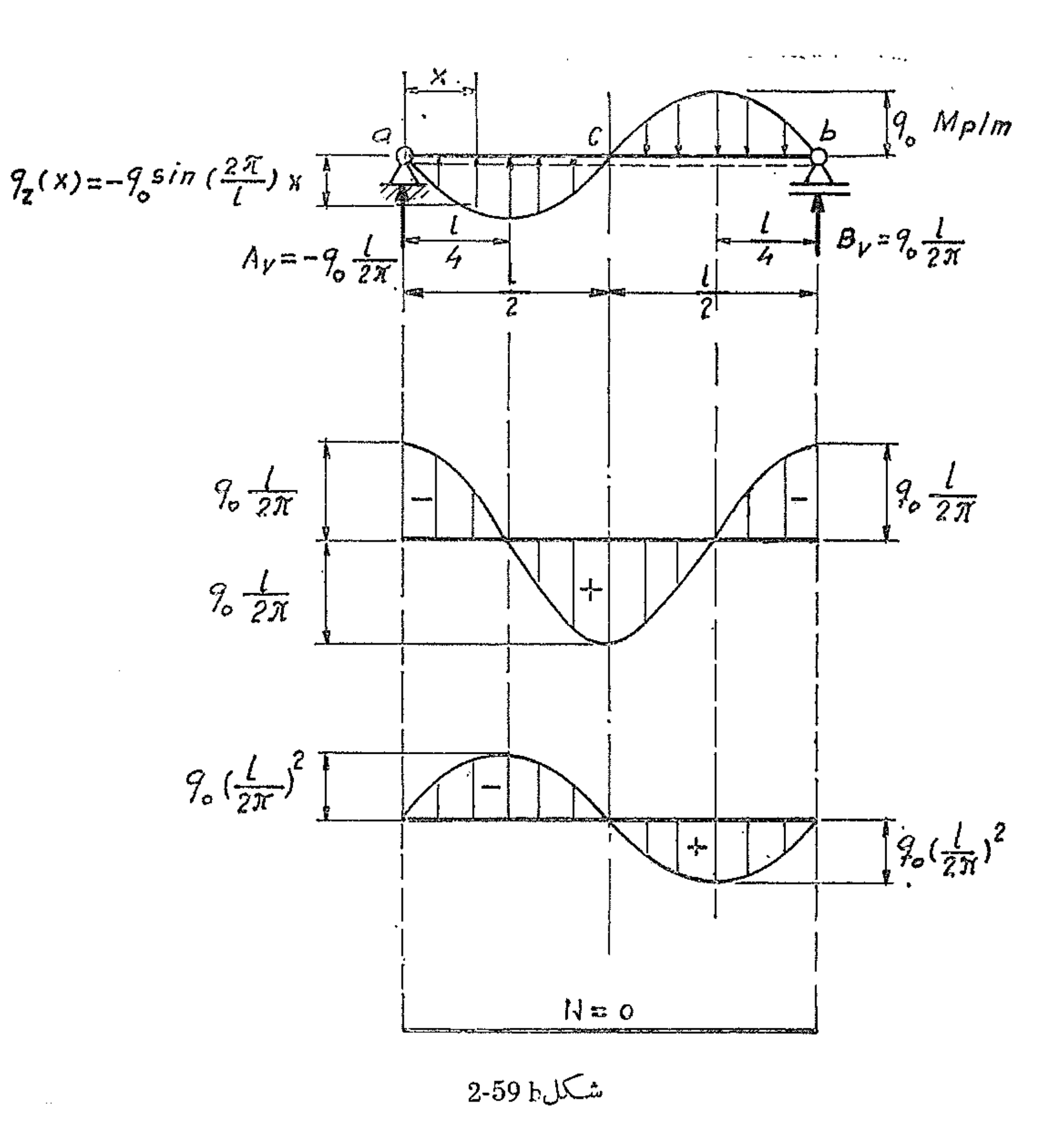
$$q_x (x) = q_0 \cos \left(\frac{\pi}{l}\right) x \qquad (1)$$

يتم الحصول على معادلة القوة العرضية بمكاملة المعادلة (1) :

$$Q (x) = - \frac{q_0 \, l}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{l}\right) x + C_1$$

ولا يمكن الآن تحديد الثابت C_1 الا بعد ايجاد معادلة عزم الانعطاف وذلك بمكاملة ثانيــة ، هكذا :

$$M (x) = \frac{q_0 \, l^2}{\pi^2} \cos \left(\frac{\pi}{l}\right) x + C_1 \, x + C_2$$



شكل 2-59 b

من الشرط M=0 عند a حيث x=0 ينتج ان :

$$C_2 = -\frac{q_0 l^2}{\pi^2}$$

ومن الشرط M=0 عند c نتيجة للتناظر العكسي . فان :

$$C_1 = \frac{2 q_0 l}{\pi^2}$$

وعلى ذلك تكون معادلة القوة العرضية هي :

$$Q = -\frac{q_0 l}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x + \frac{2 q_0 l}{\pi^2} \qquad (2)$$

كما ان معادلة عزم الانعطاف تصبح :

$$M = \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x + 2\frac{q_0 l}{\pi^2} x - \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \qquad (3)$$

يمكن رسم منحني القوة العرضية ومنحني عزم الانعطاف باستخدام قانون التنضد (قانون جمع الآثار) . ففي منحني القوة العرضية يرسم الخط المستقيم الذى يبعد عن خط القاعدة (خط النسب) ab بمسافة تساوي $2 q_0 l / \pi^2$ وهذا يعطي الحد الثاني للمعادلة . بعد ذلك يتخذ هـذا الخط قاعدة لرسم منحني جيبي سالب الاشارة هو المنحني $-\frac{q_0 l^2}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x$ ليعطي الحد الاول للمعادلة .

وبالمثل فان منحني عزم الانعطاف ينتج من جمع ثلاث دالات وهي :

١ ـ الحدالثالث للمعادله . وهو ثابت ـ ويتحدد بالخط المستقيم $-\frac{q_0 l^2}{\pi^2}$.

٢ ـ الخط المستقيم $2\frac{q_0 l}{\pi^2} x$ الذي يمثل الحد الثاني للمعادلة . ترتيب معادلة الخطالمستقيم عند b يساوي $+\frac{2q_0 l^2}{\pi^2}$ وعند a يساوي صفراً .

٣ ـ منحني جيب تمام $\frac{q_0 l^2}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x$ وهو يمثل الحد الاول للمعادلة .

مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-60) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثـال 29 :

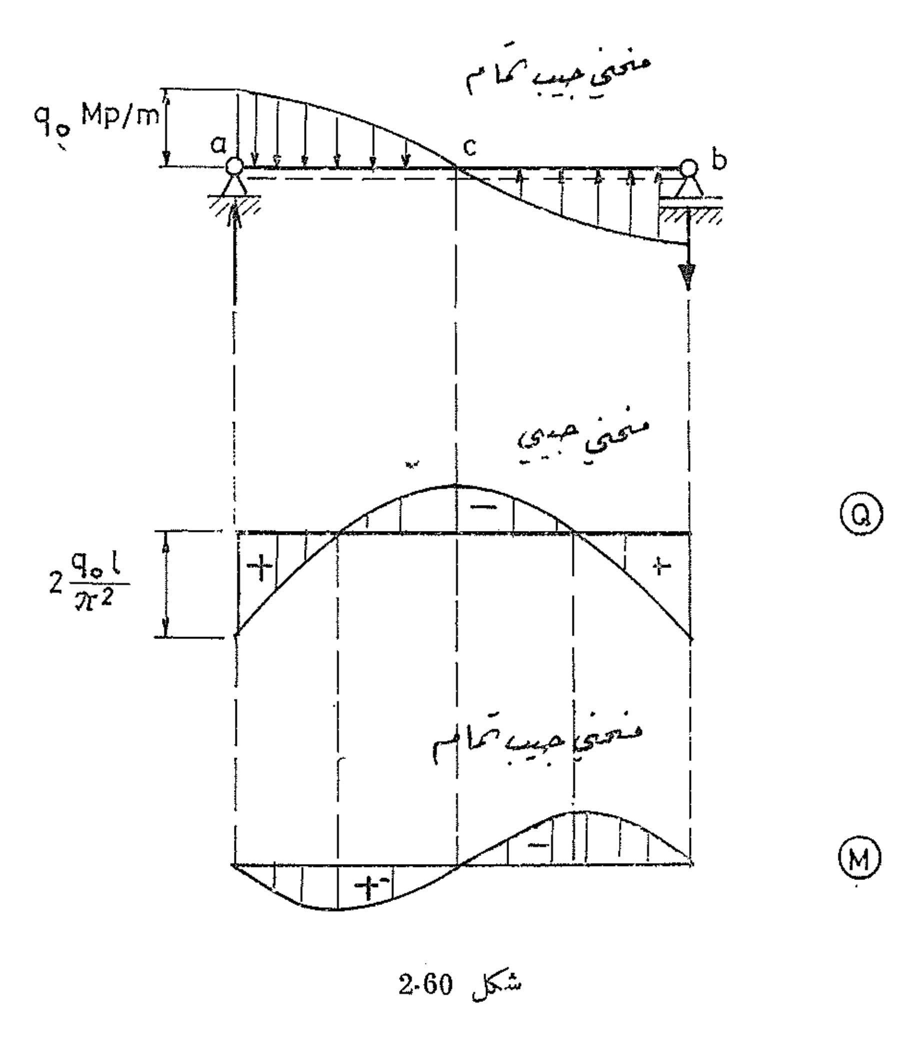
حمل جائز بسيط بحمولة موزعة على شكل منحني جيب تمام ـ طول موجة كاملة (شكل2-61).

المعطى : طول الجائز l والشدة الاعظمية للحمولة q_0 .

المطلوب : ايجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .

الحـــل :

معادلة التحميل (شدة الحمولة عند اي قطع يبعد x متراً عن a)هي :



شكل 2.60

$$q_x(x) = q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) x$$

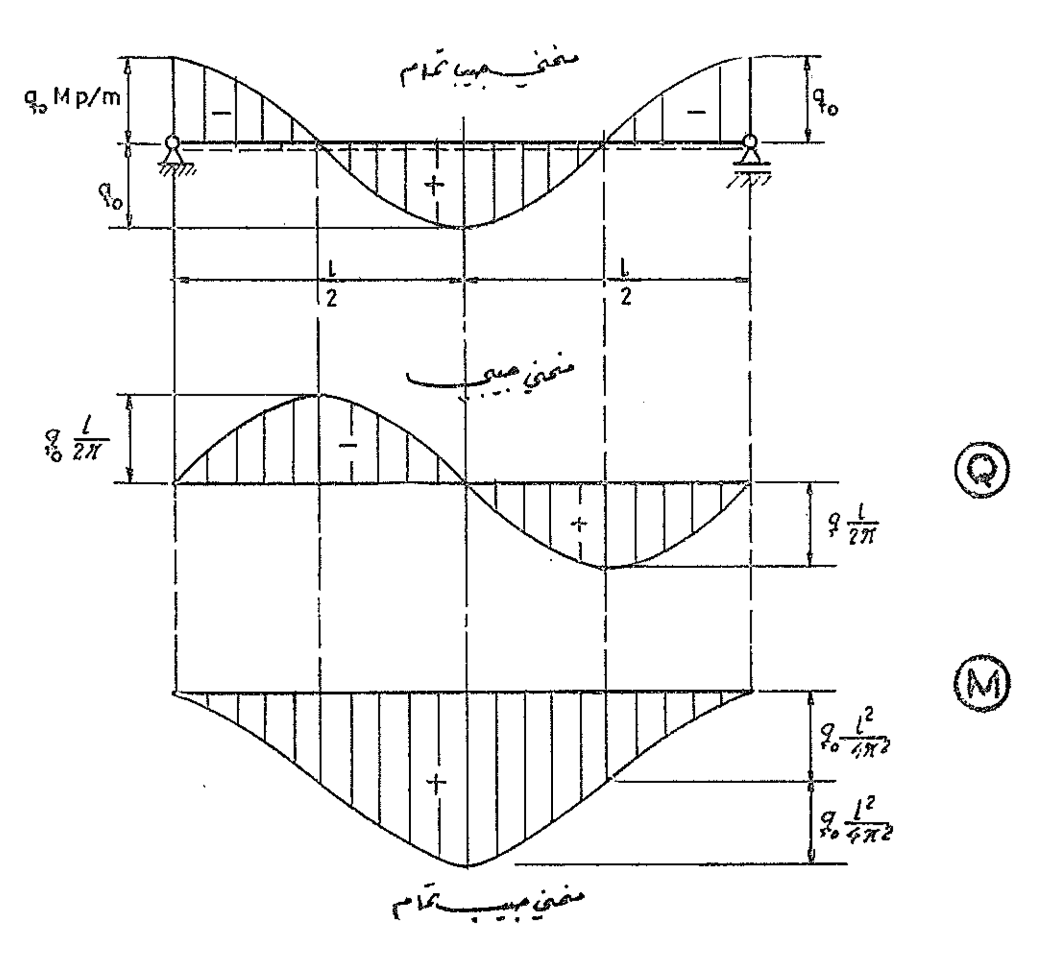
ومنها وبمعرفة ان القوة العرضية عند النقطة a تساوي صفراً ، تصبح معادلة القوة العرضية :

$$Q = -\frac{q_0\, l}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right) x \qquad (2)$$

وباجراء مكاملة للمعادلة (1) وبمعرفة ان عزم الانعطاف عند النقطة a يساوي صفراً ، تنتج معادلة عزم الانعطاف :

$$M = \frac{q_0\, l^2}{4\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) x - \frac{q_0\, l^2}{4\pi^2} \qquad (3)$$

من السهل تتبع منحنيات القوة العرضية وعزم الانعطاف الممثلة في الشكل (2.61) .



شكل 2-61

مثـــال 30 :

حمل جائز بسيط بحمولة موزعة على شكل قطع مكافىء من الدرجة الثانية (شكل 2.62).

المعطى : طول الجائز l والشدة العظمى للحمولة q_0 .

المطلوب : ايجاد قيم القطع .

الحـــل :

معادلة منحني الحمولة (شدة الحمولة عند اي قطع يبعد x عن المسند الثابت) العامة هي :

$$q_z\ (x) = a + bx + cx^2$$

شروط اطراف التحميل :

$$q_z\ (x = 0) = 0\ ;\ q_z\ (x = l/2) = q_0\ ;\quad q_z\ (x = l) = 0$$

بتحقيق المعادلة لشروط اطراف التحميل يتم الحصول على الثوابت :

$$a = 0 \qquad , \qquad b = + \frac{4\ q_0}{l} \qquad , \qquad c = - \frac{4\ q_0}{l^2}$$

وبذلك تصبح معادلة الحمولة كالتالية :

$$q_z\ (x) = q_0 \frac{4\ x}{l^2}\ (l - x) \qquad (1)$$

وبالمكاملة وباعتبار ان القوة العرضية عند منتصف الجائز (النقطة c) ، ولاسباب التناظر ، تساوي صفراً ، فان معادلة منحني القوة العرضية تصبح :

$$Q = -\ q_0\ \frac{2\ x^2}{3\ l^2}\ (3\ l - 2\ x) + q_0\ \frac{l}{3} \qquad (2)$$

وباجراء مكاملة ثانية وباعتبار ان M عند النقطه a (حيث x=0)تساوي صفراً يتم الحصول على معادلة منحني عزم الانعطاف :

$$M = -\ q_0\ \frac{x^3}{3\ l^2}\ (2\ l - x) + q_0\ \left(\frac{l\ x}{3}\right) \qquad (3)$$

من دراسة معادلة القوة العرضية (2) يتضح ما يلي :

١ - قيمة القوة العرضية عند a (يتم الحصول عليها بتعويض x تساوي صفراً) هي :

$$Q = + \frac{q_0\ l}{3}$$

وعند b (بتعويض x تساوي l) هي :

$$Q = - \frac{q_0\ l}{3}$$

وبذلك تتحدد ثلاثة نقاط من منحني Q .

٢ - من المعلوم ان منحني Q هو قطع مكافىء من الدرجة الثالثة وان ميل المماس عليه عند c يساوي شدة الحمولة هناك وهي تساوي $q_z\ (x = l/2)$ ميغا بوند على المتر .

اما المعادلة (3) التي تعطي منحني عزم الانعطاف فيتضح منها ما يلي :

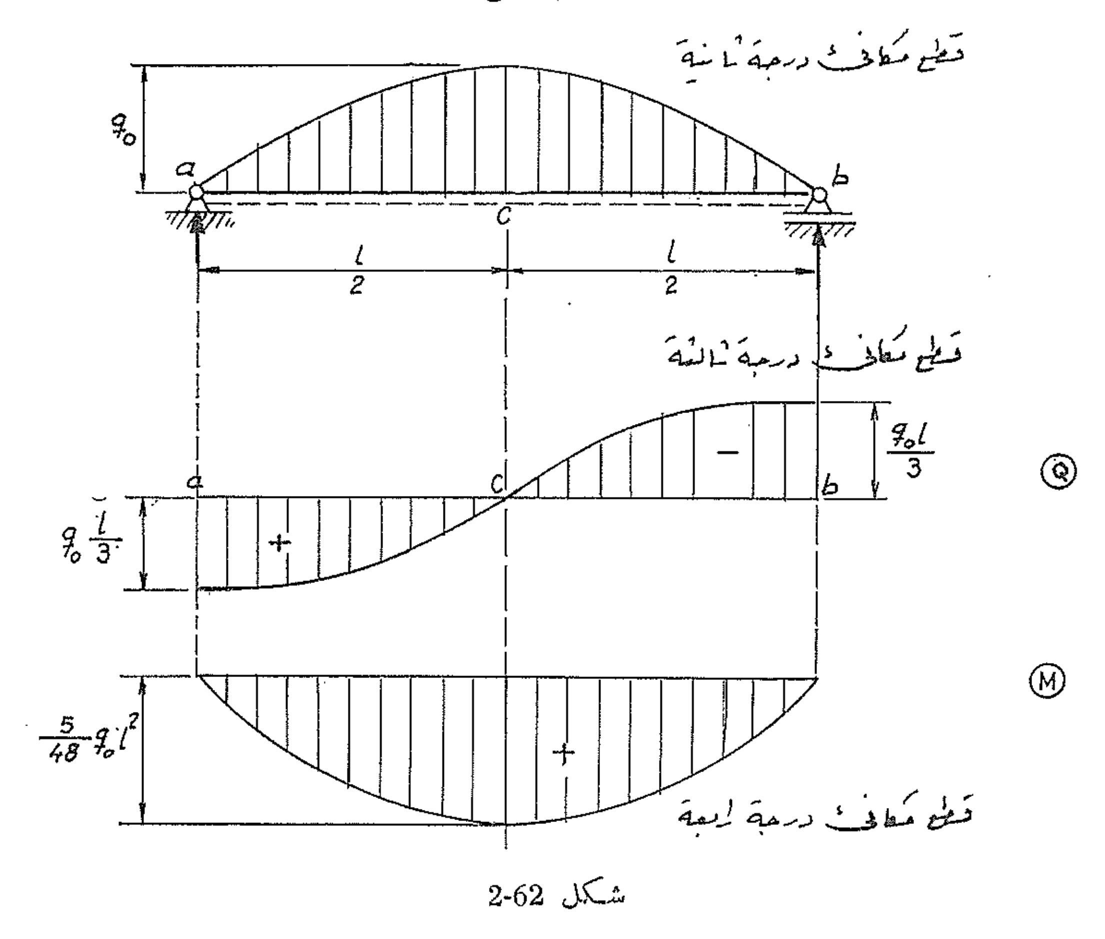
١ ـ ان القيمة العظمى لعزم الانعطاف تقع في منتصف الجائز وهي :

$$\max M = \frac{5}{48}\ q_0\ l^2$$

٢ ـ ان المنحني هو قطع مكافىء من الدرجة الرابعة وان ميل المماس عليه عنـــد الطرف a يساوي القوة العرضية هناك ، أي $q_0\ l/3$.

مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-62) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-62

مثـال 31 :

يتعرض الجائز البسيط (شكل 2-63) لتأثير عزوم موزعة بانتظام تؤثر بين النقطتـين b , a وشدتها m ميغا بوند متر على المتر (Mpm/m) .

المعطى : طول الجائز l وشدة الحمولة m .

المطلوب : ايجاد مخططات قيم القطع ومعادلاتها .

الحـــل :

١ ـ ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل يتم الحصول على ردود افعال المساند :

$$\Sigma M_a = 0 : B_v . l - m . l = 0 \quad ; \quad B_v = m \quad Mp$$

$$\Sigma V = 0 : B_v - A_v = 0 \quad ; \quad A_v = m \quad Mp$$

٢ ـ قيم القطع :

من الواضح ان قيمه القوة العرضية عند اي قطع في الجائز تساوي رد الفعل وباشارة سالبة (يؤكد ذلك تطبيق شرط توازن القوى الشاقولية على الجزء المقطوع الايسر او الايمن) أي أن :

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad Q + A_v = 0 \quad ; \quad Q = - m \quad Mp$$

وذلك لان العزوم الموزعة على الجائز لا تغير قيمة القوة العرضية بين قطع وآخر . لايجاد مخطط عزم الانعطاف نتخيل القطع s—s الذي يبعد x عن المسند الثابت a ثم نطبق شرط توازن العزوم على الجزء المقطوع الايسر وحول نقطة القطع :

$$\Sigma M_x = 0 : M = m . x - A_v . x = 0$$

تمثل القيمة $A_v.x$ العزم الناتج عن رد فعل المسند A_v أما القيمة m.x فتمثل العزم الناتج عن العزوم الموزعة بين a و s .

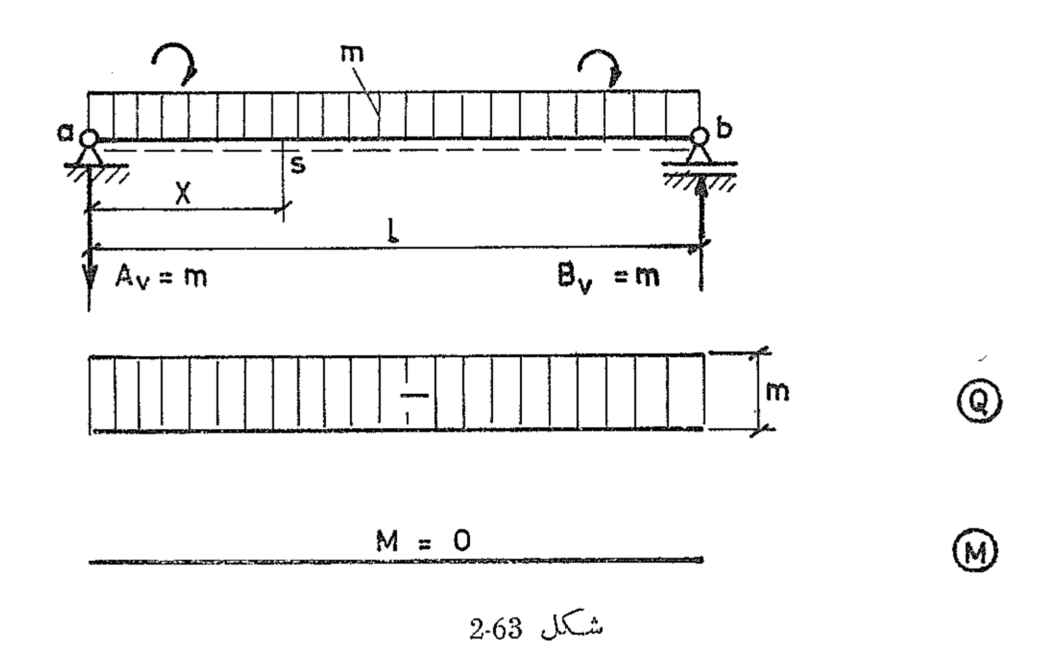
تشير معادلة العزم الى ان عزم الانعطاف ينعدم في جميع قطوع الجائز ab .

٣ ـ مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-63) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثـال 32 :

تعرض جائز بسيط لتأثير عزم خطي التوزيع (مثلثي ، أي متغير من الدرجة الاولى) (شكل 2-64) .



شكل 2-63

المعطى : طول الجائز l والشدة العظمى للحمـولة الموزعة m_0 (عزوم موزعة خطيـاً) أما تغير شدة الحمولة فيبتدأ من الصفر عند a الى أن يصل عند النقطة b الى قيمته العظمى m_0 .

المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع .

الحـل :

١ ـ ردود أفعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$\Sigma H = 0 \;:\; A_H = 0$

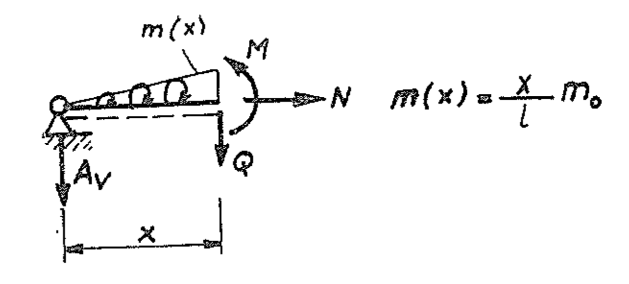
$\Sigma M_a = 0 :\; B_v \,.\, l - \frac{1}{2} m_0 \, l = 0 \quad ; \quad B_v = \frac{1}{2} m_0 \;\; Mp$

$\Sigma V = 0 \;:\; B_v - A_v = 9 \quad ; \quad A_v = \frac{1}{2} m_0 \;\; Mp$

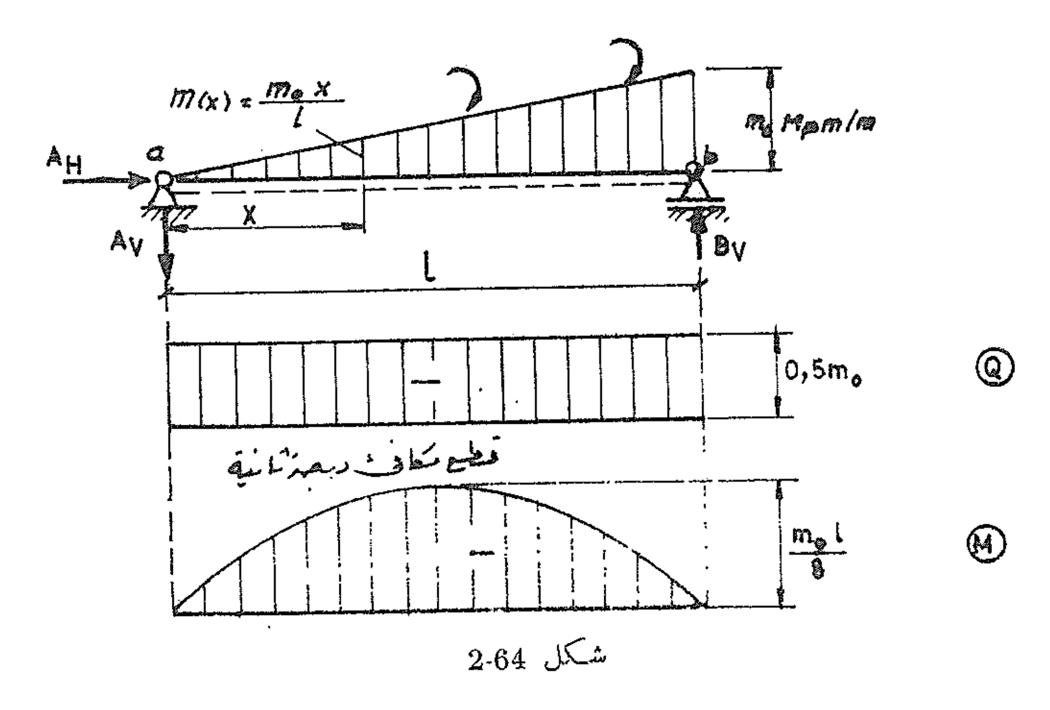
٢ ـ قيم القطع :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايسر المقطوع (شكل 2-64 a) ينتج :

$\Sigma H = 0 \;:\; N = 0$



شكل 2.64 a



شكل 2.64

$$\Sigma V = 0 \quad : Q + A_v = 0 \quad ; \quad Q = -\frac{1}{2}\, m_0 \quad Mp$$

$$\Sigma M_x = 0 : \; M - \frac{1}{2}\, m\,(x)\,.\,x + A_v\,.\,x = 0 \; ; \; M = -\; \frac{m_0}{2}\, x + \frac{m_0}{l}\; x^2$$

من المعادلات الاخيرة يتم التوصل الى أن القوة العرضية على طول الجائز ثابتة وان شكل العزم يتبع منحني قطع مكافىء درجة ثانية .

٣ ـ مخطات قيم القطع .

لقد تم في الشكل (2.64) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثـال 33 :

يتعرض الجائز البسيط لتأثير حمولة تتألف من عزوم موزعة خطياً كما يشير الشكل (2.66) .

المعطى : طول الجائز l والشدة العظمى للحمولة الموزعة m_0 مقاسة بالميغا بوندمتر على المـــتر . (Mpm/m)

المطلوب : ايجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .

الحـل :

١ ـ ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجمله ككل يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

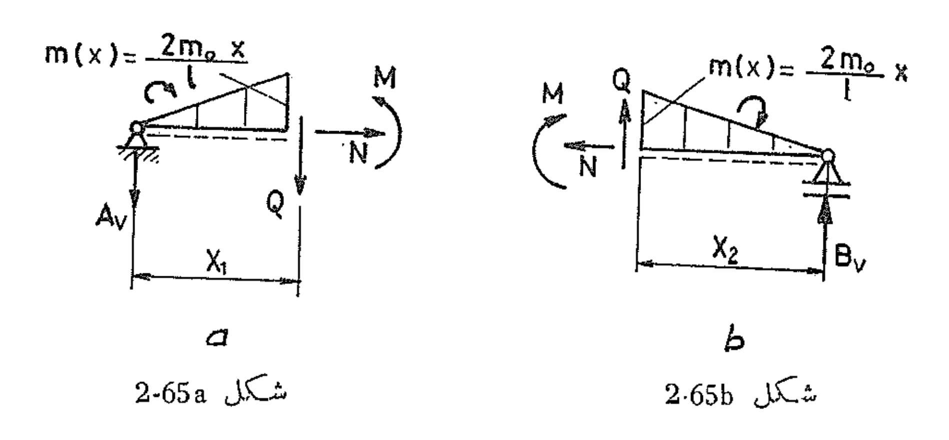
$$\Sigma H = 0 \quad : \; A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \; : \; B_v \, . \, l - 2 \; . \; \frac{1}{2} \, m_0 \, \frac{l}{2} = 0 \; ; \; B_v = \frac{m_0}{2} \, Mp$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \; B_v - A_v = 0 \qquad ; \; A_v = \frac{m_0}{2} \, Mp$$

٢ ـ قيم القطع :

يتألف الجائز من مجالين ، وبسبب التناظر كان يكفي إيجـــاد قيم القطع في مجال واحد ثم تطبيق خواص التناظر عليها ، لولا أن طلاب هـذه المرحلة لاتدرسها ولذلك سوف يصـار لحساب المجالين .



شكل 2-65a   شكل 2-65b

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq l/2)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2-65a) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q + A_v = 0 \ ; Q = - \frac{m_0}{2} \ Mp$$

$$\Sigma M_{x1} = 0 : M - \frac{1}{2} m(x).x_1 + A_v.x_1 = 0$$

$$M = - \frac{m_0}{2} x_1 + \frac{m_0}{l} x_1^2$$

تمثل هذه المعادلة قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية .

المجال II $(0 \leq x_2 \leq l/2)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل 2-65 b) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q = - B_v \ ; Q = - \frac{m_0}{2} \ Mp$$

$$\Sigma M_{x2} = 0 : M - B_v .x_2 + \frac{1}{2} m(x).x_2 = 0$$

$$M = \frac{m_0}{2} x_2 - \frac{m_0}{l} x_2^2$$

تمثل هذه المعادلة معادلة قطع مكافىء من الدرجة الثانية .

٣ ـ مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-66) تمثيل مخططات قيم القطع .

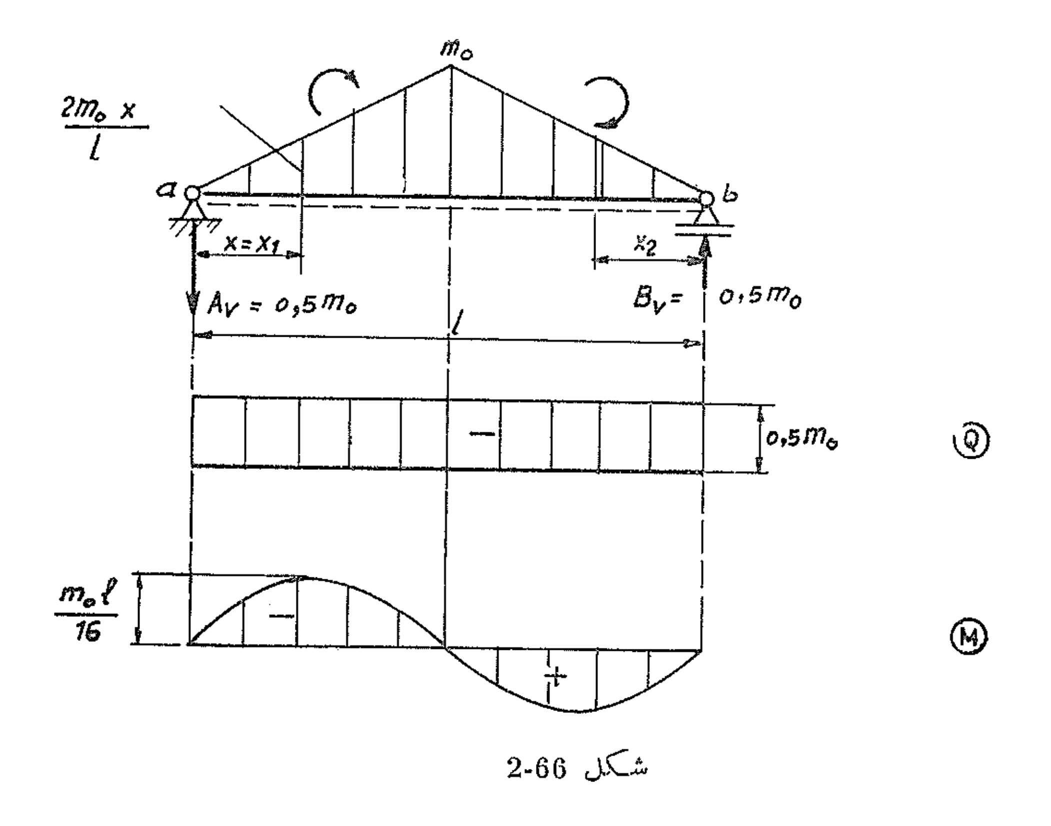
مثال 34 :

تعرض الجائز البسيط لتأثير ثلاثة قوى وحيدة هي $P_1 = 4{,}0$ Mp و$P_2 = 3{,}0$ Mp و$P_3 = 2{,}0$Mp (كما في الشكل 2-67) .

المطلوب : رسم مخططات القوة الناظمية والقوه العرضية وعزم الانعطاف .

الحـل :

بسبب كون الجائز القضيبي مستقيم وبسبب تأثير قوى شاقولية فقط لذلك تنعدم القوة الناظمية على طول الجائز (N=0) .



شكل 2-66

١ ـ ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجائز ككل ينتج :

$$\Sigma M_b = 0 : A_v = \frac{1}{6} (P_1.4,0 + P_2.3,0 + P_3.1,0) = 4,5 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_a = 0 : B_v = \frac{1}{6} (P_1.3,0 + P_2.3,0 + P_3.5,0) = 4,5 \text{ Mp}$$

٢ ـ قيم القطع :

تحسب القوى العرضية في القطوع التالية :

$$Q_0 = A_v = 4,5 \text{ Mp}$$

$$Q_1 = 4,5 - P_1 = 4,5 - 4,0 = + 0,5 \text{ Mp}$$

$$Q_2 = 0,5 - P_2 = 0,5 - 3,0 = - 2,5 \text{ Mp}$$

$$Q_3 = - 2,5 - P_3 = - 2,5 - 2,0 = - 4,5 \text{ Mp}$$

كما تحسب العزوم في كل من النقاط 1 و 2 و 3 والتي تبلغ :

$$M_1 = A_v.2,0 \quad = 4,5.2,0 \quad = 9,0 \text{ Mpm}$$

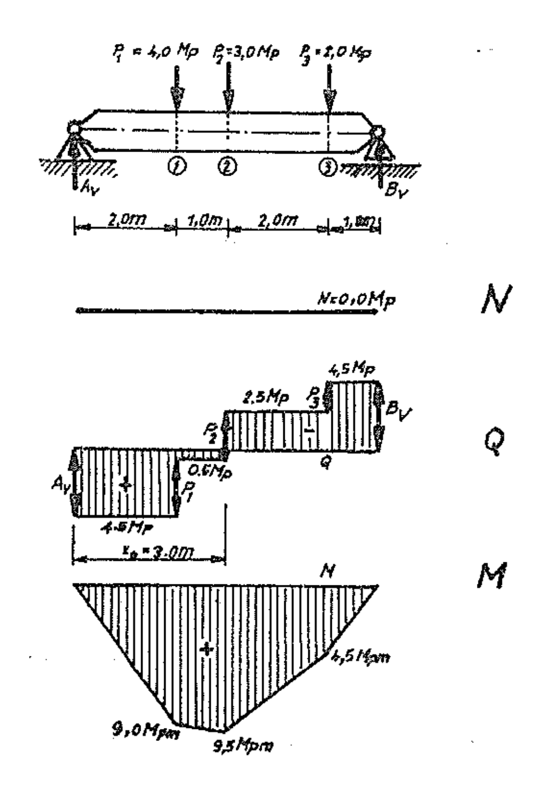
$$M_2 = A_v.3,0 - P.1,0 = 4.5.3,0 - 4,0.1,0 = 9,5 \text{ Mpm}$$

$$M_3 = B_v.1,0 \quad = 4,5.1,0 \quad = 4,5 \text{ Mpm}$$

تتوزع القوى العرضية في كل المجالات توزيعاً ثابتاً مما يؤدي لان يكون توزيع العـزوم في تلك المجالات خطياً .

تغير القوة العرضية إتجاهها في النقطة $x_0 = 3,0m$ وبذلك يأخذ عزم الانعطاف في تلك النقطة قيمة حدية :

$$\max M = 9,5 \text{ Mpm}$$



شكل 2-67

لقد تم في الشكل (2-67) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 35 :

يتعرض الجائز البسيط (شكل 68-2) لتأثير حمولة موزعـــة بانتظام شدتهـا $q_0 = 3\ Mp/m$ تؤثر على رقعة من الجائز .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحـل :

١ - ردود أفعال المساند :

لاسباب التناظر فان ردود أفعال المساند تبلغ :

$$A_v = B_v = \frac{R}{2} = 6,0\ Mp$$

٢ - قيم القطع :

لكون الجائز القضيبي مستقيم ولكون الحمولات المؤثرة شاقولية ، لذلك تنعـدم القوة النـاظمية على طول الجائز .

تبلغ القوى العرضية في الاجزاء الطرفية من الجائز الخالية من الحمولة القيم التالية :

$+6,0\ Mp$ و $-6,0\ Mp$ ، وفي الاجزاء المحملة تتوزع القوة العرضية تبعاً للحمولة بشكل خطي ابتداء من $+6,0\ Mp$ الى $-6,0\ Mp$

ويبلغ عزم الانعطاف في النقاط 1 و 2 القيم التالية :

$$M_1 = A.2,0 = 6,0.2,0 = 12,0\ Mpm$$

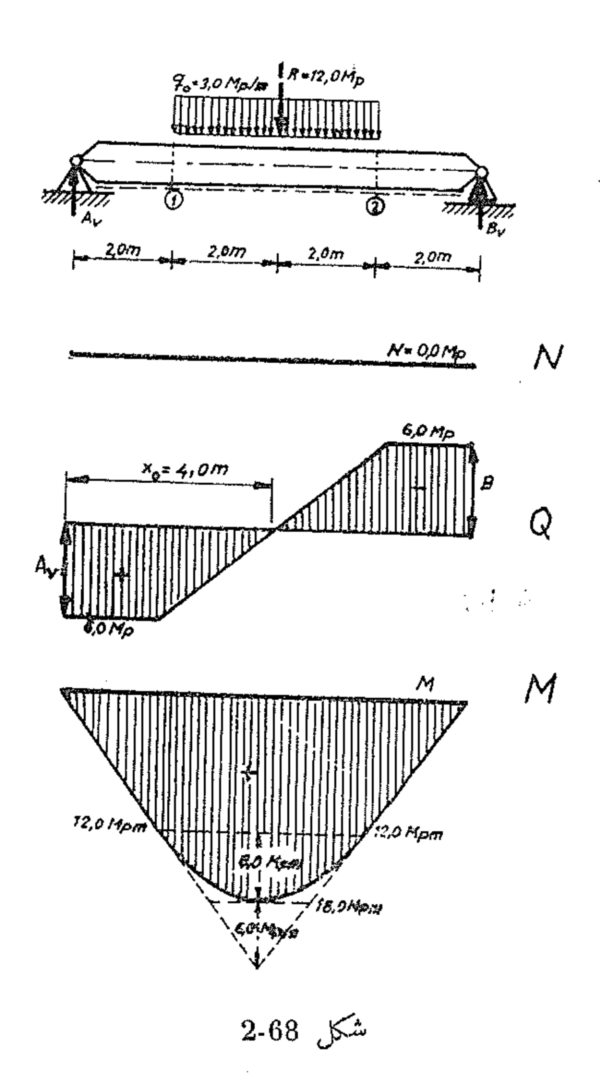
$$M_2 = B.2,0 = 6,0.2,0 = 12,0\ Mpm$$

يتوزع عزم الانعطاف في المجالات الطرفية خطياً ويتوزع تحت الحمولة الموزعة بانتظام على شـكل مقطع مكافىء من الدرجة الثانية .

تغير القوة العرضية إشارتها في النقطـة $x_0 = 4,0\ m$ أما عزم الانعطف فيـــأخذ هناك قيمة حدية هي :

$$\max M = 12,0 + \frac{q_0 . 4,0^2}{8} = 12,0 + 6.0 = 18,0\ Mpm$$

لقد تم في الشكل (68-2) تمثيل قيم القطع .



شكل 2-68

مثال 36 :

يتعرض الجائز البسيط (شكل 2-69) لتأثير قوتين وحيدتين ولتأثير حمولة منتظمة التوزيع تؤثر على رقعة من الجائز .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند :

تبلغ ردود افعال المساند ، التي يتم الحصول عليها بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ، القيم التالية :

$$A_v = \frac{1}{10,0} (R.8,0 + P_1.6.0 + P_2 \cdot 4.0) = 10,6 \text{ Mp}$$

$$B_v = \frac{1}{10,0} (R.2,0 + + P_1.4,0 + P_2.6,0) = 5,4 \text{ Mp}$$

٢ - قيم القطع

تتوزع القوة العرضية تحت الحمولة الموزعة بانتظام بشكل خطي ابتداء من :

$$A = 10,6 \text{ Mp}$$

الى :

$$A - R = 10,6 - 8,0 = 2,6 \text{ Mp}$$

تأخذ القوه العرضية في المجال الخالي من التحميل والواقع بين النقاط 2,1 ، القيمة الثابتةالتالية:

$$2,6 - P_1 = 2,6 - 5,0 = - 2,4 \text{ Mp}$$

ثم تقفز (تنزلق) في المجال غير المحمل الذي يليه الى القيمة :

$$- 2,4 - P_2 = - 2,4 - 3,0 = - 5,4 \text{ Mp}$$

اما العزوم فتأخذ في النقاط 2,1 القيم التالية :

$$M_1 = A_v\, 4,0 - R.2,0 = 10,6 \cdot 4,0 - 8,0.2,0 = 26,4 \text{ Mpm}$$

$$M_2 = B_V.4,0 \qquad = 5,4.4,0 \qquad = 21,6 \text{ Mpm}$$

وفي النقطة 3 فان العزم يبلغ القيمة التالية :

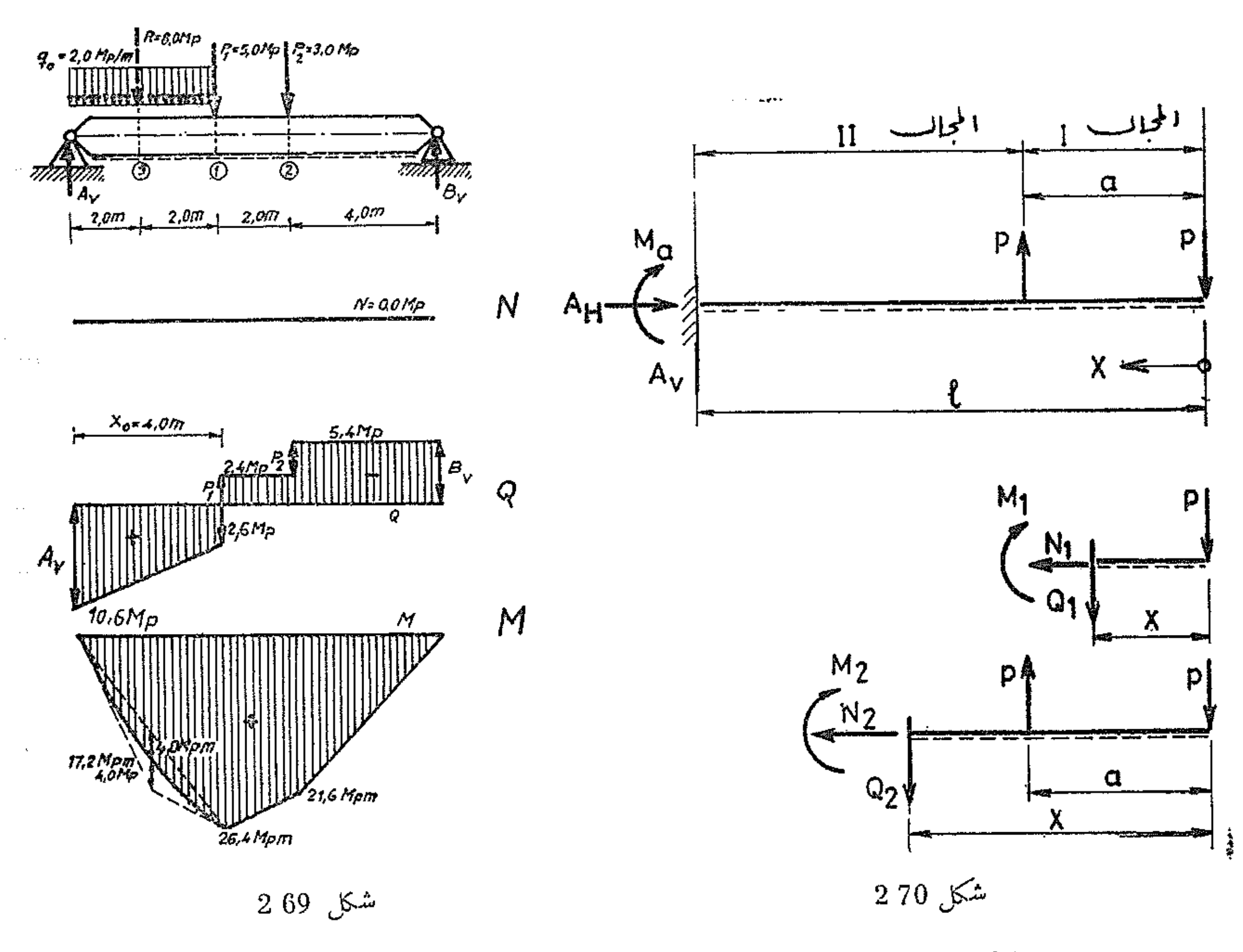
$$M_3 = \frac{26,4}{2} + \frac{q_0 \; 4,0^2}{8} = 13,2 + 4,0 = 17,2 \text{ Mpm}$$

يتألف خط العزم من قطع مكافيء تحتالحمولة الموزعة ومن اجزاء خطية بين القوى B,P_2,P_1.

تغير القوة العرضـــية اشارتها في النقطة x_0=4,0m وبذلك يأخذ عزم الانعطاف هنـــاك القيمة الحدية :

$$\max M = 26,4 \text{ Mpm}$$

لقد تم في الشكل (269) رسم مخططات قيم القطع .



شكل 2 69

شكل 2 70

٢ ـ ٥ الجائز البارز (الظفر)

ان الجائز البارز هو جائز موثوق وثاقه تامة من طرف وحر من الطرف الاخر وهو يمثل ابسط انواع الانشاءات على الاطلاق .

٢ ـ ٥ ـ ١ امثلة على الجائز البارز

مثال 37 :

حمل الجائز البارز كما في الشكل (2.70) .
المطلوب : ايجاد قيم القطع .

الحل :

١ ـ حساب ردود افعال المساند

بتطبيق شروط التوازن على الجملة كـل يتم الحصول على النتائج التالية :

$\Sigma H = 0 : A_H = 0$

$\Sigma V = 0 : A_v + P - P = 0 \;\; ; \;\; A_v = 0$

$\Sigma M_a = 0 : M_a + P.l - P(l-a) = 0 \; ; \; M_a = Pa$

٢ ـ حساب قيم القطع بطريقة القطع .

يتألف الجائز من مجالين .

المجال $I(0 \leqq x \leqq a)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن المقطوع (شكل 2.70b) ينتج :

$\Sigma H = 0 : N_1 = 0$

$\Sigma V = 0 : Q_1 = -P$

$\Sigma M_x = 0 : M_1 = -P.x$

التدقيق :

$$\frac{dM_1}{dx} = \frac{d}{dx}(-Px) = -P = Q_1$$

المجـال $II(a \leqq x \leqq l)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن المقطوع (شكل 2.70c) ينتج :

$\Sigma H = 0 : N_2 = 0$

$\Sigma V = 0 : Q_2 = 0$

$\Sigma M_x = 0 : M_2 = -Pa = \text{const}.$

التدقيق :

$$\frac{dM_2}{dx} = \frac{d}{dx}(-Pa) = 0 = Q_2$$

٣ ـ حساب قيم القطع باستخدام العلاقات التفاضلية :

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \; ; \; dQ = -q_z(x)dx$$

بالمكاملة ينتج :

$$Q = -\int q_z(x)\ dx$$

$$\frac{dQ}{dx} = Q \quad ; \quad dM = Q\ dx$$

بالمكاملة يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$M = \int Q\, dx = -\int \left[\int q_z\ (x)\ dx \right] dx$$

المجال I$(0 \leqq x \leqq a)$:

$$q_{z1}\ (x) = 0$$

$$Q_1 = \int\ o\ dx = C_1$$

$$M_1 = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$$

شروط الاطراف الستاتيكية :

$$x = 0 : Q_1 = -\ P \quad : \quad C_1 = -\ P$$

$$M_1 = 0 \quad : \quad C_2 = 0$$

بتعويض قيم الثوابت في العلاقات يتم الحصول على قيم القطع :

$$Q = -\ P$$

$$M_1 = -\ Px$$

$$x = 0 \quad : \quad M_2 = 0$$

$$x = a \quad : \quad M_1 = -\ Pa$$

المجال II$(a \leqq x \leqq l)$:

$$q_{z2} = 0$$

$$Q_2 = \int\ o\ dx = C_3$$

$$M_2 = \int C_3 dx = C_3 x + C_4$$

شروط الاطراف :

$$x = a \;:\; Q_2 = 0 \;;\; C_3 = 0$$

$$M_2 = M_1 \;;\; C_4 = -Pa$$

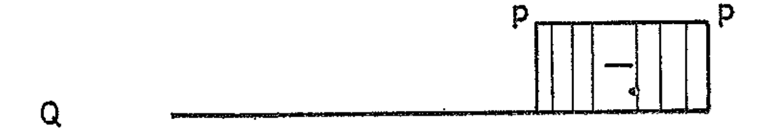
بتبديل قيم الثوابت في المعادلات الاخيرة يتم الحصول على قيم القطع :

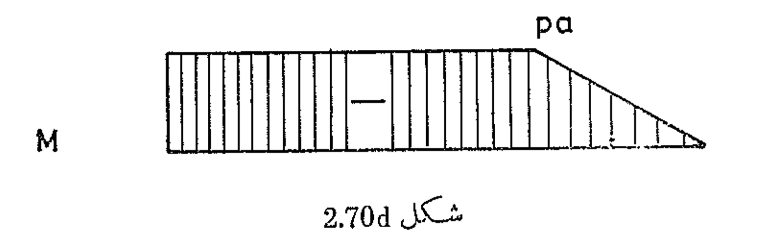
$$Q_2 = 0$$

$$M_2 = -Pa = \text{const}.$$

لقد تم في الشكل (2.70d) تمثيل مخططات قيم القطع .







شكل 2.70d

مثال 38 :

حمل الجائز البارز (الظفر) كما في الشكل (2.71) .

المعطى : مساحة المقطع العرضي للجائز F وطول الجائز l والوزن النوعي لمادة الجائز γ .

المطلوب : ايجاد مخططات قيم القطع وذلك عندما

١ ـ يهمل الوزن الذاتي للجائز .

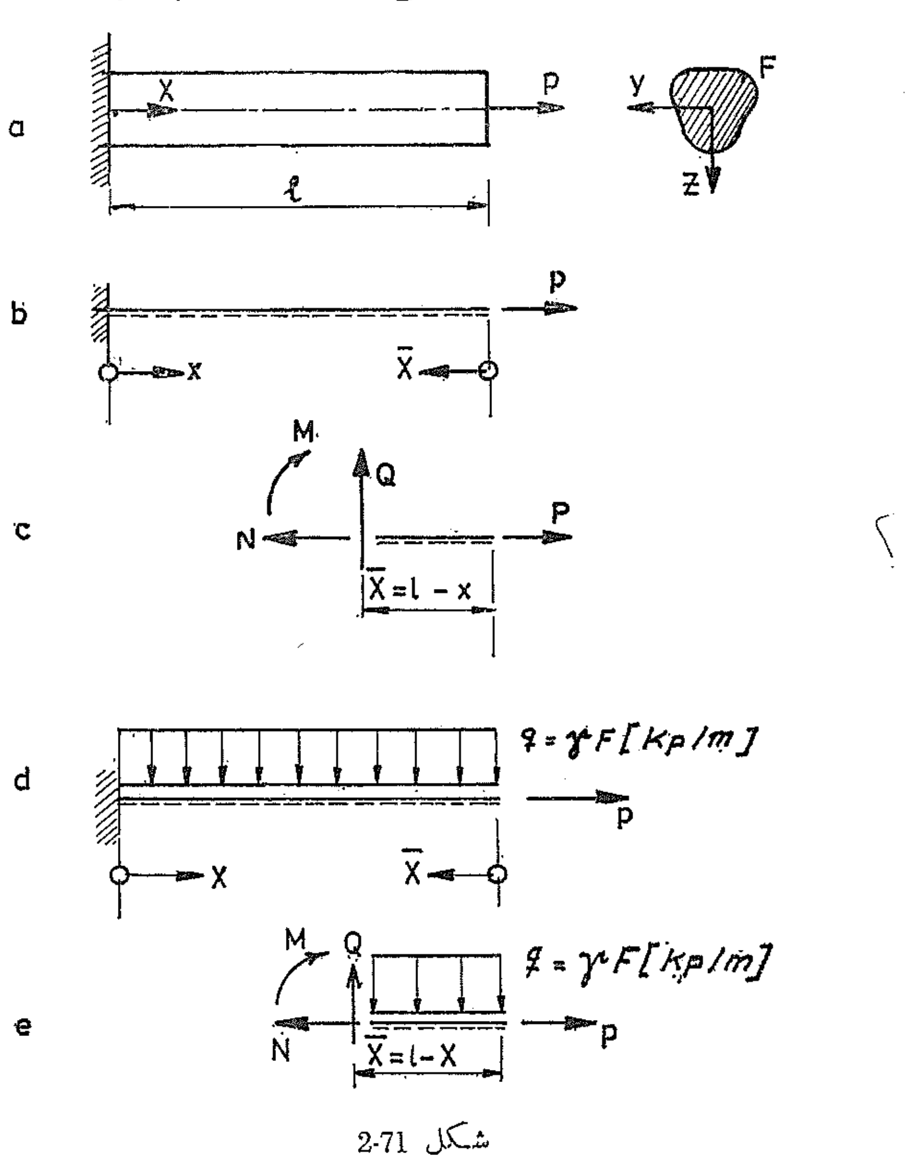
٢ ـ يؤخذ الوزن الذاتي للجائز بعين الاعتبار .

الحـــل :

آ ـ ايجاد قيم القطع باستخدام طريقة القطع

آ ـ ١ عندما يهمل الوزن الذاتي للجائز (شكل 2.71b) .

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن المقطوع (شكل 2.71c) ينتج :



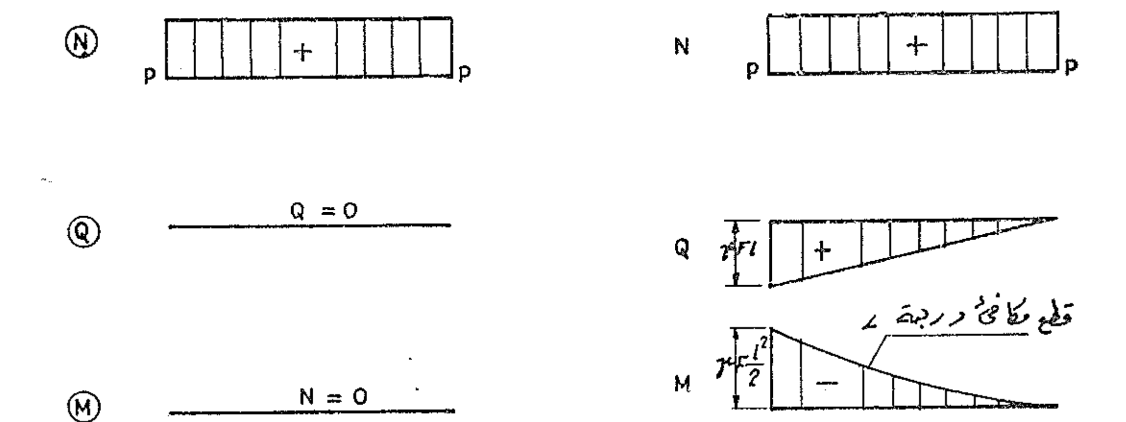
شكل 2-71

$$\Sigma H = 0 : N = + P$$

$$\Sigma V = 0 : Q = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 : M = 0$$

لقد تم تمثيل مخططات قيم القطع في الشكل (2.72a) .



شكل 2.72

آ ـ ٢ عندما يؤخذ الوزن الذاتي للجائز بعين الاعتبار (شكل 2.71 d) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن المقطوع (شكل 2.71e) يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 \; ; \; N = +P$$

$$\Sigma V = 0 : Q = q \cdot \bar{x} = \gamma . F . \bar{x} = \gamma \, F(l - x)$$

تمثل معادلة القوة العرضية خطاً مستقيما يمر من مركز الاحداثيات $\bar{x}$:

$$\bar{x} = 0 : Q = 0$$

$$\bar{x} = l : Q = \gamma \, F \, l$$

$$\Sigma M_x = 0 : M = -q \, \frac{\bar{x}^2}{2} = -\gamma F \, \frac{\bar{x}^2}{2} = -\gamma F \, \frac{(l-x)^2}{2}$$

تمثل معادلة عزم الانعطاف قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية :

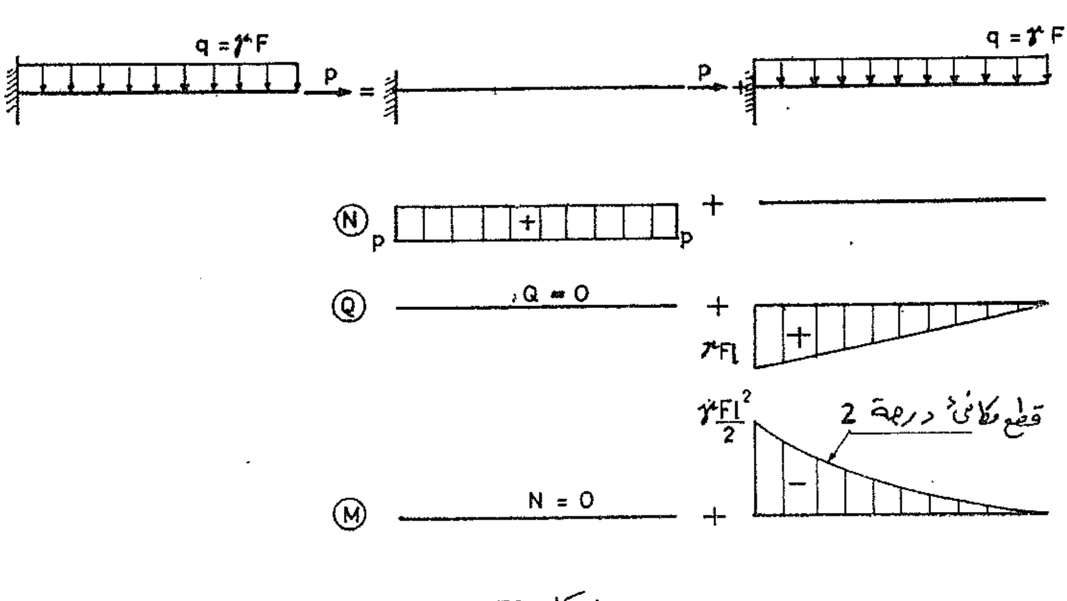
$$\bar{x} = 0 : M = 0$$

$$\bar{x} = l : M = -\gamma F \; l^2/2$$

لقد تم في الشكل 2.72b تمثيل مخططات قيم القطع .

ب ـ ايجاد قيم القطع باستخدام قانون التنضد (قانون جمع الاثار) .

يمكن الحصول على نفس النتيجة السابقة باستخدام قانون التنضد الذي سيتم في الفقرات التالية دراسته بشكل اكثر تفصيلا (شكل 2-73) .



شكل 2.73

مثال 39 :

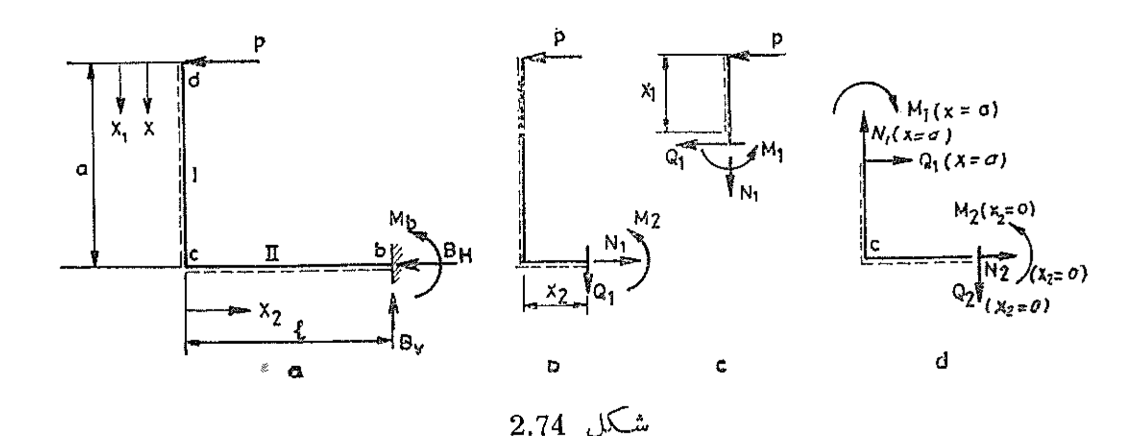
حمل الجائز البارز كما في الشكل (2.74a) .

المطلوب : ايجاد مخططات قيم القطع M,Q,N .

الحـــل :

١ ـ ايجاد ردود افعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل يتم الحصول على ردود افعال المساند المطلوبة :



شكل 2.74

$$\Sigma H = 0 : B_H + P = 0 \quad , \quad B_H = -P$$

$$\Sigma V = 0 : B_v = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 : M_b + P.a = 0 : M_b = -P.a$$

٢ ـ حساب قيم القطع

لقد كان ممكناً في هذه الحالة ايجاد قيم القطع دون معرفة مسبقة لردود افعال المساند .

المجال $I(0 \leqq x_1 \leqq a)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع العلوي (شكل 2.74 c) ينتج .

$$\Sigma H = 0 : Q_1 + P = 0 , Q_1 = -P$$

$$\Sigma V = 0 : N_1 = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_1 + P x_1 = 0 \quad ; \quad M_1 = -P x_1$$

$$x_1 = 0 \cdot M = 0$$

$$x_1 = a : M_1 = -Pa$$

المجال $II(0 \leqq x_2 \leqq l)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن الجزء المقطوع الايسر (شكل 2.74b) العلاقات التالية :

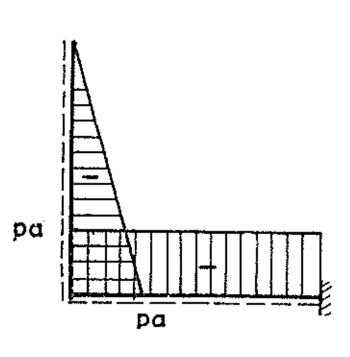
$$\Sigma H = 0 : N_2 - P = 0 \quad , \quad N_2 = +P$$

$$\Sigma V = 0 : Q_2 = 0$$

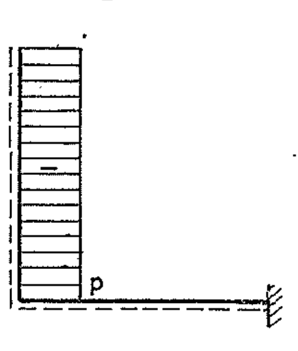
$$\Sigma M_x = 0 : M_2 + Pa = 0 \quad , \quad M_2 = -Pa$$

٣ ـ رسم مخططات قيم القطع :

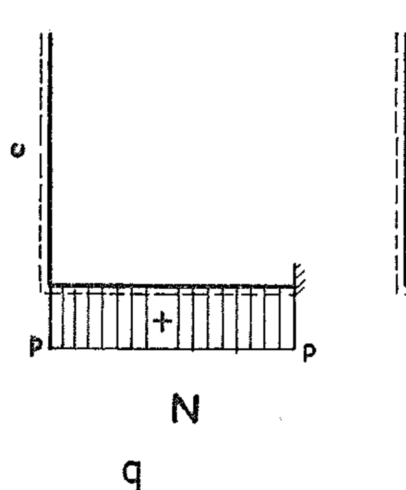
لقد تم في الشكل (2.75) رسم مخططات قيم القطع .



M



Q



p

شكل 2.75

التدقيق :

المجال I :

$$\frac{d M_1}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}(-P x_1) = -P = Q$$

المجـال II :

$$\frac{d M_2}{dx_2} = \frac{d}{dx_2}(-Pa) = 0$$

العقدة c (شكل 2.74d) :

$$\Sigma H = 0 \; : \; N_2 + Q_1 = 0 \qquad ; \; N_2 = -Q_1$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; N_1 - Q_2 = 0 \qquad ; \; N_1 = Q_2$$

$$\Sigma M_c = 0 \; : \; M_1 (x_1 = a) - M_2 (x_2 = 0) = 0 \; ; \; M_1 (x_1 = a) = M_2 (x_3 = 0)$$

٢ ـ ٦ الجائز البسيط ممتد الاطراف

هذا النوع من الجيزان هو جائز بسيط لا تكون فيه المساند المفصلية في طرف الجائز وإنما

يبعد أحد السندين أو كلاهما عن طرف الجائز نحو الداخـل بحيث يبـــدو الجائز ممتداً الى مابعد المسندين .

ولا يمثل هذا النوع من الجيزان أية صعوبات خاصة في الحل وإنمـــا يمكن تحديد ردود أفعال المساند وردود افعال القطع (قيم القطع) فيه بالطرق السابقة .

مثال 40 :

يتعرض الجائز عند الاطراف لتأثير عزمين وحيدين (شكل 2.76) .

المطلوب :

١ ـ حساب ردود افعال المساند .

٢ ـ حساب قيم القطع ورسم المخططات .

الحـل :

١ ـ حساب ردود افعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن على الجملة كـكل ينتج :

$\Sigma H = 0 \ : \ A_H = 0$

$\Sigma M_a = 0 \ : \ B_v \, . \, 2{,}0 + M_1 - M_1 = 0 \quad ; \quad B_v = 0$

$\Sigma V = 0 \ ; \ A_v = 0$

التدقيق :

$\Sigma H = 0 \ : \ A_v \, . \, 2 + M_1 - M_1 = 0$

٢ ـ حساب قيم القطع (M,Q,N) :

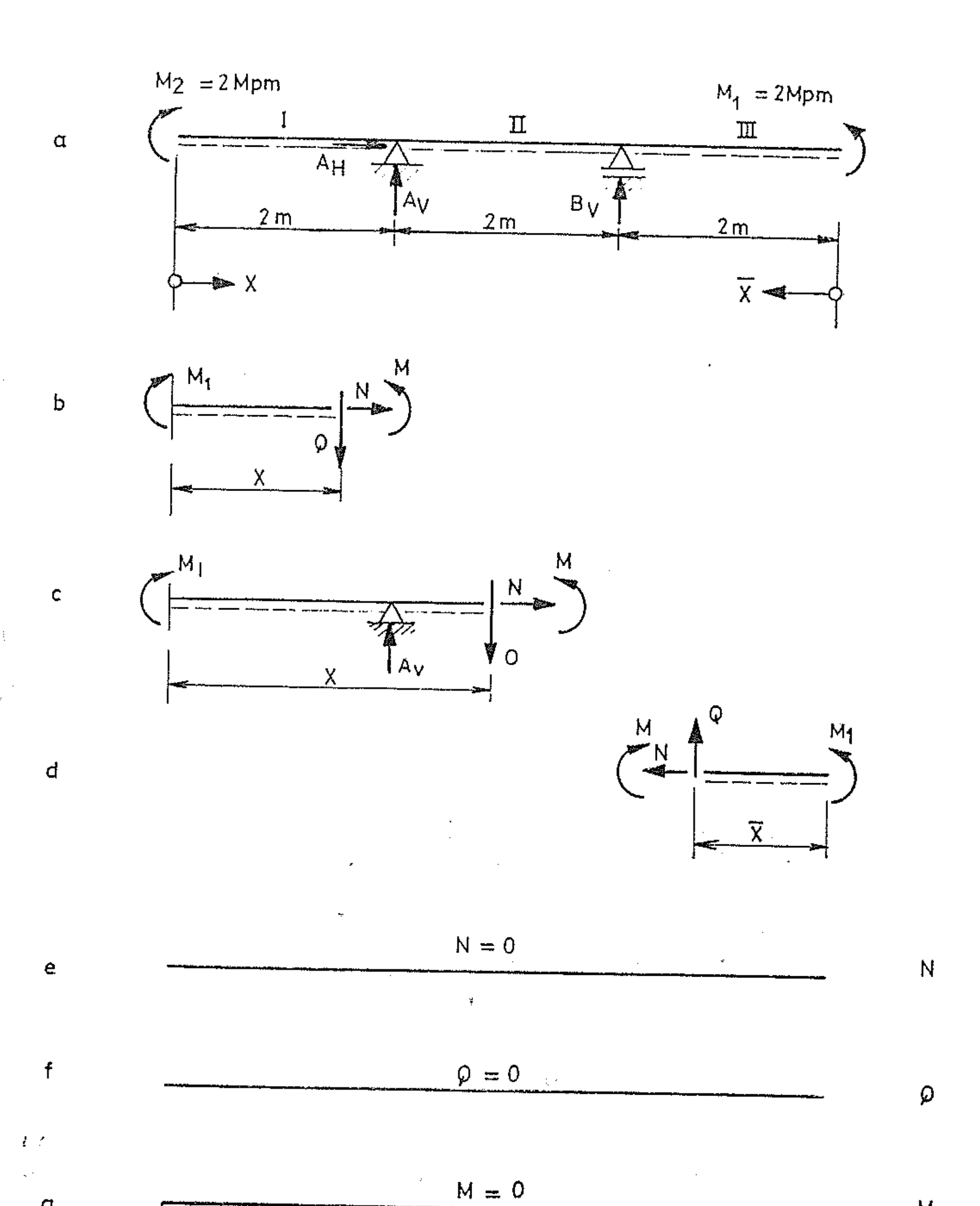
المجال I $(0 \leqq x \leqq 2{,}0)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2.67b) ينتج :

$\Sigma H = 0 \ : \ N = 0$

$\Sigma V = 0 \ : \ Q = 0$

$\Sigma M_x = 0 \ : \ M = M_1$



شكل 2.76

المجال $II\,(2{,}0 \leq x \leq 4{,}0)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2.76c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \; ; \; N = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; ; \; Q = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \; : \; M = M_1$$

المجال III $(x \leqq \bar{x} \leqq 2{,}0)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل 2.76d) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \; : \; N = 0$$

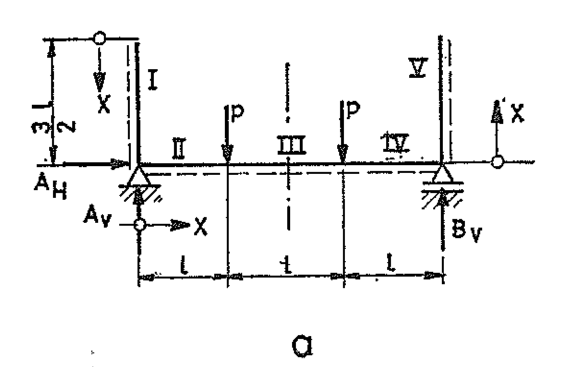
$$\Sigma V = 0 \; ; \; Q = 0$$

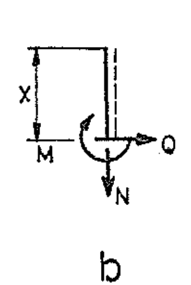
$$\Sigma M_x = 0 \; ; \; M = M_1$$

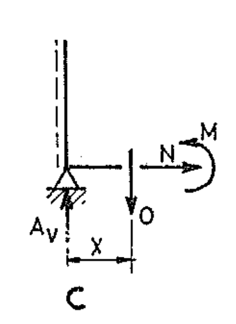
لقد تم في الشكل (2.76) رسم مخططات قيم القطع .

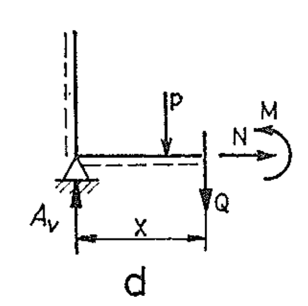
مثال 41 :

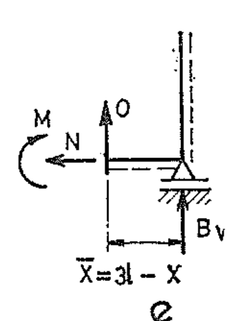
يتعرض الجائز ممتد الاطراف لحمولة كما يشير الشكل (2.77) .











شكل 2.77

المطلوب : حساب ورسم قيم القطع ،

الحـــل :

١ ـ حساب ردود افعال المساند

بتطبيق شروط التوازن على الجملة كـكل ينتج :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : B_v .3l - P.2l - P.l = 0 \; ; \; B_v = P$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - 2P = 0 \quad ; \quad A_v = P$$

التدقيق :

$$\Sigma M_c = 0 : A_v . \frac{3l}{2} - B_v . \frac{3l}{2} + P \frac{l}{2} - P \frac{l}{2} = 0$$

٢ ـ حساب قيم القطع

يتألف الجائز من خمس مجالات .

المجال I والمجال V (هي مجالات غير محملة) :

بتطبيق شروط التوازن (شـكل 2-77 b) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 : M = 0$$

المجال II $(0 \leq x \leq l)$:

بتطبيق شروط التوازن (شـكل 2-77 c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q = + P$$

$$\Sigma M_x = 0 : M = A_v.x \; ; \; M = P.x$$

$$x = 0 : M = 0$$

$$x = l : M = Pl$$

المجال III $(l \leqq x \leqq 2l)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن (شكل 2-77 d) العلاقات التالية :

$\Sigma H = 0 : N = 0$

$\Sigma V = 0 : Q = A_v - P \quad ; \quad Q = 0$

$\Sigma M_x = 0 : M = A_x.x - P(x - l) = 0 \; ; \; M = Pl$

المجال IV $(2l \leqq x \leqq 3l)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الأيمن (شكل 2.77 e) ينتج :

$\Sigma H = 0 : N = 0$

$\Sigma V = 0 : Q = -B_v \quad ; \quad Q = -P$

$\Sigma M_x = 0 : M - B_v.\overline{x} = 0; \; M = P(3l - x)$

$x = 2l : M = Pl$

$x = 3l : M = 0$

لقد تم في الشكل (2-78) تمثيل قيم القطع .

مثال 42 :

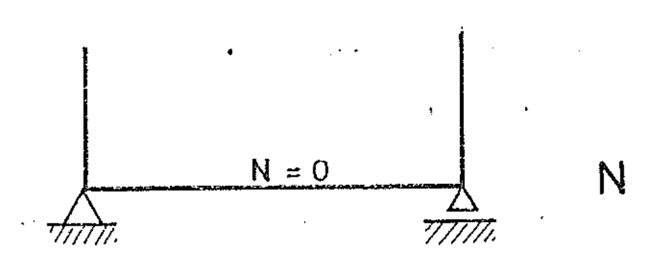
يتعرض الجائز الممتد لحمولة وحيدة كما في الشكل (2-79) .
المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

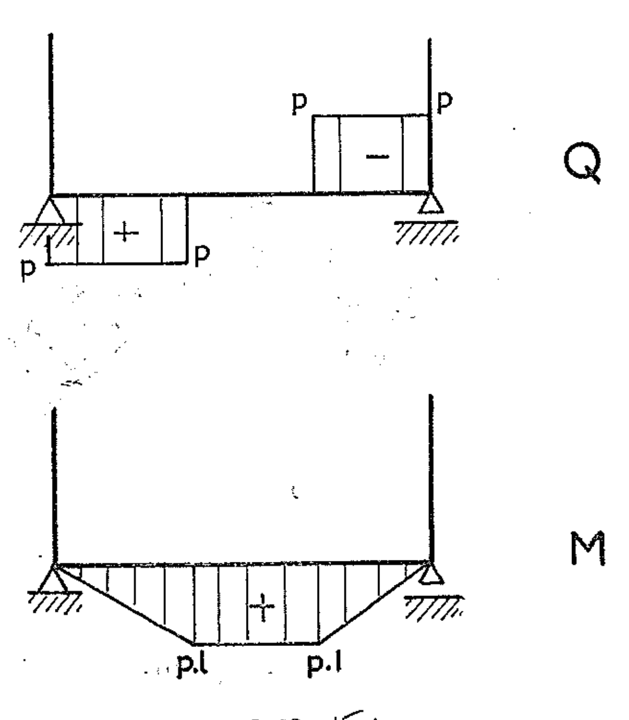
الحل :

تحلل القوة المائلة P الى مركبتين ، مركبة أفقية $P_H = P\cos 45° = \frac{P}{\sqrt{2}}$ ومركبة شاقولية $P_v = P\sin 45° = \frac{P}{\sqrt{2}}$ ثم يستعاض عنها بتلك المركبات .

١ ـ ردود افعال المساند :

يعطي تطبيق شروط التوازن العلاقات التالية :





شكل 2-78

$$\Sigma H = 0 : B_H - P\cos 45° \; ; \; B_H = \frac{P}{\sqrt{2}} = 0,705\ P$$

$$\Sigma M_b = 0 : A_v .2l + P_H .l \sin 45° + P_v . (l + l\cos 45°) = 0$$

$$A_v .2l + P \frac{P}{\sqrt{2}} \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{P}{\sqrt{2}} \left(l + \frac{l}{\sqrt{2}} \right) = 0; \; A_v = -0,853P$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - P = 0 \; ; \; B_v = 1,560\ P$$

التدقيق :

$$\Sigma M_c = 0 : A_v \left(3l + \frac{l}{\sqrt{2}} \right) + B_v \left(l + \frac{l}{\sqrt{2}} \right) + B_H \frac{l}{\sqrt{2}} = 0$$

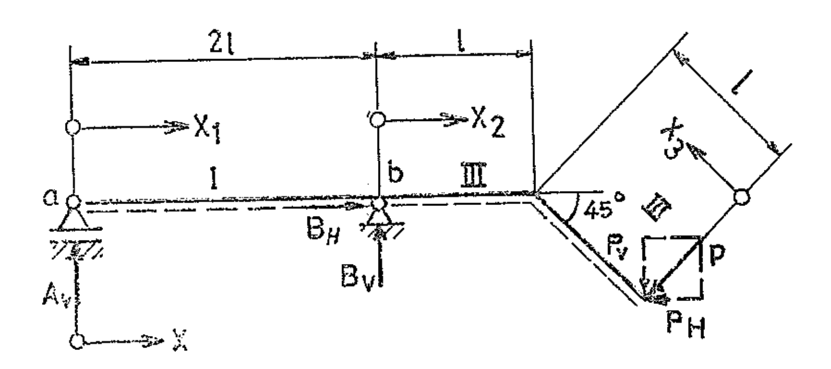
$$P\,l\,(-4{,}472 + 3{,}766\,.\,0{,}707) = 0$$

$$-4{,}472 + 4{,}473 \approx 0$$

ان هذا الفارق الطفيف ناتج عن تبديل الجذر بقيمته العددية وعن العمليات الحسابية .

٢ - حساب قيم القطع .

يتألف الجائز من ثلاثة مجالات .



شكل 2-79

المجال I $(0 \leqq x \leqq 2l)$:

بتطبيق شروط التوازن (شكل 2-80a) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \;:\; N_1 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; Q_1 = A_v = -0{,}853\,P$$

$$\Sigma M_{x1} = 0 : \; M_1 = A_v\,.\,x_1 = -0{,}853\,P\,.\,x_1$$

$$x_1 = 0 \;:\; M_1 = 0$$

$$x_1 = 2\,l : \; M_1 = -1{,}706\,P\,l$$

لتدقيق النتيجة يشتق تابع العزم الذي يعطي تابع القوة العرضية وهذا يؤكد صحة النتيجة .

المجال II $(0 \leqq x \leqq l)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء الايسر المقطوع (شكل 2-80 b) العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 \quad : \quad N_2 + B_H = 0 \quad ; \quad N_2 = -0,707\ P$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad Q_2 = A_v + B_v \quad ; \quad Q_2 = +0,707\ P$$

$$\Sigma M_{x2} = 0 : \quad M_2 = A_v\ (2\ l + x_2) + B_v\ x_2 \ ;$$

$$M_2 = -\ 0.853\ P\ (2\ l + x_2) + 1.56\ P\ x_2$$

$$M_2 = -\ 1,706\ P\ l + 0,707\ P\ x_2$$

$$x_2 = 0 \quad ; \quad M_2 = -\ 1,707\ P\ l$$

$$x_2 = l \quad : \quad M_2 = -\ 1,000\ P\ l$$

لتدقيق النتيجة يشتق تابع العزم الذي يعطي تابع القوة العرضية وهذا يؤكد صحة النتيجة .

المجال III $(0 \leq x_3 \leq l)$.

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل 2-80 c) العلاقات التالية :

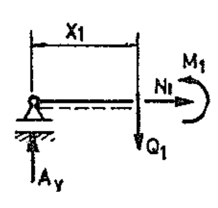
$$\Sigma P_{xv} = 0 \quad : \quad N_3 = 0$$

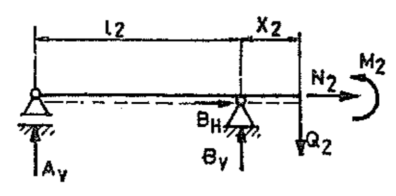
$$\Sigma P_{zv} = 0 \quad : \quad Q_3 = +\ P$$

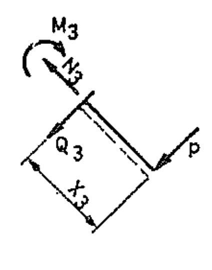
$$\Sigma M_{x3} = 0 \quad : \quad M_3 = -\ P\ x_3$$

$$x_2 = 0 \quad : \quad M_3 = 0$$

$$x_3 = l \quad : \quad M_3 = -\ P\ l$$





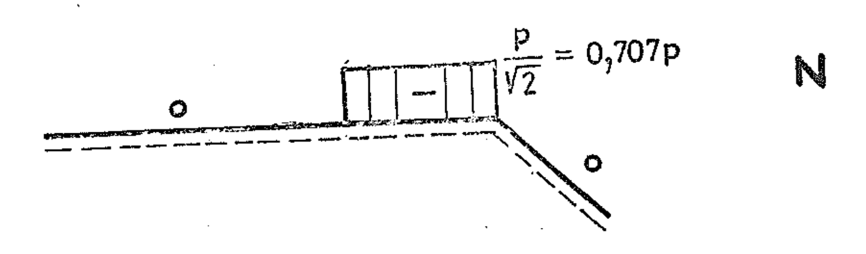


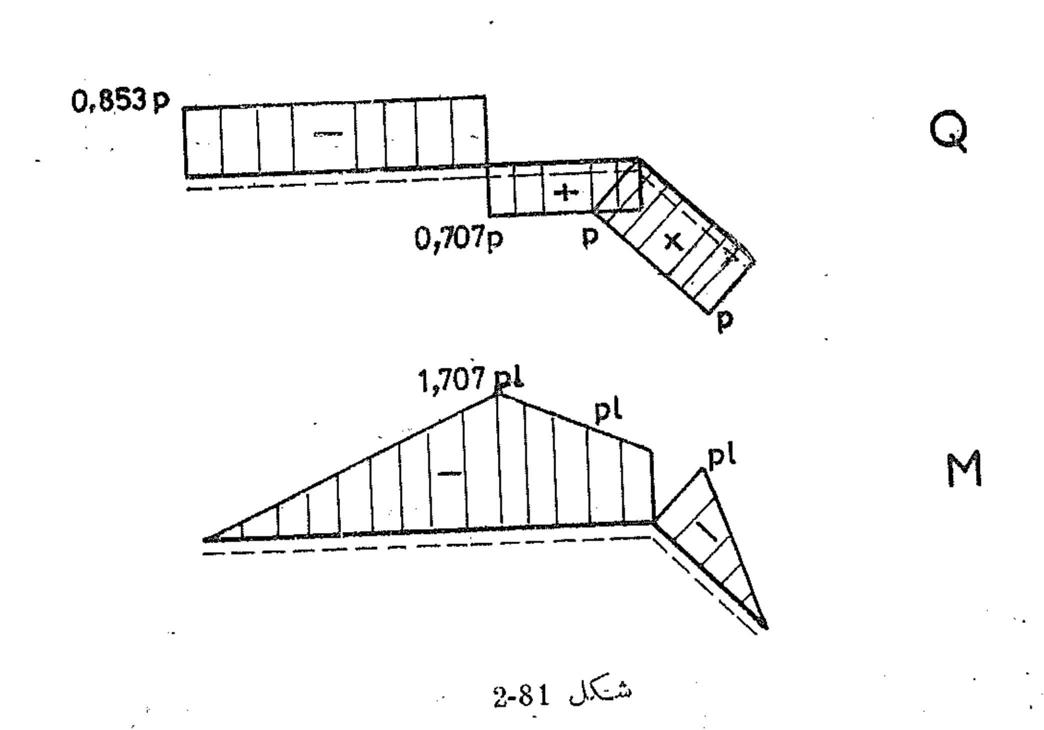
شكل 2-80

لتدقيق النتيجة يشتق تابع عزم الانعطاف فيتم الحصول على تابع القوة العرضية وهذا يؤكـد صحة النتيجة .

٣ ـ مخططـات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-81) رسم مخططات قيم القطع .





شكل 2-81

مثال 43 :

يتعرض الجائز البسيط ممتد الطرف (جائز بسيط بذراع بارزة او جائز بسيط بظفر) لتأثـير حمولة كما في الشكل (2-82) .

المطلوب . ايجاد قيم القطع .

الحل :

يفضل اعادة الحمولة الموزعة الى قوتين وحيدتين تكافئها الا وهي $R_1 = 24,0$ Mp و $R_2 = 8,0$ Mp .

ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$B_H = B \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} B \quad ; \quad B_v = B \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} B$$

$$A_v = \frac{1}{6,0} (R_1 \,.\, 3,0 - R_2 \,.\, 1,0 - P \,.\, 2,0) = 9,0 \text{ Mp}$$

$$B_v = \frac{1}{6,0} (R_1 \,.\, 3,0 + R_2 \,.\, 7,0 + P \,.\, 8,0) = 28,0 \text{ Mp}$$

$$B = 2 \,.\, B_v = 56,0 \text{ Mp}$$

$$B_H = \frac{\sqrt{3}}{2} 56,0 = 48,5 \text{ Mp}$$

$$A_H = B_H = 48,5 \text{ Mp}$$

بواسطة القوتين الافقيتين A_H , B_H يتم ايجاد مخطط القوة الناظمية . ان القوة الناظمية بين المساند هي عبارة عن قوة ضاغطة قيمتها 48,5 - اما في الذراع البارزة (الظفر)فتساوي الصفر.

تبتدأ القوة العرضية عند المسند الايسر بالقيمة $A_v = 9,0$ Mp بعد ذلك خطياً الى ان تبلغ القيمة التالية .

$$A - R_1 = 9,0 - 24,0 = -15,0 \text{ Mp}$$

بعد ذلك تقفز عند نقطة الاستناد b الى القيمة .

$$-15,0 + B_v = -15,0 + 28,0 = 13,0 \text{ Mp}$$

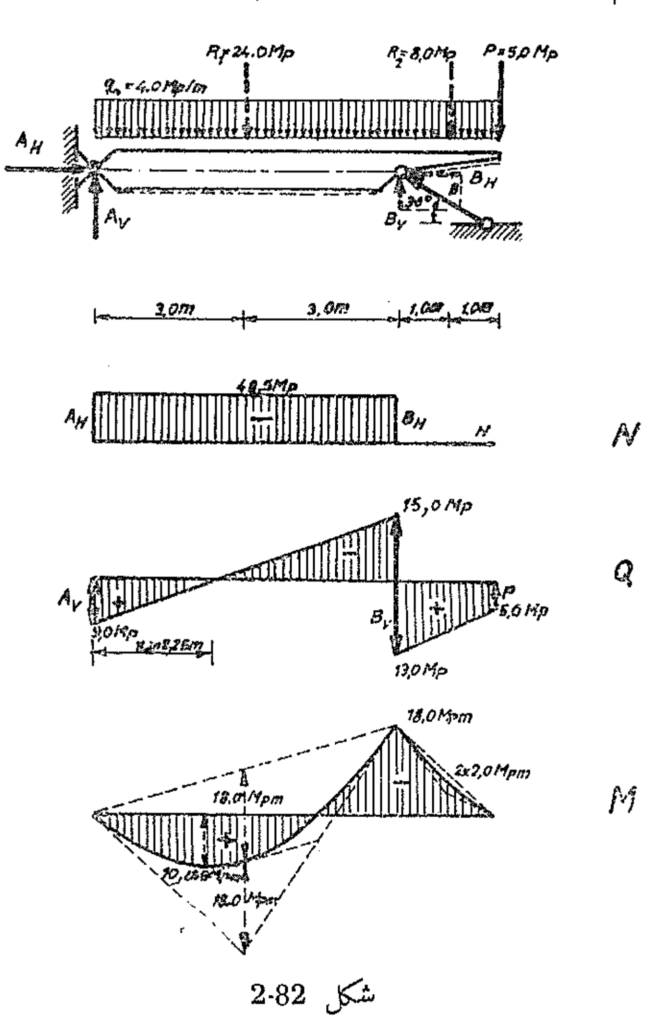
ثم تتناقص بما يساوي قيمة القوة الوحيدة $P = 5 0$ Mp .

تغير القوة اشارتها على بعد :

$$x_0 = \frac{A_v}{q_0} = \frac{9,0}{4,0} = 2,25 \text{ m}$$

وكذلك فوق المسند الايمن (الموجود في النقطة d) .

تتألف مخططات العزوم من مقطعين مكافئين من الدرجة الثانية .



شكل 2-82

يبلغ العزم فوق نقطة استناد المسند الايمن القيمة التالية :

$$A_v \cdot 6{,}0 - R_1 \cdot 3{,}0 = 9{,}0 \cdot 6{,}0 - 24{,}0 \cdot 3{,}0 = -18{,}0 \text{ Mpm}$$

تقع القيمة الاعظمية الموجبة لعزم الانعطاف عند النقطة $x_0 = 2{,}25$ m وهي تبلغ :

$$\max M = A_v \cdot 2{,}25 - \frac{q_0 \cdot 2{,}25^2}{2} = 10{,}125 \text{ Mpm}$$

بينما تقع القيمة الاعظمية السالبة للعزم فوق المسند الايمن وهي تبلغ $-18{,}0$ Mpm .

لقد تم في الشكل 2 82 رسم مخططات قيم القطع .

مثال 44 :

يتعرض الجائز البسيط ممتد الاطراف الممثل في الشكل (2-83) لتأثير حمولة موزعة بانتظام تؤثر على رقعة منه كما وتؤثر عليه قوتان وحيدتان الاولى شاقولية والثانيةمائلة وتؤثر على نهايته اليسرى.

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل .

١ - ردود افعالالمساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ينتج :

$$A_v = \frac{1}{7,0}(P_{1v} . 8,0 + P_2 .5,0 + R_1 . 2,5 - R_2 . 1,0) = 12,161 \text{ Mp}$$

$$B_v = \frac{1}{7,0}(-P_{1v} . 1,0 + P_2 . 2.0 + R_1 . 4,5 + R_2 . 8,0) = 27,667 \text{ Mp}$$

$$A_H = P_{1H} = 2,828 \text{ Mp}$$

٢ - قيم القطع:

في مجال الذراع البارزة اليسرى (الظفر الايسر) فقط لا تنعدم القوة الناظمية وهي تبلغ .

$$N = - 2,828 \text{ Mp}$$

يتألف مخطط القوة العرضية من اربعة اجزاء تحددها القوى الوحيدة الاربعة .

تغير القوة العرضية اشارتها عند نقاط الاستناد وكذلك عند النقطة التي تبعد :

$$x_0 = 2 0 + \frac{-P_{1v} + A_v - P_2}{q_0} = 2 0 + \frac{7,33}{5,0} = 2,0 + 1,47 = 3,47 \text{ Mpm}$$

لتعيين مخطط عزم الانعطاف ينبغي حساب العزوم في كل من النقاط 1, 2, 3التي تبلغ :

$$M_1 = - P_{1v} . 1,0 = - 2,828 \text{ Mpm}$$

$$M_2 = - P_{1v} . 3,0 + A_v . 2,0 = + 15,838 \text{ Mpm}$$

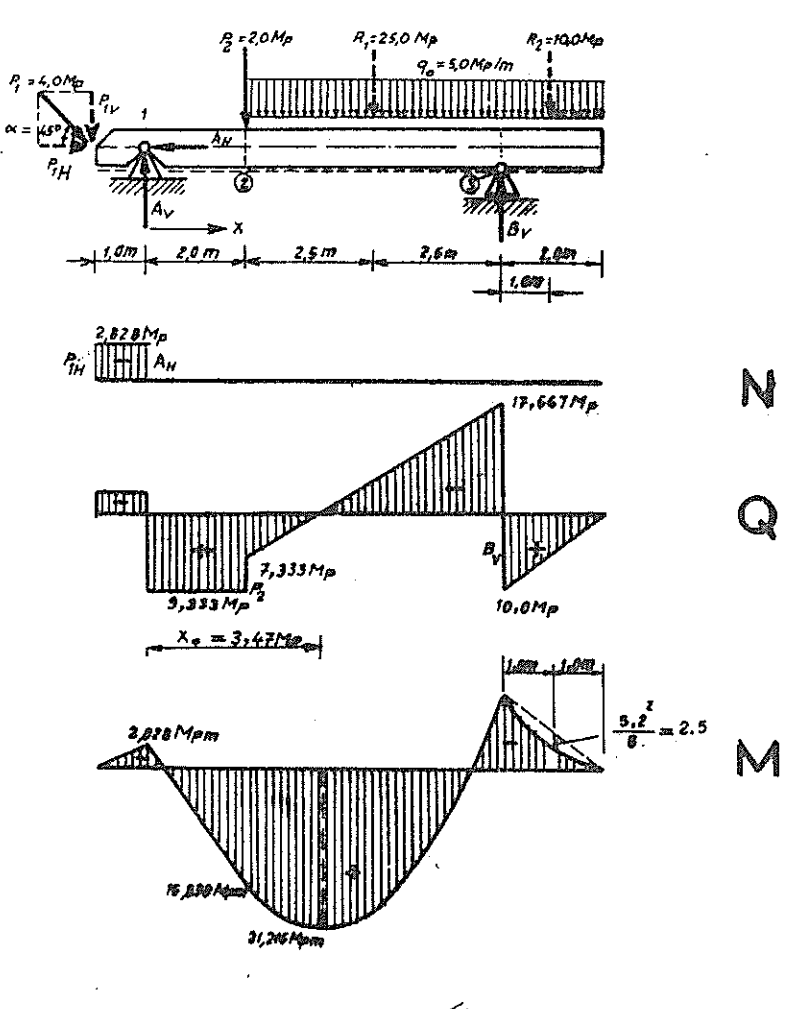
$$M_3 = - R_2 . 1,0 = - 10,000 \text{ Mpm}$$

يأخذ العزم تحت الحمولة الموزعة بانتظام شكل قطع مكافىء من الدرجة الثانية ، وفي الاجزاء غير المحملة يتوزع العزم خطياً .

يبلغ العزم عند النقطة $x_0 = 3{,}47$ m قيمته الاعظمية :

$$\max M = -P_{1v} \cdot 4{,}47 + A_v \cdot 3{,}47 - P_2 \cdot 1{,}47 - \frac{q_0 \cdot 1{,}47^2}{2} = 21{,}216 \text{ Mpm}$$

لقد تم في الشكل (2.83) تمثل مخططات قيم القطع .



شكل 2-83

مثال 45 :

يتعرض الجائز الممثل في الشكل (84-2) لحمولة وحيدة شاقولية .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود افعال المساند التي تبلغ :

$$A_v = \frac{P.2,0}{8,0} = 1,0 \text{ Mp} \quad ; \quad B_v = \frac{P.6,0}{8,0} = 3,0 \text{ Mp}$$

لا يحتوي الجائز على قوة ناظمية إلا في المجال الشاقولي . اما قيمتها فتبلغ :

$$N = -4,0 \text{ Mp}$$

تظهر القوة العرضية في كل الاجزاء الافقية وتتوزع هناك بشكل منتظم (ثابت) وذلك لان ذراع القوة P في الجزء الشاقولي لا يتغير مهما كان موضع القطع الافقي . يبلغ عزم الانعطاف في النقطة 1 باعتبارها حداً لجزء الجائز الايسر :

$$M_1 = A_v . 4,0 = 4,0 \text{ Mpm}$$

وفي نفس النقطة من اجل الجزء الايمن من الجائز :

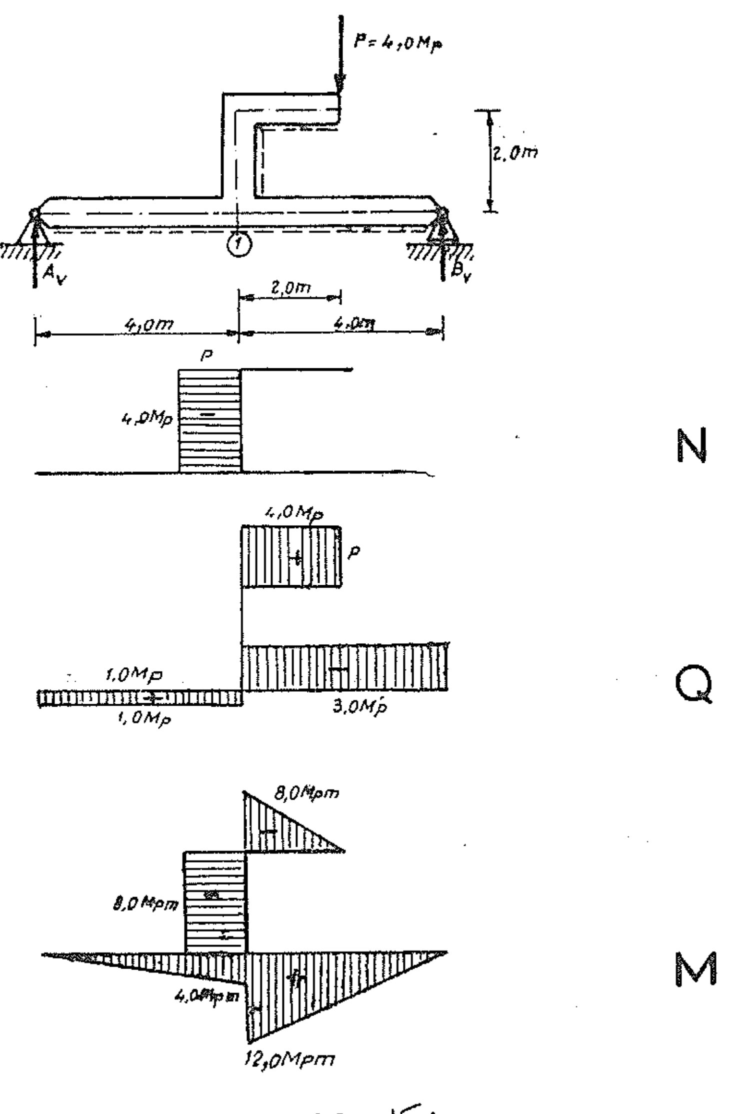
$$M_1 = B_v . 4,0 = 12,0 \text{ Mpm}$$

وكذلك في نفس النقطة من اجل الجزء العلوي للجائز :

$$M_1 = -P . 2,0 = -8,0 \text{ Mpm}$$

وبهذا يحتوي مخطط عزم الانعطاف على قفزة تنتج عن تأثير العزم M الذي تشكله القوة P حول النقطة 1 .

لقد تم في الشكل (84-2) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-84

مثـال 46 :

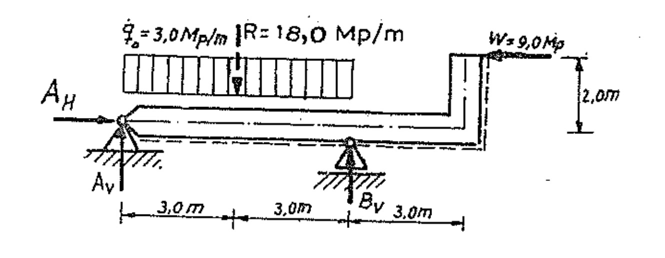
يتعرض الجائز البسيط ممتد الاطراف لتأثير حمولات كما يشير الشكل (2-85) .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

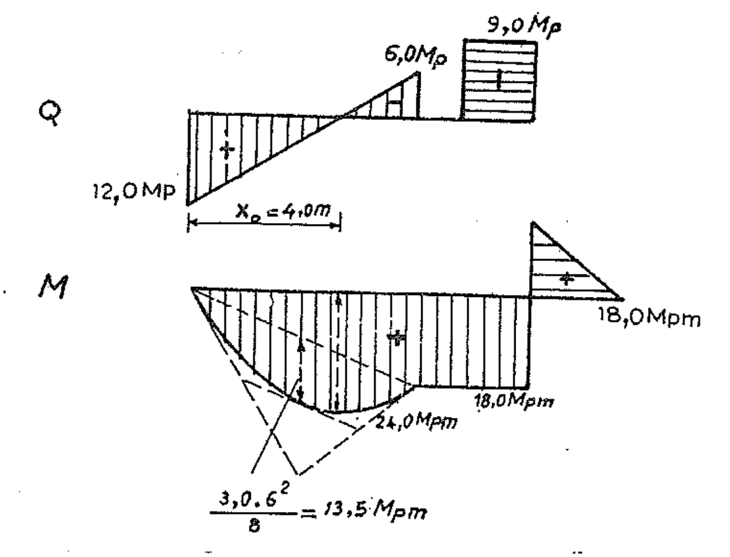
الحل :

١ ـ ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل يتم الحصول على ردود أفعال المساند التي تبلغ:







شكل 2-85

$$A_v = \frac{1}{6,0} \ (R \ . \ 3,0 + W \ . \ 2,0 \ ) = 12,0 \ \ Mp$$

$$B_v = \frac{1}{6,0} \ (R \ . \ 3,0 - W \ . \ 2,0 \ ) = 6,0 \ \ Mp$$

$$A_H = W \qquad = 9,0 \ Mp$$

تبلغ القوة الناظمية المتشكلة نتيجة لتأثير القوة الافقية W في جزء الجائز الافقي ما يلي :

$$N = -9,0 \ \ Mp$$

تنعدم القوة العرضية (وحيث يمر مخطط القوة العرضية بالصفر) عند النقطة التي تبعد :

$$x_0 = \frac{A_v}{q_0} = \frac{12,0}{3,0} = 4,0 \ m$$

يأخذ عزم الانعطاف في مجال تأثير القوة الموزعة شكل قطع مكافىء من الدرجة الثانية . أما في الاجزاء الافقية الخالية من التحميل فيأخذ قيمة ثابتة تبلغ :

$$W \,.\, 2{,}0 = 9{,}0 \,.\, 2{,}0 = 18{,}0 \text{ Mpm}$$

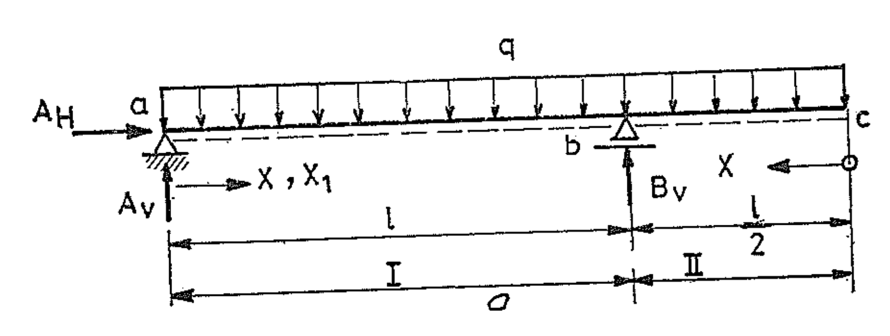
تقع القيمة الاعظمية لعزم الانعطاف عند النقطة التي تبعد $x_0 = 4{,}0$ m وتبلغ :

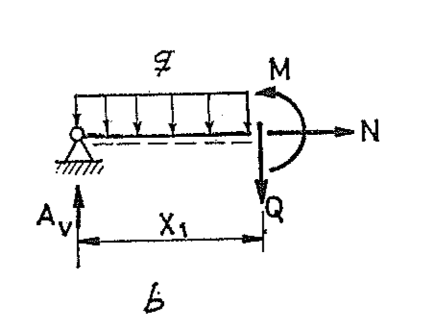
$$\max M = A_v \,.\, 4{,}0 - \frac{q_0 \,.\, 4{,}0^2}{2} = 24{,}0 \text{ Mpm}$$

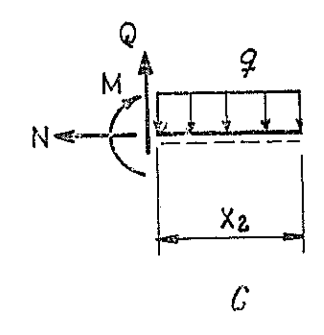
لقد تم في الشكل (2-85) رسم مخططات قيم القطع .

مثال 47 :

يتعرض الجائز ممتد الاطراف لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها q (شكل 2-86) .
المطلوب : ايجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .







شكل 2-86

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود افعال المساند المطلوبة :

$$\Sigma H = 0 \;:\; A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \;:\; B_v \,.\, l - q \,.\, \frac{3}{2}\, l \,.\, \frac{3}{4}\, l = 0 \;\;;\;\; B_v = \frac{9}{8}\, q\, l$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; A_v + B_v - q \,.\, \frac{3}{2}\, l = 0 \;\;;\;\; A_v = \frac{3}{8}\, q\, l$$

التدقيق :

$$\Sigma M_c = 0 \;:\; A_v \,,\, \frac{3}{2}\, l + B_v \,,\, \frac{l}{2} - q \,.\, \frac{3\,l}{2} \,.\, \frac{3\,l}{4} = 0$$

بتبديل قيم كل من A_v و B_v يرى ان العلاقة محققة وهذا يؤكد صحة النتائج .

٢ - قيم القطع :

يتألف الجائز من مجالين I , II .

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq l)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2.86b) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \;:\; N = 0$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; Q - A_v + q x_1 = 0 \;\;;\;\; Q = \frac{3}{8}\, q l - q x_1$$

(تمثل هذه المعادلة خطاً مستقيماً) .

$$\Sigma M_{x_1} = 0 \;:\; M - A_v \,.\, x_1 + q\, \frac{x_1^{\,2}}{2} \;\;;\;\; M = \frac{3}{8}\, q l\, x_1 - q\, \frac{x_1^{\,2}}{2}$$

(تمثل هذه المعادلة قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية) .

تطبيق عددي :

$$x_1 = 0 \; : \; Q = \frac{3}{8} ql \quad ; \quad M = 0$$

$$x_1 = l \; : \; Q = -\frac{5}{8} ql \quad ; \quad M = -q \frac{l^2}{8}$$

للحصول على القيمة الاعظمية لعزم الانعطاف يعدم تابع القوة العرضية (مشتق عزم الانعطاف) هكذا :

$$Q = 0 = \frac{3}{8} ql - qx_1 \quad ; \quad x_1 = \frac{3}{8} l$$

$$\max M = M(x_1 = \frac{3}{8} l) = \frac{3}{8} ql \cdot \frac{3}{8} l - q \frac{1}{2} (\frac{3}{8} l)^2 = \frac{9}{128} ql^2$$

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq l/2)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل 2.86c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \; : \; N = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; Q = qx_2$$

(معادلة خط مستقيم).

$$\Sigma M_{x2} = 0 \; : \; M = -q \frac{x_2^2}{2}$$

(معادلة قطع مكافىء درجة ثانية).

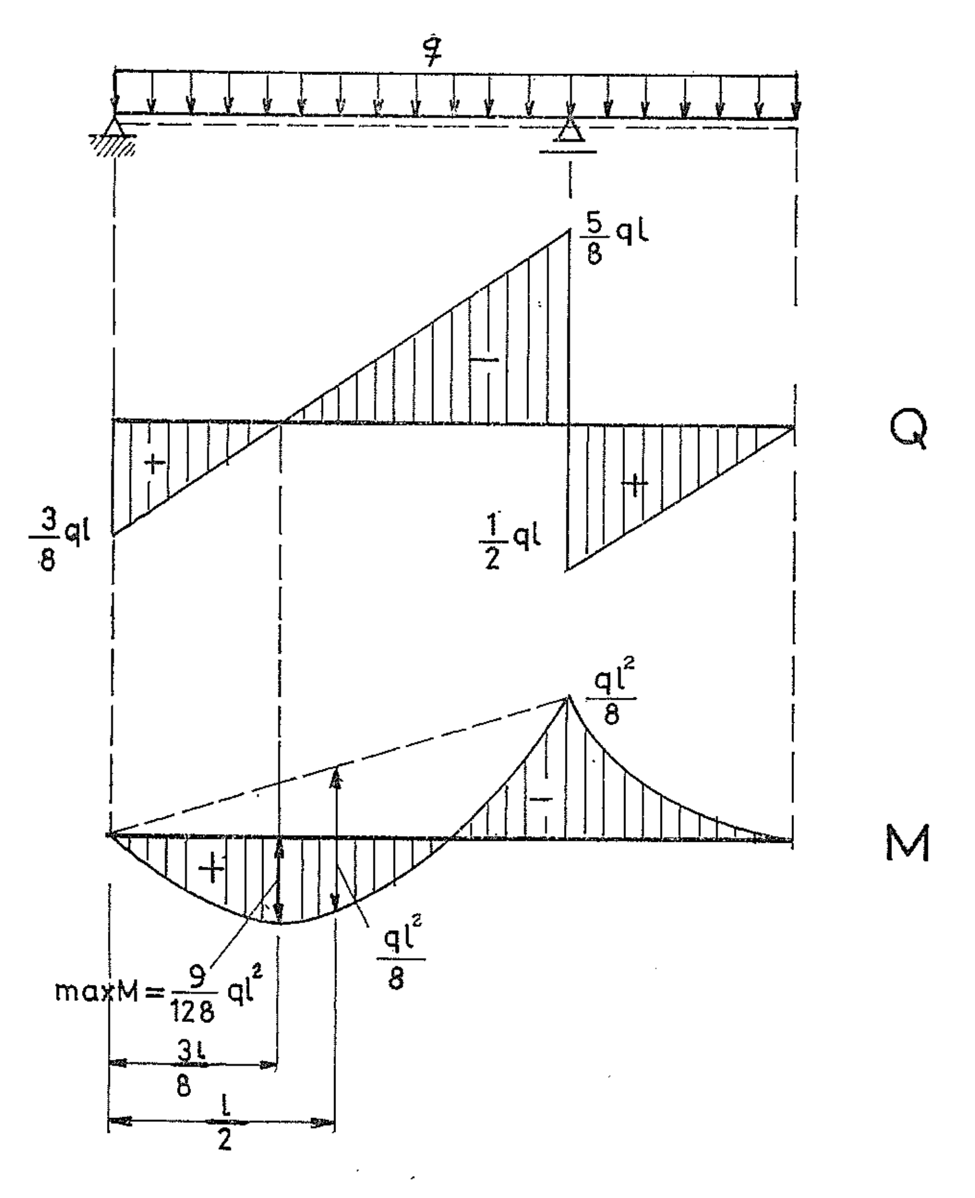
تطبيق عددي :

$$x_2 = 0 \; : \; Q = 0 \; ; \; M = 0$$

$$x_2 = \frac{l}{2} \; : \; Q = \frac{ql}{2} \; ; \; M = -q \frac{l^2}{8}$$

٣ ـ مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2.87) تمثيل مخططات قيم القطع .



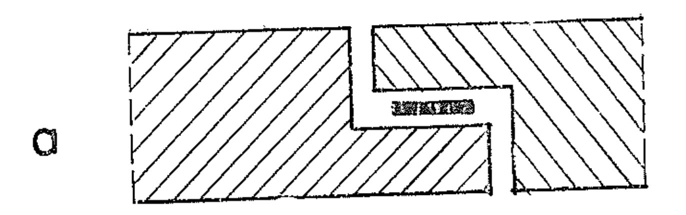
شكل 87 2

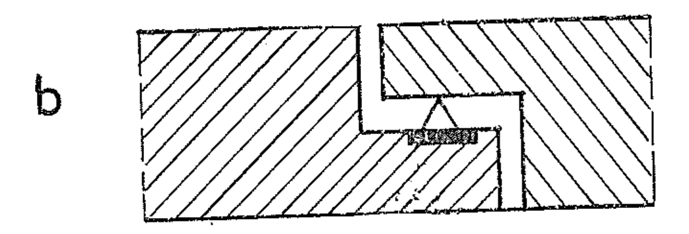
٢ ـ ٧ الجائز المفصلي المركب

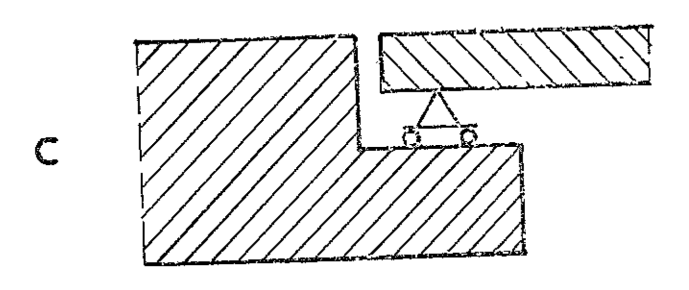
يمكن تعريف الجيزان المفصلية المركبة بانها الجيزان التي يوجد فيها عدد من المفاصل الداخلية يكفي لان يجعلها في مجموعة الجيزان المقررة ستاتيكياً .

٢ ـ ٧ ـ ١ مفاصل الوصل تقع على مستقيم واحد (جائز جربر)

ترى في الشكل (2-88 a) صورة مبسطة لشكل مفصلي داخلي موجود في نقطة ما من الجائز



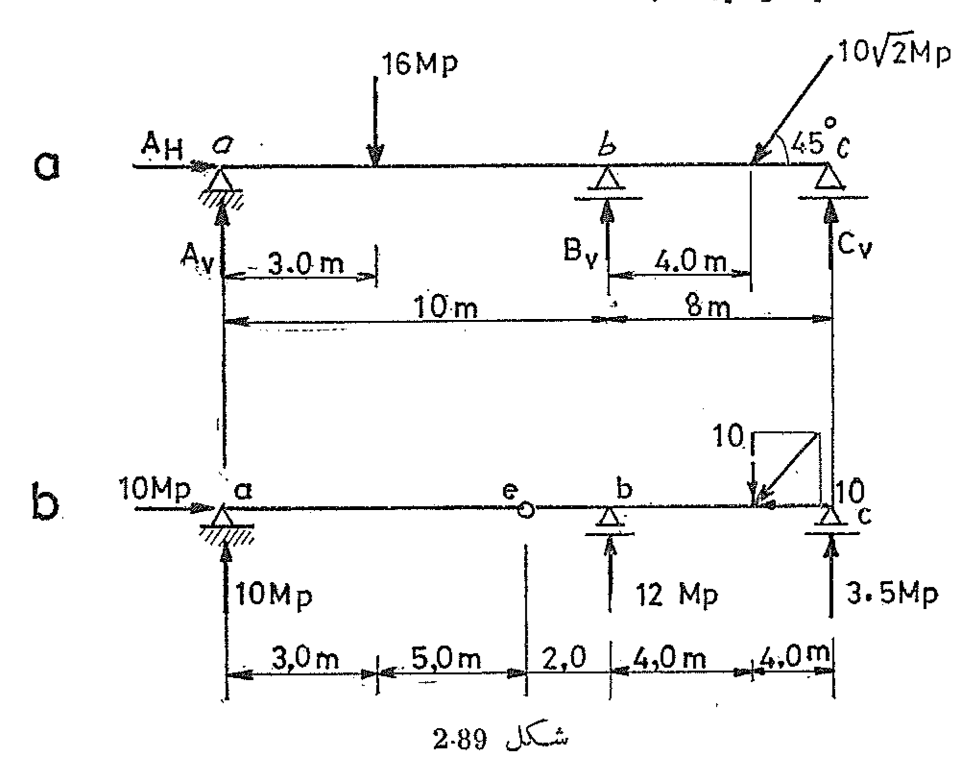




شكل 88-2

ويتضح منه كيفية انقسام الجائز في هذا الوضع الى جزئين يتصل احدهما بالآخر اتصالا مفصلياً ويبدو في الشكل ان الجزء الايمن من الجائز يستند على الجزء الايسر استناداً مفصلياً عاديا ، وهذا هو ما يحدث فعلا في الطبيعة في معظم الحالات . والاتصال المفصلي في الشكل (2-88 b) هو من النوع الذي يسمح بالدوران فقط ولا يسمح بالحركة الانتقالية النسبية بين جزيء الجائز . أي ان المسند المفصلي المستعمل هو من النوع الثابت . ومن شأن هذا المفصل من الناحية الستاتيكية ان يجعل عزم الانعطاف في نقطة التمفصل تساوي صفراً . ومعنى هذا من الناحية الستاتيكية هو اضافة شرط جديد على شروط التوازن مقابل كل مفصل داخلي .

باعتبار الجائز abc الممثل في الشكل (2-89a) يمكن فوراً التأكد من ان عدد مركبات رد الفعل لهذا الجائز هي اربع مركبات بفرض ان السندين b , c من النوع المتحرك وان السند عند a من النوع الثابت ولهذا فان هذا الجائز غير مقرر ستاتيكياً وهو جائزمستمر لا تكفي شروط التوازن العادية الثلاثة لتحديد قيم مركبات ردود الفعل الشاقولية له ولا بد اذاً من شرط اضافي بجانب شروط التوازن . فاذا ادخل مفصلا داخلياً في نقطة ما من الجائز وليكن موضعه النقطة e (شكل 2-89b) فان الجائز يصبح مقرر ستاتيكياً ويطلق عليه اسم **الجائز المفصلي المركب** . وبالانتقال الى مثال آخر هو abcd (شكل 2-90) والذي يستند على المساند المفصلية المتحركة عند b , c , d والمسند الثابت عند a ومثل هذا الجائز غير مقرر ستاتيكياً من الدرجة الثانية ، بمعنى ان عدد مركبات ردود الافعال وهو خمسة يزيد على عدد شروط التوازن الثلاثة باثنين من المجاهيل فلا تكفي شروط التوازن وحدها ، اذا لتحديد ردود افعال المساند . ولكي يصبح هذا الجائز جائزاً مفصلياً مركباً ومقرر ستاتيكياً لا بد من ادخال اثنين من المفاصل الداخلية في الجائز من النوع المبين في الشكل (2-88 b) ويمكن ان يتم هذا بأكثر من صورة . ففي الشكل (2 90b) ادخل مفصل داخلي عند h في الفتحة cd وعند g في الفتحة bc أما في الشكل (2-90 c) فقد ادخل المفصلان في فتحة واحدة هي الفتحة bc في الموضعين e , f .



شكل 2.89

α – عدد المفاصل الداخلية ومواضعها .

مما سبق يمكن الآن الاستنتاج ان عدد المفاصل الداخلية التي يلزم تواجدها في جائز مفصلي مركب بحيث يكون الجائز مقرر ستاتيكياً يتوقف على العدد الفعلي لمساند الجائز ونوع هذه المساند ويمكن تحديد العدد اللازم من المفاصل الداخلية بواسطة العلاقه التالية :

$$n = (s + 2f) - 2$$

حيث ان :

n هو العدد اللازم من المفاصل الداخلية وان

s هو عدد المساند البسيطة (الخارجية) في الجائز وان

f هو عدد المساند الموثوقة (الخارجية) .

ويلاحظ ان هذه العلاقة لا تفرق بين المسند المفصلي المتحرك (الذي يسمح بالحركة) والمسند الثابت (الذي لا يسمح بالحركة الانتقالية) . وفي الشكل (2-90 a) مثلا تطبق العلاقة السابقة كالتالي :

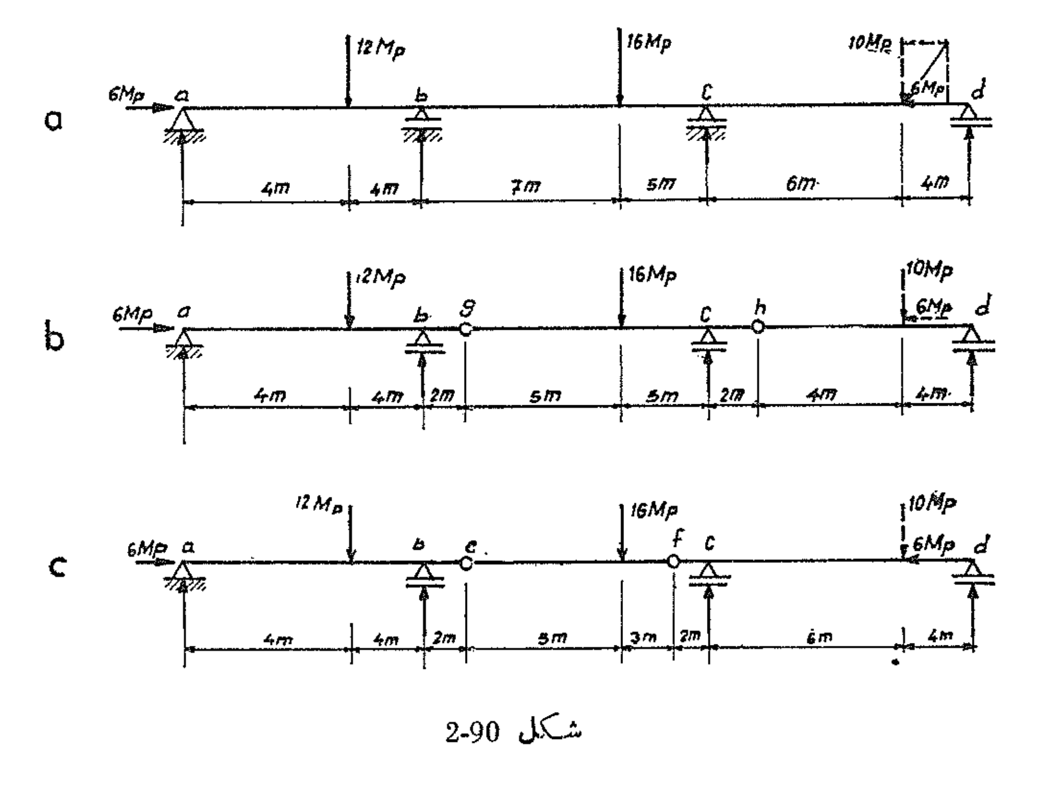
$$s = 4 \quad ; \quad f = 0 \quad ; \quad n = 4 - 2 = 2$$

ويجب الملاحظة عند تحديد مواضع هذه المفاصل الداخلية ما يلي ، حتى يظل الجائز في جميع اجزاءه مقرر ستاتيكياً من جهة وغير قابل للانهيار من جهة اخرى :

١ – لا ينبغي ان تحوي الفتحة الخارجية اكثر من مفصل داخلي واحد . ولا يجوز في هذه الحالة ان تحوي الفتحة التي تليها اكثر من مفصل واحد أيضاً. وعلى ذلك فان مجموع عدد المفاصل الداخلية في الفتحة الخارجية والفتحة التي تليها لا ينبغي ان يزيد عن اثنين .

٢ – لا يجوز ان تحوي فتحة داخلية اكثر من مفصلين داخليين (لا يجوز ان يوجد بين مسندين اكثر من مفصلين) ، على الا يزيد عدد المفاصل الداخلية في فتحتين داخليتين متجاورتين عن ثلاثة مفاصل .

٣ – لا ينبغي ان يزيد عدد المفاصل الداخلية في مجموعة متجاورة من الفتحات عن عدد هذه الفتحات اذا كانت تشمل فتحة خارجية واحدة . فاذا اشتملت المجموعة على فتحتين خارجيتين لزم الا يزيد عدد المفاصل الداخلية عن عدد الفتحات مطروحا منه واحد .



شكل 2-90

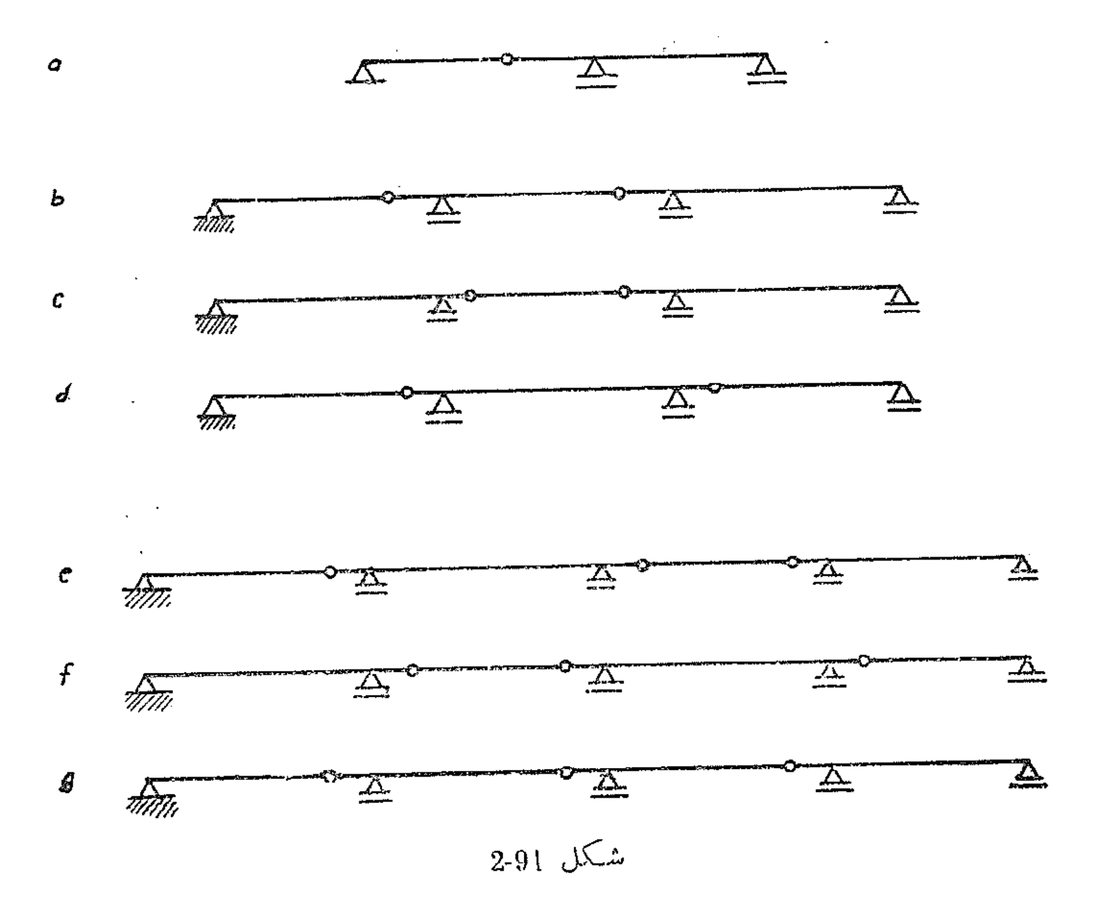
٤ ـ لا ينبغي ان يقل عدد المفاصل الداخلية في فتحتين متجاورتين عن مفصل واحد .

٥ ـ اذا كان المسند المتطرف للجائز من النوع الموثوق اعتبرت الفتحة الاخيرة عند تطبيق العلاقة السابقة فتحة داخلية .

٦ ـ لا ينبغي ان يحوي القضيب (القرص) الواحد اكثر من مسندين (شكل 2-91e)

β ـ الحركة الافقية وانواع المساند المفصلية

لقد اعتبر في الشكل (2-90) ان جميع المساند الخارجية للجائز فيما عدا مسند واحد هو من النوع الذي يسمح بالحركة الافقية ، وان المفصل الداخلي الذي استعمل في الجائز هو من النوع المبين في الشكل (2-88 b) الذي يسمح بالدوران فقط ولا يسمح باية حركة افقية . ومثل هذا التصميم من شأنه ان يجعل المركبة الافقية لرد الفعل عند المسند المفصلي الثابت مساوية لجميع المركبات الافقية للحمولات المؤثرة على الجائز بكامل طوله . ويعرض الجائز بذلك في جزء كبير منه الى قوى عمودية زائدة . ومن الممكن تلافياً لما سبق ذكره أن يستعمل مفصلاداخلياً يسمح بالحركة الافقية الى جانب الدوران (شكل 2.89c)، بحيث يكون في استطاعة جزئي الجائز في موضع المفصل ان ينزلق احدهما بالنسبة للاخر (افقياً) ، على ان يزيد بهذا عدد الانواع الثابتة من المساند المفصلية الخارجية ويراعى في تحديد الثابت والمتحرك من المساند المفصلية والمفاصل الداخلية معاً ما يلي :



شكل 2-91

١ ـ ان يكون كل جزء من الجائز قادراً على حرية التمدد والانكماش تحت تأثير العوامل الخارجية .

٢ ـ ان لا يكون اي جزء من الجائز قادراً على حرية التحرك الافقي تحت تأثير الحمولات الخارجية .

ويمكن ان يتحقق هذا باكثر من صورة واحدة . ففي الجائز المفصلي المركب الممثل في الشكل (2-90) مثلا يمكن اختيار حلول اخرى لانواع المفاصل كما يلي :

١ ـ مساند ثابتة (غيرمتحركة) عند d c , b ومساند متحركة عند a خارجياً،ثم h , g داخلياً .

٢ ـ مساند ثابتة عند d , g , b ومساند متحركة عند a , c , h . وسيلاحظ دائماً أن عدد المساند القابلة للحركة في هذا المثال هو 3 وان عدد المساند (داخلياً وخارجياً) التي لا تسمح بالحركة هو ايضاً 3 ، والواقع ان اختيار المساند المتحركة وغير المتحركة لن يغير من عدد المفاصل الداخلية الذي يلزم لكي يجعل الجائز المفصلي مقرر ستاتيكياً كما تعطيه العلاقة الاخيرة من الفقرة السابقة . ويمكن تعليل ذلك كما يلي :

ان المسند المفصلي الذي يسمح بالحركة يحوي مجهولا واحداً وان الذي لا يسمح بالحركة يحوي مجهولين .

وفي نفس الوقت فان المفصل الداخلي الذي لا يسمح بالحركة (الافقية) يعطي شرطاً اضافياً واحداً ، أما المفصل الذي يسمح بالحركة فيعطي شرطين وهما :

آ ـ عزم الانعطاف في موضع المفصل يساوي الصفر .

ب ـ القوة الناظمية في موضع المفصل تساوي الصفر .

وعلى ذلك فان استبدال مسند خارجي متحرك في الشكل (2-90) بمسند ثابت مقابل استبدال مفصل داخلي ثابت بمفصل متحرك يعني زيادة عدد المجاهيل بمقدار زيادة عدد الشروط التي تتوفر لايجاد هذه المجاهيل .

٧ ـ طرائق حل الجيزان المفصلية المركبة تحليلياً

٧ ـ ١ الطريقة الأولى (لحل الجيزان المفصلية).

تعتمد هذه الطريقة على ايجاد مركبات ردود الافعال الشاقولية عند المساند الخارجية الفعلية للجائز باستعمال شروط التوازن المادية مع الشروط الاضافية الناتجة عن وجود المفاصل الداخلية، ثم ترسم مخططات القوة الناظمية والقوة العرضية وعزوم الانعطاف بعد ذلك كالمعتاد . وتكون الشروط المستعملة لتحديد ردود الافعال باحدى الصورتين التاليتين :

١ ـ العزم حول أي (بالنسبة لاي) مسند لجميع الحمولات وردود الافعال المؤثرة على الجائز يساوي الصفر (شرط توازن) .

٢ ـ عزم الانعطاف عند أي مفصل داخلي يساوي صفراً (ومعنى هذا هو ان العزم حول المفصل لجميع القوى المؤثرة على أحد الجانبين فقط دون الجانب الآخر يساوي صفراً) .

ولتدقيق القيم الناتجة يمكن استخدام شرط تساوي المركبات الشاقولية لجميع الحمولات وردود الافعال بالصفر .

لتوضيح الطريقة سيتم حل المثال التالي :

مثال 47 :

المطلوب : حل الجائز المفصلي المركب المبين في الشكل (2-92 a) .

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند :

يوجد هنا اربعة مجاهيل (لان المركبة الافقية لرد الفعل عند a معلوم انها تساوي ٦ ميغانيوتداً) . ويمكن الحصول عليها من الشروط التالية :

١ – عـــزم الانعطـــاف في المفصل h يساوي صفراً ، اي ان مجموع العزوم للقـــوى الموجودة على يمين h تساوي صفراً ، ويعبر عن ذلك بالشرط $M_{hr} = 0$ (لقد كان بالامكان أخذ مجموع العزوم للقوى الموجودة على يسار h تساوي صفراً) ولهذا فان :

$$10 . (4) - 8 . D_v = 0 \quad ; \quad D_v = 5,0 \text{ Mp}$$

٢ – عزم الانعطاف في المفصل g يساوي صفراً . ولهذا فان عزم القوى على يمين g يعطي :

$$16 . (5) - 10 C_v + 10 . (16) - 5 . (20) = 0 \quad : \quad C_v = 14,0 \text{ Mp}$$

٣ – العزم (مجموع العزوم) لجميع القوى حول المسند (بالنسبة للمسند) b يساوي صفراً ويعبر عنه بالشرط $\Sigma M_b = 0$. لهذا ينتج :

$$16 . (7) - 14 . (12) + 10 . (18) - 5 . (22) - 12 . (4) + 8 A_v = 0 :$$

$$A_v = 4,25 \text{ Mp}$$

٤ – العزم (مجموع العزوم) لجميع القوى حول المسند a يساوي صفراً ويعـــبر عنه بالشرط $\Sigma M_a = 0$. ولهذا ينتج :

$$12 . (4) - 8 . B_v + 16 . (15) - 14 . (20) + 10 . (26) - 5 . (30) = 0 :$$

$$B_v = 14,75 \text{ Mp}$$

وبهذا تتحدد جميع المجاهيل . ويمكن تدقيق هذه النتائج كما يلي :

$$\Sigma V = 0$$

مجموع الحمولات الشاقولية :

$$12 + 16 + 10 = 38 \text{ Mp}$$

مجموع ردود الافعال الشاقولية :

$$-(4,25 + 14,75 + 14 + 5) = -38 \text{ Mp}$$

مجموع الحمولات الشاقولية + مجموع ردود الافعال الشاقولية = 0 .

٢ – حساب قيم القطع :

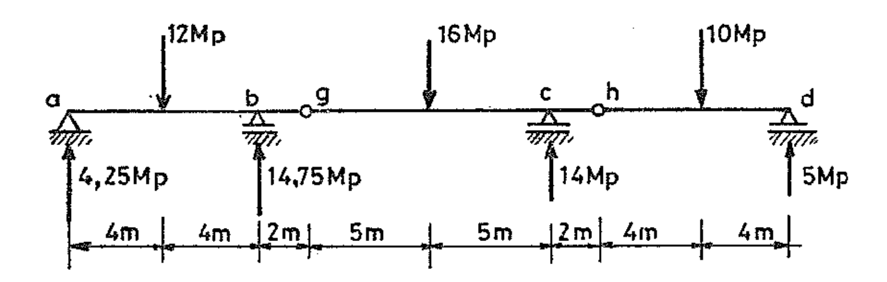
يمكن الان رسم مخطط القوة العرضية ابتداء من الطرف الايسر عند a وهو شكل مـــدرج

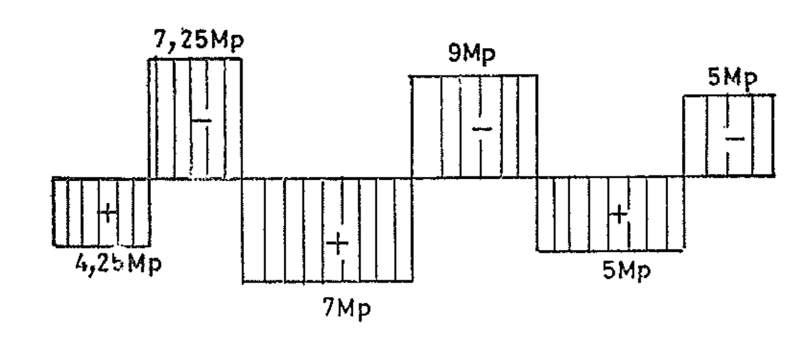
وتمشى الزيادة والنقصان فيه مع اتجاه الحمولات الوحيدة كما يظهر في الرسم ومن السهل تتبع هذا الشكل .

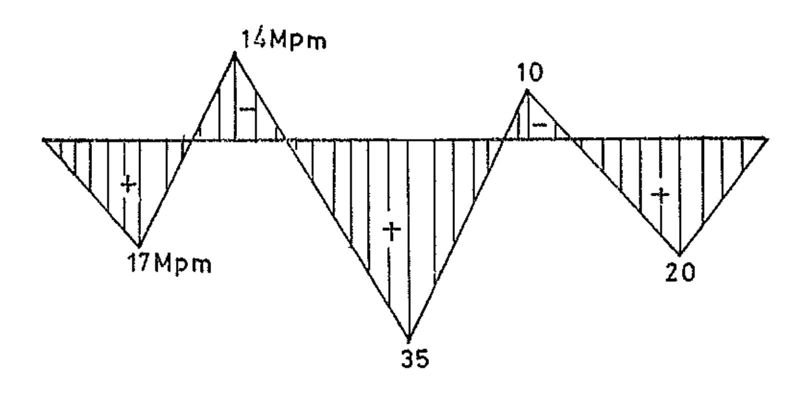
ويلاحظ ان قيمة القوة العرضية لا تتغير عند المفصل الداخلي ما لم توجد قـوة وحيدة خارجية في موضع المفصل .

٣ ـ رسم مخططات قيم القطع :

سيتم هنا رسم مخطط عزم الانعطاف باستعمال فكرة فرق العزوم حيث يكون التغير في عزم الانعطاف بين قطعين مساوياً لمساحة مخطط القوة العرضية بين القطبين المذكورين ، وبذلك تحسب







شكل 2-92

قيم عزوم الانعطاف عند الحمولات الوحيدة ومواضع ردود الافعال عند المساند . ويلاحظ ان عزم الانعطاف في موضع المفصل الداخلي يجب ان يساوي صفراً .

لقد تم في الشكل (2-92) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 48 :

المطلوب : تعيين قيم القطع للجائز المفصلي الممثل في الشكل (2-93) .

الحل :

ـ ردود افعال المساند :

يختلف الجائز الممثل في الشكل (2-93) عن الجائز المبين في الشكل (2-92) والذي سبق حله ، في مواضع المفاصل الداخلية فقط . ويكون تحديد ردود الافعال الشاقولية كما يلي :

١ ـ عزم الانعطاف في المفصل f يساوي صفراً (يؤخذ الجزء الايمن من المفصل f ، أي الجزء fd) ويعبر عن هذا الشرط بالعلاقة التالية $M_{fr} = 0$ ، ولهذا :

$$M_{fr} = 0 \; : \; 10 \, . \, (8) - 12 \, . \, D_v - 2 \, C_v = 0 \qquad (a)$$

ولا يمكن الآن حل هذه المعادلة لانها تحوي مجهولين ، ولهذا يستمر في تحديد الشرط الثاني هكذا .

٢ ـ عزم الانعطاف في المفصل e يساوي صفراً (يؤخذ الجزء الايمن من المفصل e ، أي ed) ويعبر هذا الشرط بالعلاقة التالية : $M_{er} = 0$ وبذلك يتم التوصل للعلاقة المطلوبة :

$$M_{er} = 0 \; : \; 16 \, . \, (5) + 10 \, . \, (16) - 10 \, . \, C_v - 20 \, . \, D_v = 0 \qquad (b)$$

ومن المعادلتين (a) و (b) ينتج أن :

$$D_v = 4\,0 \text{ Mp}$$

$$C_v = 16{,}0 \text{ Mp}$$

٣ ـ ويمكن الان تحديد ردي الفعل عند b , a من الشرطين السابقين ولكن بأخذ العزوم للقوى الموجودة على يسار e , f بدلا من تلك التي على يمينها ، هكذا :

$$M_{f l} = 0 : 16 . (3) + 12 . (14) - 10 . B_v - 18 A_v = 0 \qquad (c)$$

$$M_{e l} = 0 : 12 . (6) \qquad - 2 B_v - 10 A_v = 0 \qquad (d)$$

من هاتين المعادلتين ينتج :

$$A_v = 4{,}5 \text{ Mp}$$

$$B_v = 31{,}5 \text{ Mp}$$

لقد كان من الممكن أخذ العزوم (مجموع العزوم) لجميع القوى حول b لايجاد رد الفعل A_V ثم حول a لايجاد رد الفعل B_V بعد معرفة ردي الفعل عند c , d مما سبق .

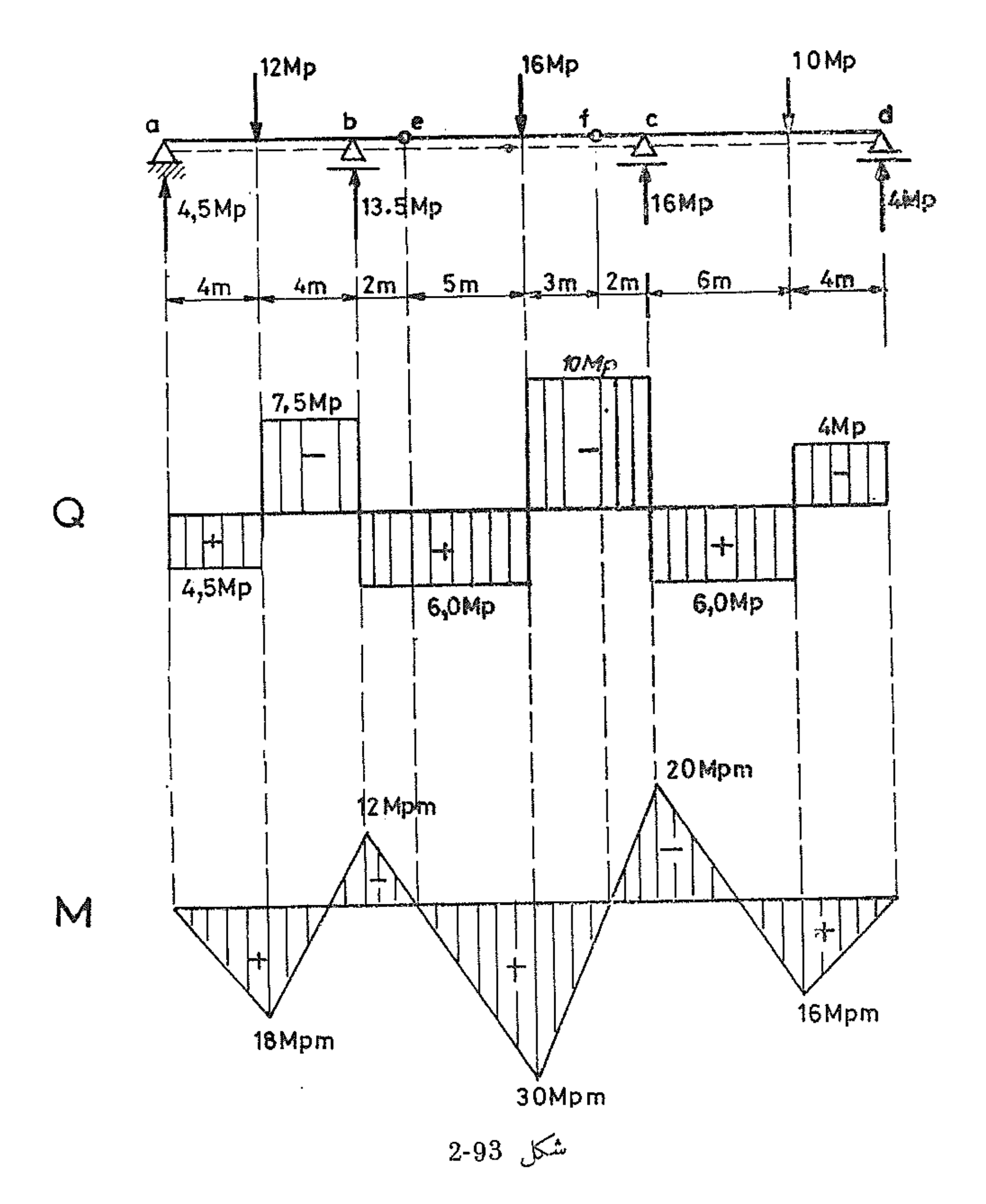
ويستطاع الآن لتدقيق النتائج السابقة جمع كل الحمـــولات وردود الافعال فيرى ان مجموعهـا يساوي صفراً .

٢ ـ مخططات قيم القطع :

لقد تم رسم مخططات قيم القطع فى الشكل (2-93) .

٧ ـ ٢ الطريقة الثانية (لحل الجيزان المفصلية تحليلياً)

تعتمد هذه الطريقة على تقسيم الجائز الى أجزاءه الانشائية ودراسة القوى المؤثرة على كل جزء وايجاد ردود الافعال ومخططات القوى العرضية وعزوم الانعطاف التابعة له والناتجة عن هـــذه القوى . وتتحدد الاجزاء الانشائية بمواقع المفاصل الداخلية . وتبعاً لهذا فان الجائز المبـين في الشكل (2-89 b) ينقسم انشائياً الى جزئين ae , ec وينقسم الجائز المبين في الشكل (2-90 c) الى ثلاثة اجزاء هي : ae , ef , fd كما أن الجائز المركب الممثل في الشكل (2-90 b) ينقسم انشائياً الى الاجزاء الثلاثة التالية : ag , gh , hd ويعتبر كل جزء من هذه الاجزاء جائزاً بسيطاً او جائزاً ممتد الاطراف وقد يكون الجزء الاخير جائزاً بارزاً (ظفراً)اذا كان المستـند الخارجي مسنداً موثوقاً . ويستند كل جزء من اجزاء الجائز على مسندين مفصليين (فيما عـدا الجزء الاخير من الجانبين فقد يكون جائزاً بارزاً) . وهذه المساند اما ان تكون مســـاند خارجية من المساند الفعلية للجائز أو مسند داخلي عند المفصل الداخلي حيث يستند احد جانبي الجائز على الجانب الاخر والجزء الذي يستند على مسندين من المساند الخارجيـة قادر على ان يتحمل ما عليه من حمولات خارجية ، وما عسى ان يؤثر عليه من ردود فعل عند موضع المفصل الداخلي خارج هذين المسندين بوصفه حاملا للاجزاء التي على جانبيه اذا لزم الامر . اما جـزء الجائز الذي يستند على مسندين من المساند الداخلية عند مفصلين داخليين على جانبيه من الجائز



شكل 2-93

فيسمى هذا الجزء احياناً **بالفتحة المعلقة** وينقل رد الفعل المؤثر عليه باشارة معاكسة الى الجزء الذي يحمله كقوة مؤثرة على هذا الجزء نتيجة حمله لهذه الفتحة المعلقة . فاذا كان بجزء الجائز مسند خارجي واحد لزمه مسند داخلي آخر في موضع المفصل الداخلي حيث يستند على الجزء الذي يليه والذي يحمل رد فعله في هذا الموضع . ولايضاح هذا يرجع الى الجيزان المفصليـــة المركبة التي تم التنويه عنها سابقاً ، حيث يرى في الشكل (2-89 b) ان الجزء ae يستند عند e على الجزء ecb وفي الشكل (2-90 c) يرى ان الجزء ef هو فتحة معلقه تستنـد يمينـاً على الجزء fcd عند f ويساراً على الجزء eba عند e اما اجزاء الجائز المركب الممثل في الشكل (2-92 a)

فيرى فيها ان الجزء dh يستند عند h على الجزء gch الذي يستند بدوره عند g على الجـزء abg . وليعتبر الان المثال التالي :

مثـال 49 :

المطلوب : تعيين قيم القطع للجائز المفصلي المركب الممثل في الشكل (2-94) باستخدام طريقة تقسيم الجائز الى اجزاءه الانشائية .

الحـل :

١ - ردود افعال المساند :

يبين الشكل (2-94) الاجزاء الانشائية الثلاثة للجائز ومن السهل تتبع ردود الافعال المؤثرة على كل جزء منها ويلاحظ مايلي :

١ - الجائز البسيط hd يكون رد الفعل عليه عند h يساوي 5 ميغا بوند الى الاعلى . ويؤثر هذا بقوة مساوية ومعاكسة على الجائز الحامل gch عند h اي بقوة تساوي 5 ميغابوند الى الاسفل .

٢ - الجائز gch يكون رد الفعل له عند g هو 7 ميغابوند الى الاعلى ويحسب بأخـذ العزوم حول c ولهـذا تؤثر على الجزء الثالث abg بقـــوة تسـاوي 7 ميغابوند الى الاسفل .

٢ - مخططات قيم القطع :

ويمكن الان رسم مخططات القوى العرضية وعزوم الانعطاف لكل جزء على حدة بالطريقةالعادية وبذلك يتم الحصول على نفس المخططات المبينة في الشكل (2-94) .

٢ - ٣ أمثلة

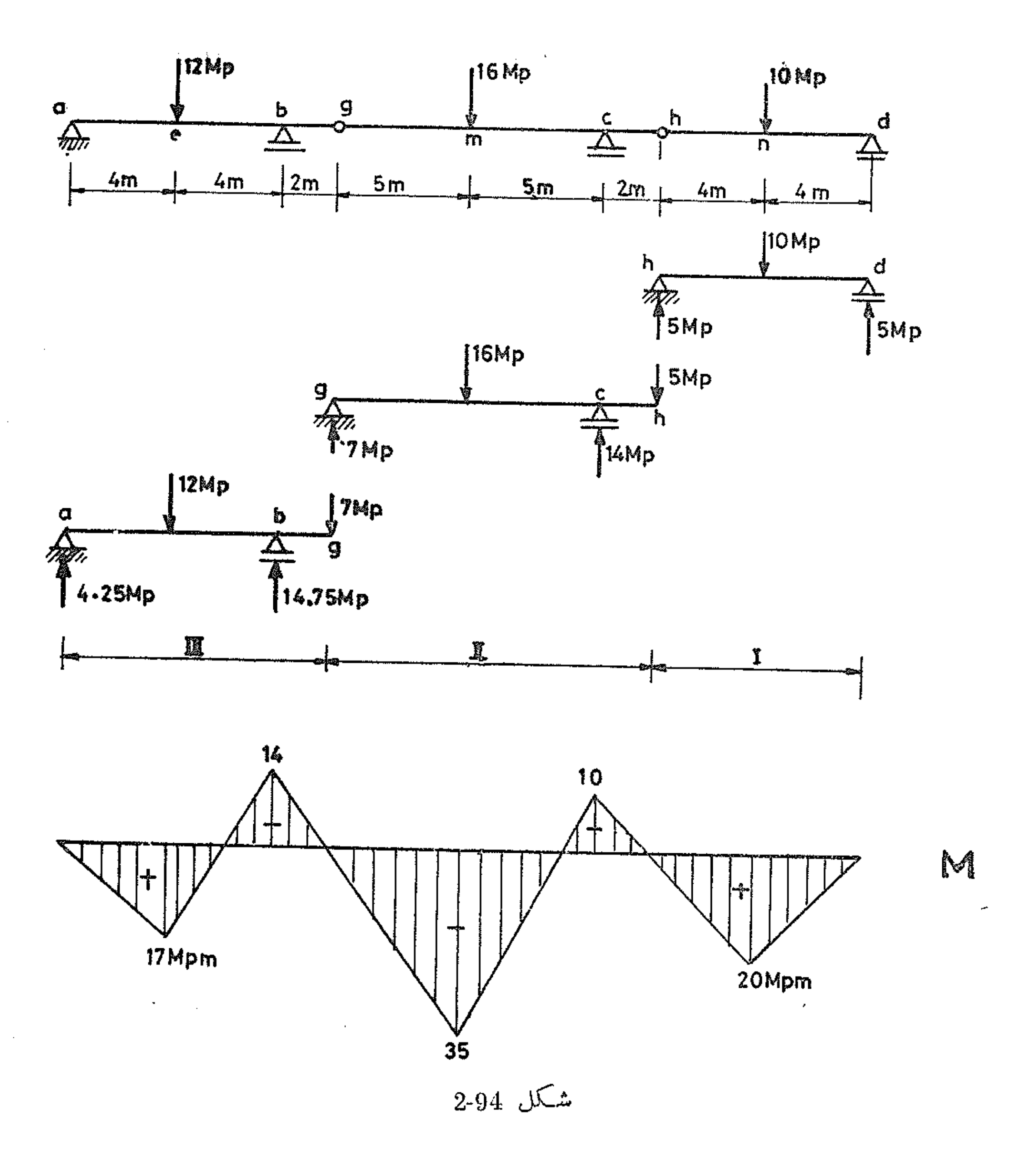
مثـال 50 :

الجائز المفصلي الممثل في الشكل (2-95) .

المعطى :

$$P_1 = 3000 \text{ kp} \;;\; \alpha = 30^\circ \;;\; l_2 = 3\text{m} : l_4 = 1\text{m}$$

$$P_2 = 4000 \text{ kp} \;;\; l_1 = 2\text{m} \;;\; l_3 = 4\text{m} \;;\; l_5 = 2\text{m}$$



شكل 2-94

المطلوب :

١ ـ حساب ردود افعال المساند (قوى الاستناد) .

٢ ـ حساب قوى المفاصل (قوى التمفصل) .

٣ ـ حساب ورسم مخططات قيم القطع (القوة الناظمية ، القوة العرضية ، عزم الانعطاف) .

الحـل :

١ ـ الطريق التحليلي (باستخدام الطريقة الثانية) :

بتطبيق شروط التوازن على الجمل الجزئية (شكل 2-95 d) ينتج :

	الجزء الايسر	الجزء الايمن
$\Sigma V = 0$:	$A_v + B_v + G_v - P_1 = 0$;	$C_v - G_v - P_2 \sin\alpha = 0$
$\Sigma H = 0$;	$G_H - A_H = 0$;	$G_H - P_2 \cos\alpha = 0$
$\Sigma M_a = 0$:	$G_v\, l_3 + B_v\, l_2 - P_1\, l_1 = 0$;	$C_v \,.\, l_4 - P_2 \sin\alpha \,.\, l_5 = 0$

يعطي حل مجموعة المعادلات السابقة ردود الافعال المطلوبة :

$$A_H = P_2 \,.\, \cos\alpha \;,\; 4000\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 3464 \text{ kp}$$

$$A_v = (1 - \frac{l_1}{l_2})\,P_1 + (\frac{l_3}{l_2} - 1)(\frac{l_5}{t_4} - 1)\,P_2 \sin\alpha = 1669 \text{ kp}$$

$$B_v = \frac{l_1}{l_2}\,P_1 - \frac{l_3}{l_2}\,(\frac{l_5}{l_4} - 1)\,P_2 \sin\alpha = -\,667 \text{ kp}$$

$$G_H = P_2 \cos\alpha = 3464 \text{ kp}$$

$$G_v = (\frac{l_5}{l_4} - 1)\,P_2 \sin\alpha = 2000 \text{ kp}$$

$$C_v = \frac{l_5}{l_4}\,P_2 \sin\alpha = 4000 \text{ kp}$$

لتدقيق النتائج يمكن تطبيق شروط التوازن على الجسم بكامله ، حيث يمكن هناك الانطلاق من حقيقة انعدام العزم في المفصل ، هذه الشروط هي :

$$Mgr = 0 \;:\; C_v \,.\, l_4 - P_2 \sin\alpha \,.\, l_5 = 0$$

أو :

$$Mgr = 0 \;:\; A_v \,,\, l_3 + B_v\,(l_3 - l_2) - P_1\,(l_3 - l_1) = 0$$

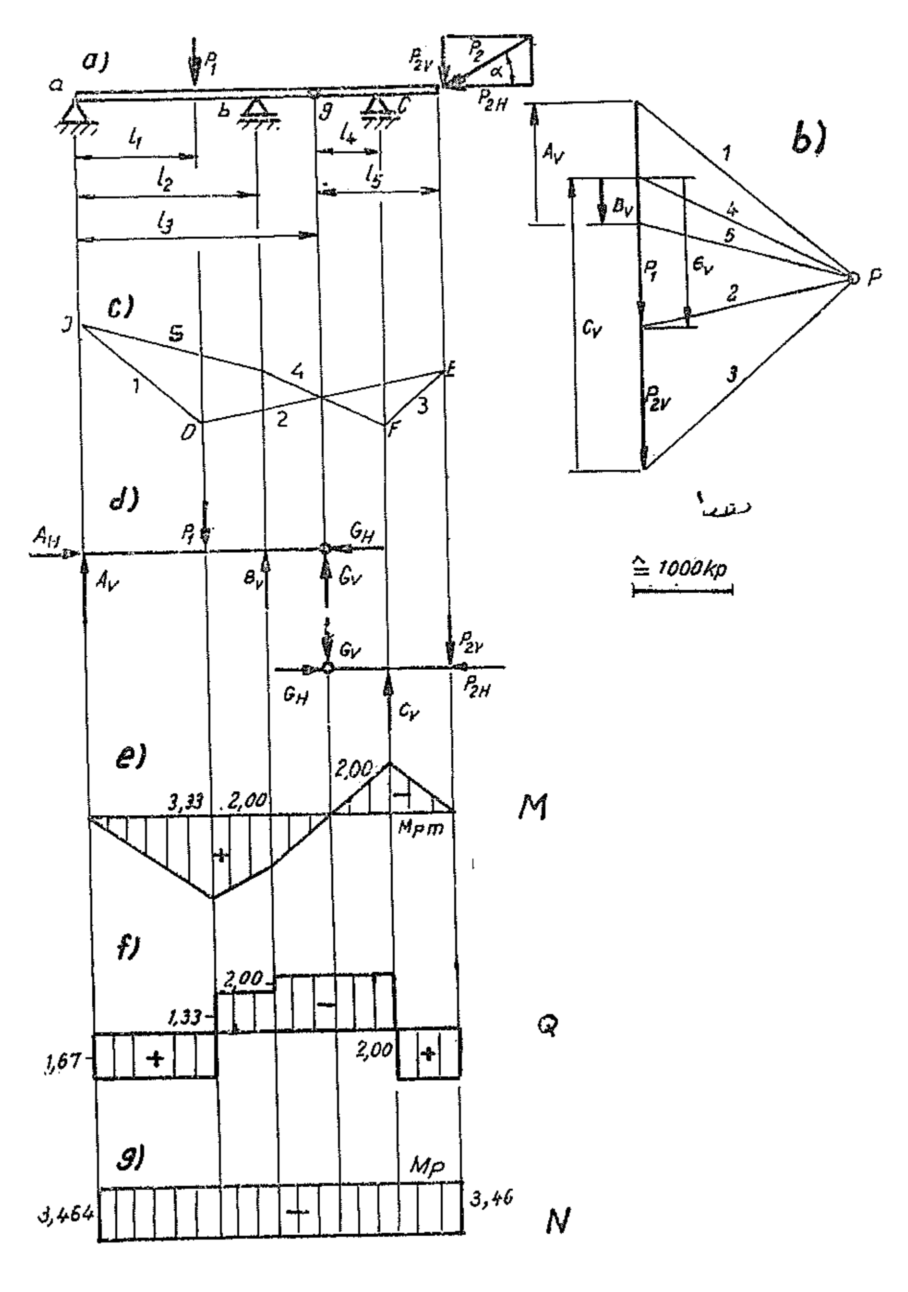
$$\Sigma M_a = 0 \;:\; C_v \,,\, (l_4 + l_3) + B_v \,,\, l_2 - P_2 \sin\alpha \,.\, (l_3 + l_5) - P_1\, l_1 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad A_v + B_v + C_v - P_1 - P_2 \sin\alpha = 0$$

$$\Sigma H = 0 \quad : \quad A_H - P_2 \cos\alpha = 0$$

٢ ـ الطريق التخطيطي :

يعتمد الحل التخطيطي على طريقة المضلع الحبلي (شكل 2-95 b) والمضلع JDEF(شكل 2-95 c)



شكل 2-95

بما ان عزم الانعطاف في المفصل g يساوي الصفر لذلك يلزم ان يتقاطع الشعاع 4 مع الشعاع 2 في النقطة g . لعدم إنكسار الشعاع 2 تحت النقطة b لذلك ينبغي على الاشعة 5,4 ، وبسبب تأثير القوة الوحيدة ، إحداث الانكسار اللازم .

تتقاطع الاشعة 1 , 5 عند النقطة J وذلك لتحقيق شرط انعدام العزم هناك .

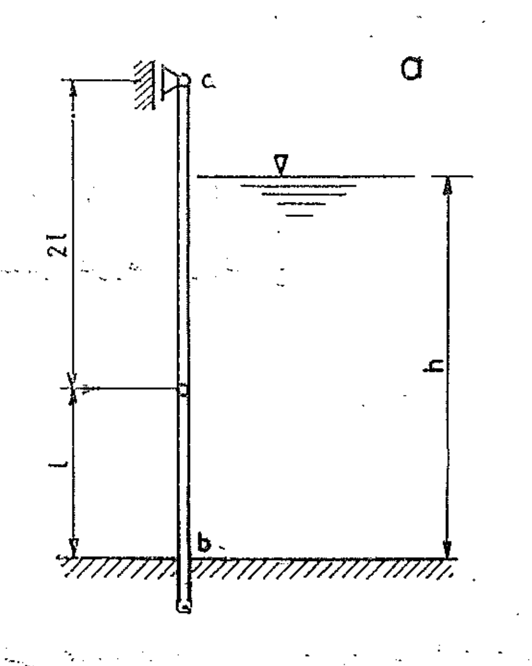
تحسب قيم القطع (ردود أفعال القطع) من الشكل (2-95 d) حسب الطريقة المعروفة الاشكال (2-95 c···g) .

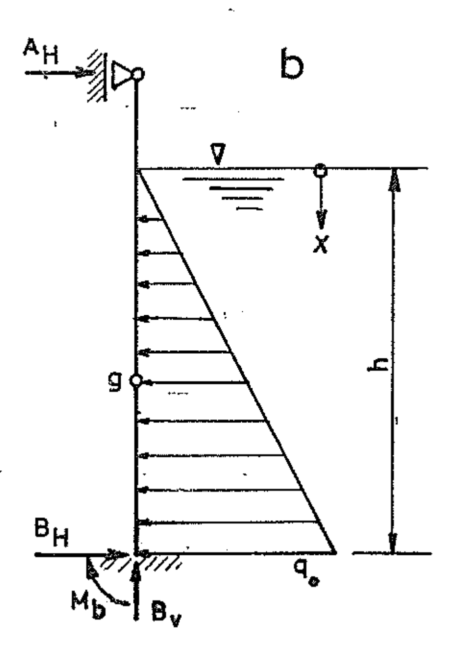
مثال 51 :

يتعرض باب عبارة مائية عرضه b لضغط الماء (شكل 96-2).

المعطى : l , b , h والوزن النوعي للماء γ .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند B , A كتوابع للارتفاع h .





شكل 96-2

الحل :

يمكن اعتبار ضغط الماء على باب العبارة المائية كحمولة مثلثية (التوزيع) . تصل شدة الحمولة الاعظمية عند النقاط x=h وتساوي $q_0=\gamma . h$. يتطلب حل المسألة التفريق بين حالتين للتحميل :

الحالة 1 $(h \geqq l)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن ، المعادلات التالية :

$$M_{g0} = 0 \; : \quad -A_H \, . \, (2l) + \frac{1}{2} \frac{(h-l)^2}{h} \, q_0 \, \frac{1}{3}(h-l \; . \, b = 0$$

$$\Sigma H = 0 \; : \quad A_H + B_H - \frac{1}{2} \, q_0 \, . \, h \, . \, b = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 \; : \quad -M_b \; -A_H \, . \, 3\,l + \frac{1}{2} \, q_0 \, . \, h \, . \frac{1}{3} \, h \, . \, b = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \quad B_v = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$A_H = \frac{1}{12} \frac{b}{l} \, (h-l)^3 \, . \, \gamma \qquad ; \quad B_H = \frac{1}{2} \, b \, h^2 \gamma - A_H$$

$$M_b = \frac{1}{6} \, bh^3 \gamma - 3 \, A_H l \qquad ; \quad B_v = 0$$

الحالة 2 $(h \leqq l)$:

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$M_{g0} = 0 \; : \quad A_H \, , 2\,l = 0$$

$$\Sigma H = 0 \; : \quad A_H + B_H - \frac{1}{2} \, q_0 \, . \, h \, . \, b = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \quad B_v = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 \; ; \quad -M_b \; -3A_H \, . \, l + \frac{1}{2} \, q_0 \, h \frac{1}{3} \, hb = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$A_H = 0 \; ; \quad B_H = \frac{1}{2} \, bh^2 \gamma \; ; \quad M_b = \frac{1}{6} \, bh^3 \gamma \; ; \quad B_v = 0$$

مثال 52 :

المطلوب : إيجاد قيم القطع للجائز الفصلي الممثل في الشكل (2-97) .

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$\Sigma H = 0 \;:\; A_H = 0$$

$$M_{g_I} = 0 \;:\; A_v \,.\, l - ql \,.\, \frac{l}{2} = 0 \;;\; A_v = \frac{ql}{2}$$

$$\Sigma M_b = 0 : A_v \,.\, 2l - C_v \,.\, l + q\,l \,.\, \frac{l}{2} - q\,(2l)\,\frac{2l}{2} = 0 \;;\; C_v = -\frac{q\,l}{2}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v + C_v - q \,.\, 3l = 0 \;;\; B_v = 3\,q\,l$$

التدقيق :

يعطي تطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة للنقطة g العلاقات التالية :

$$\Sigma M_g = 0 : A_v \,.\, l - B_v \,.\, l - C_v \,.\, 2l + q \,.\, 3\,l \,.\, \left(\frac{3}{2}\,l - l\right) = 0$$

٢ ـ حساب قيم القطع

يتألف الجائز من مجالين .

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq 2l)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2-97 b) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q - A_v + q\,x_1 = 0 \quad : \quad Q = \frac{q\,l}{2} - q\,x_1$$

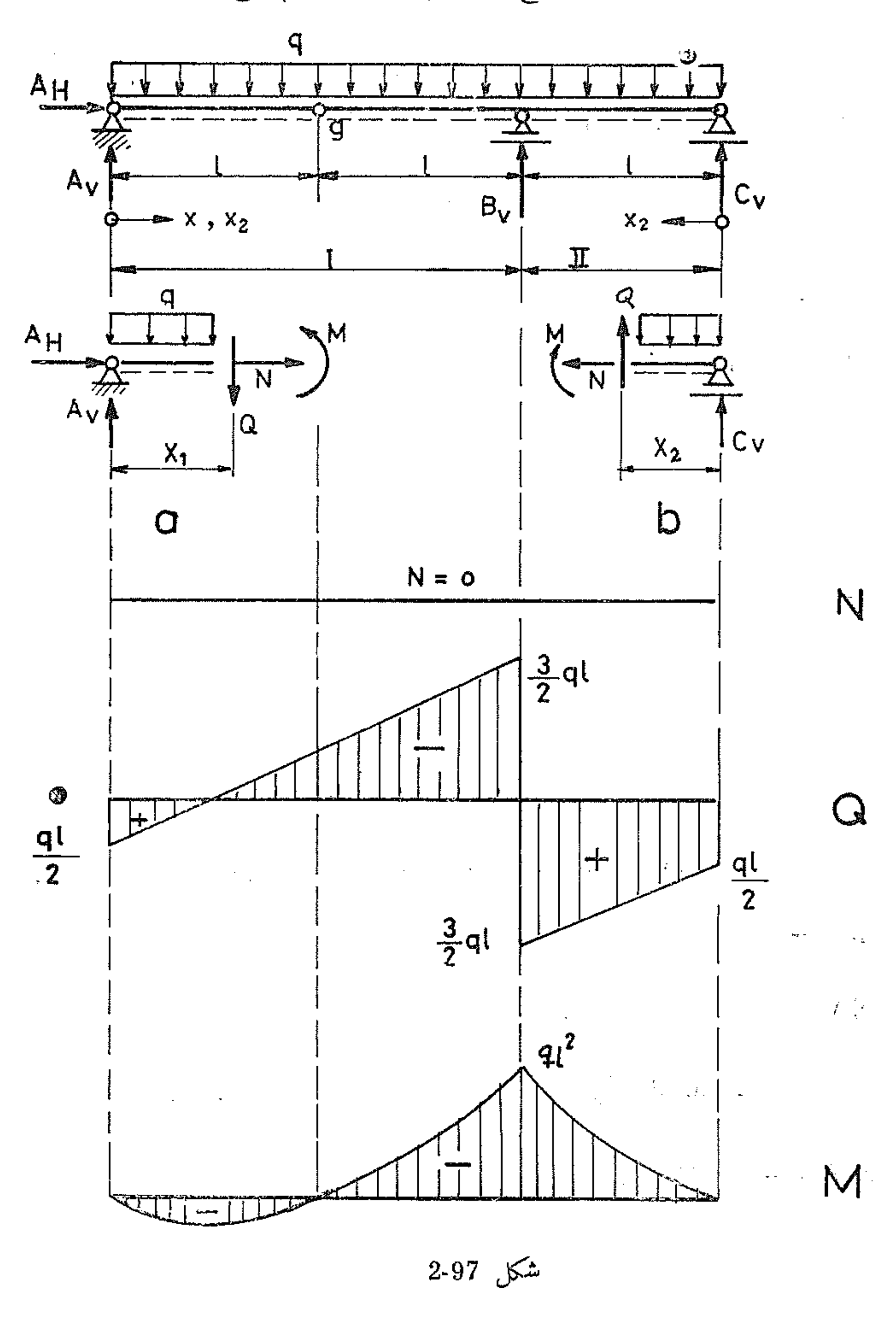
تمثل معادلة القوة العرضية خطاً مستقيماً ميله q- ولا يمر من مركز الاحداثيات .

$$\Sigma M_{x1} = 0 : M - A_v \,.\, x_1 + q\,x_1\,\frac{x_1}{2} = 0 : M = \frac{q\,l}{2}\,x_1 - q\,\frac{x_1^2}{2}$$

تمثل معادلة عزم الانعطاف قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية .

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq l)$.

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل 2-97 c) ينتج :



شكل 2-97

$$\Sigma H = 0 \ : \ N = 0$$

$$\Sigma V = 0 \ : \ Q + C_v - q x_2 = 0 \ : \ Q = \frac{q l}{2} + q x_2$$

تمثل معادلة القوة العرضية خطاً مستقيماً ميله q+ ولا يمر من مركز الاحداثيات .

$$\Sigma M_{x2} = 0 \ : \ M - C_v \, . \, x_2 + q x_2 \frac{x_2}{2} = 0 \ : \ M = -\frac{q l}{2} x_2 - q \frac{x_2^2}{2}$$

تمثل معادلة عزم الانعطاف قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية .

مثال 53 :

المطلوب : ايجاد قيم القطع للجائز المفصلي الممثل في الشكل (2-98a) .

الحـل :

١ ـ ايجاد ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$M_{gr} = 0 \ : \ C_v \, . \, 6{,}00 - 15{,}0 \, . \, 3{,}00 = 0 \ ; \ C_v = + 7{,}50 \text{ Mp}$$

$$\Sigma H = 0 \ : \ A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \ : \ C_v \, . \, 16{,}00 + B_v \, . \, 7{,}00 - 15{,}00 \, . \, 13{,}00 = 0$$

$$B_v = + \frac{75}{7} \text{ Mp} \approx 10{,}7142 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 \ : \ A_v + B_v + C_v - 15{,}0 = 0 \ ; \ A_v = -3{,}2142 \text{ Mp}$$

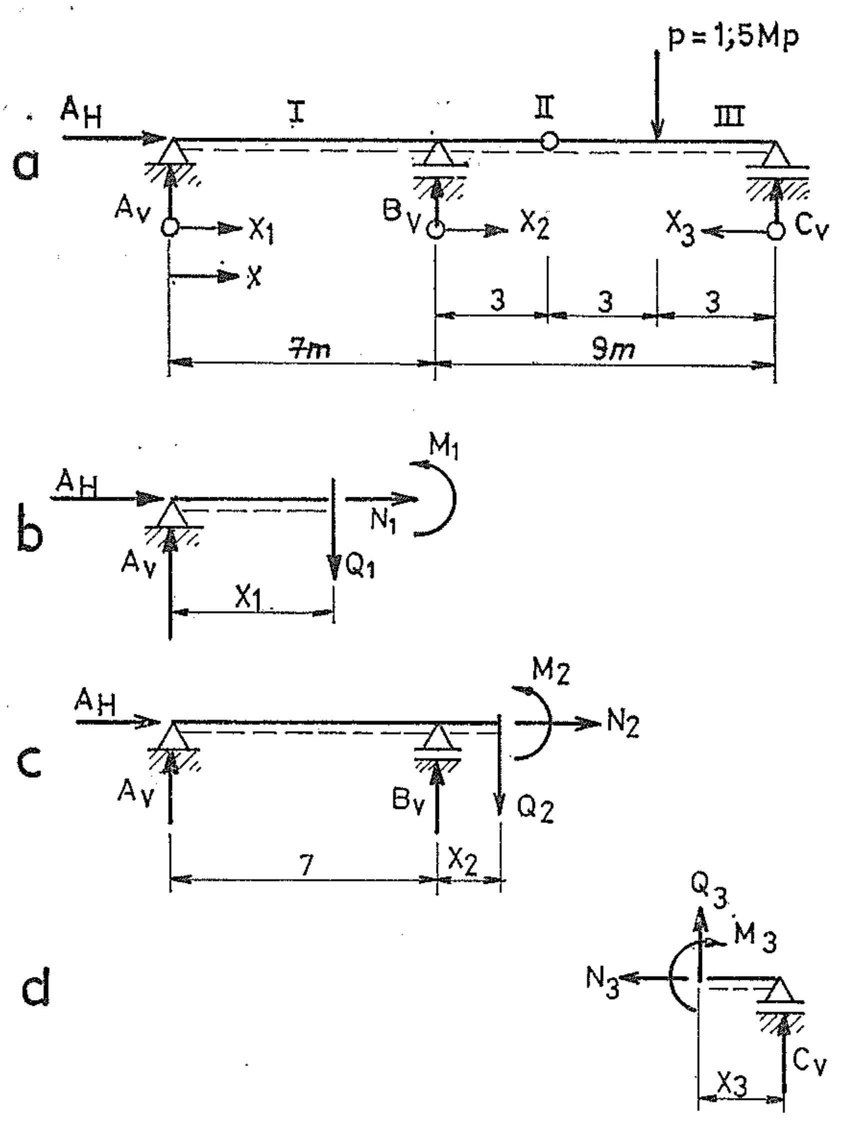
التدقيق :

$$M_{gl} = 0 \ : \ A_v \, . \, 10 + B_v \, . \, 3 = 0$$

بتبديل ردود أفعال المساند بقيمها يرى أن العلاقة محققة وهذا ما يؤكد صحة النتائج .

٢ ـ حساب قيم القطع :

يتألف الجائز من ثلاثة مجالات .



شكل 2-98

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq 7)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2-98b) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \; : \; N_1 + A_H = 0 \; : \; N_1 = -A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; Q_1 - A_v = 0 \; : \; Q_1 = +A_v = -3{,}2142 \text{ Mp} = -\frac{22.5}{7} \text{Mp}$$

$$\Sigma M_{x_1} = 0 : \; M_1 - A_v x_1 = 0 \; : \; M_1 = A_v x_1 = -\frac{22{,}5}{7} x_1$$

$$x_1 = 0 \; : \; M_1 = 0$$
$$x_1 = 7 \; : \; M_1 = -22{,}5 \text{ Mpm}$$

باشتقاق معادلة عزم الانعطاف M_1 والحصول على القوة العرضية Q_1 يؤكد صحة النتيجة .

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq 6)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2-98c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \; : \; N_2 = -A_H = 0$$
$$\Sigma V = 0 \; : \; Q_2 - A_v - B_v = 0 \; : \; Q_2 = A_v + B_v$$

بتبدبل قيم ردود افعال المساند في العلاقة الاخيرة يتم الحصول على القوة العرضية :

$$Q_2 = -\frac{22.5}{7} + \frac{7{,}5}{7} = \frac{52{,}5}{7} = 7{,}5 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_{x2} = 0 : M_2 - B_v \cdot x_2 - A_v \cdot (7{,}0 + x_2) = 0$$
$$M_2 = B_v \, x_2 + A_v \, (7{,}0 + x_2)$$

يعطي تبديل ردود افعال المساند في المعادلة الاخيرة عزم الانعطاف :

$$M_2 = -\, 22{,}5 + \frac{52{,}5}{7} \, x_2$$

$$x_2 = 0 \; : \; M_2 = -22{,}5 \text{ Mpm}$$
$$x_2 = 6 \; : \; M_2 = +22{,}5 \text{ Mpm}$$

باشتقاق معادلة عزم الانعطاف بالنسبة للاحداثي x_2 يتم الحصول على تابع القوة العرضية وهذا يؤكد صحة النتيجة .

المجال III $(0 \leqq x_3 \leqq 3)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل 2-98d) العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N_3 = 0$$
$$\Sigma V = 0 : Q_3 + C_v = 0 \; : \; Q_3 = -C_v = -\, 7{,}50 \text{ Mp}$$

$$\sum M_{zz}=0:\ M_3 - C_v.x_3=0\ :\quad M_3 = + C_v x_3 = 7{,}50\ x_3$$

$$x_3 = 0\ :\ M_3 = 0$$

$$x_3 = 3\ :\ M_3 = 22{,}5\ \text{Mpm}$$

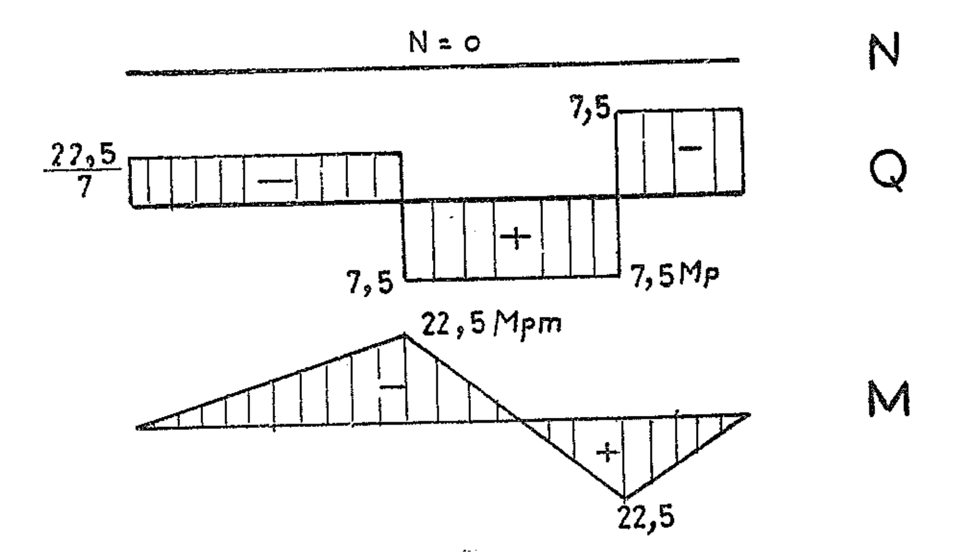
باشتقاق تابع عزم الانعطاف :

$$\frac{dM_3}{dx} = -\frac{dM_3}{dx_3} = -\frac{d}{dx_3}(C_v\ x_3) = -\ C_v = Q_3$$

تتأكد صحة النتيجة .

٣ ـ رسم مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-99) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-99

مثال 54 :

المعطى : الجائز المفصلي الممثل في الشكل (2-100) .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحـــل :

١ ـ ردود أفعال المساند :

تبلغ ردود افعال المساند وقوى المفاصل القيم التالية :

$$G_{1v} = G_{2v} = \frac{R_2}{2} = 20,0 \text{ Mp}$$

$$A_v = \frac{1}{6,0} (P_1 . 8,0 - R_1 . 1,0 - G_1 . 2,0) = 11,67 \text{ Mp}$$

$$B_v = \frac{1}{6,0} (-P_1 . 2,0 + R_1 . 7,0 + G_1 . 8,0) = 33,33 \text{ Mp}$$

$$C_v = \frac{1}{6,0} (G_{2v} . 9,0 + R_3 . 7,5 + P_2 . 2,0) = 68,75 \text{ Mp}$$

$$D_v = \frac{1}{6,0} (-G_{2v} . 3,0 - R_3 . 1,5 + P_2 . 4,0) = 26,25 \text{ Mp}$$

٢ - قيم القطع :

بسبب كون الجائز القضيبي مستقيم وبسبب كون الحمولات المؤثرة شاقولية لذلك لا تتشكل فيه أية قوى ناظمية (قوى طولية) .

تبلغ القوة العرضية في جزئي الجائز الايسرين القيم التالية :

$$- 15,0 \text{ Mp}$$

و

$$- 15,0 + A_v = - 15,0 + 11,67 = - 3,33 \text{ Mp}$$

تتوزع القوة العرضية بين المسندين الوسطيين بشكل خطي وذلك ابتداء من القيمة :

$$- 3,33 + B_v = - 3,33 + 33,33 = 30,0 \text{ Mp}$$

وحتى القيمة :

$$30,0 - R_1 - R_2 - R_3 = 30,0 - 10,0 - 40,0 - 15,0 = - 35,0 \text{ Mp}$$

أما القوة العرضية بين المسندين الايمنين فتثبت بواسطة القيمتين :

$$- 35,0 + C_v = - 35,0 + 68,75 = + 33,75 \text{ Mp}$$

$$33,75 - P_2 = 33,75 - 60,00 = - 26,25 \text{ Mp}$$

تقع نقطة انعدام القوة العرضية بين المفاصل على بعد :

$$x_0 = \frac{G_{1v}}{q_0} = \frac{20,0}{5,0} = 4,0 \text{ m}$$

لتحديد شكل عزم الانعطاف ينبغي حساب قيم العزوم في النقاط 1 , 2 , 3 , 4 , 5 والتي تبلغ قيمتها في تلك النقاط :

$$M_1 = - P_1 \, . \, 2,0 \qquad = - 30,0 \text{ Mpm}$$

$$M_2 = - P_1 \, . \, 8,0 + A_v \, . \, 6,0 = - 50,0 \text{ Mpm}$$

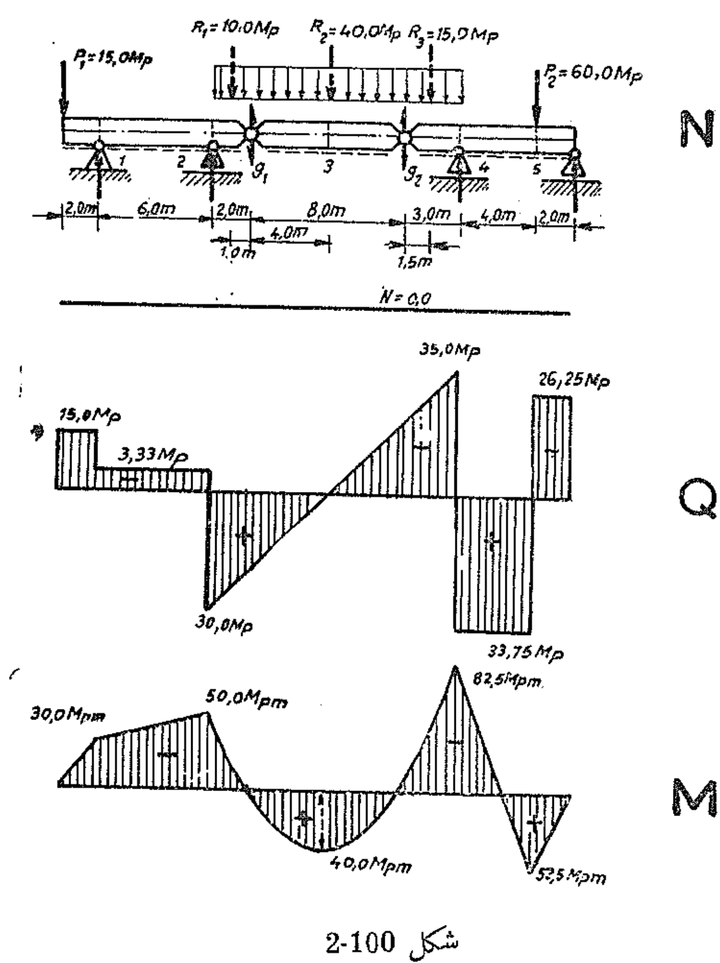
$$M_3 = G_{1v} \, . \, 4,0 - \frac{q_0 \, x_0^2}{2} \qquad = 40,0 \text{ Mpm}$$

$$M_4 = D_v \, . \, 6,0 - P_2 \, . \, 4,0 \qquad = - 82,5 \text{ Mpm}$$

$$M_5 = D_v \, . \, 2,0 \qquad = 52,5 \text{ Mpm}$$

٣ - رسم مخططات قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-100) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-100

٢ ـ ٧ ـ ٢ مفاصل الوصل لاتقع على مستقيم واحد :

يتبع فصيلة الجيزان المفصلية التي لاتقع مفاصل الوصل فيها على مستقيم واحـــد ، الجائز ثلاثي المفصل والاطار ثلاثي المفصل والقوس ثلاثي المفصل .

α ـ أمثلة

مثـال 55 :

القوس ثلاثي المفصل الممثل في الشكل (2-101 a) .

المعطى : محصلات القوى التي تؤثر على يمين ويسار القوس :

$R_1 = 6000\ kp$, $R_2 = 5000\ kp$

وكذلك ايضاً الابعاد والمقاييس التالية :

$\alpha = 30^0$;	$l_3 = 2\ m$;	$l_6 = 2\ m$
$l_1 = 2\ m$;	$l_4 = 5{,}5\ m$;	$l_7 = 2\ m$
$l_2 = 3{,}5\ m$;	$l_5 = 1{,}5\ m$;	$l_8 = 3{,}5\ m$

المطلوب : إيجاد ردود أفعال المساند بالطريقتين التحليلية والتخطيطية .

الحـل :

١ ـ الطريق التحليلي :

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء الايسر من الشكل (2-101 b) ما يلي :

$$\Sigma V = 0 : A_V - R_1 \cos\alpha + G_V = 0$$

$$\Sigma H = 0 : A_H + R_1 \sin\alpha - G_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : R_1\, l_5 \sin\alpha - R_1\, l_1 \cos\alpha + G_H\, l_6 + G_V\, l_3 = 0$$

كما يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن من الشكل (2-101 b) مايلي :

$$\Sigma V = 0 \; : \; -G_V - R_2 \cos + B_v = 0$$

$$\Sigma H = 0 \; : \; G_H - R_2 \sin \alpha - B_H = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 \; : \; R_2\, l_7 \sin \alpha + R_2\, l_3 \cos \alpha + G_V\, l_4 - G_H\, l_8 = 0$$

بحل مجموعتي المعادلات يتم الحصول على قيم ردود أفعال المساند :

$$A_H = 2579 \text{ kp} \;\; ; \;\; B_H = 3079 \text{ kp} \;\; ; \;\; G_H = 5579 \text{ kp}$$

$$A_V = 4129 \text{ kp} \;\; ; \;\; B_V = 5397 \text{ kp} \;\; ; \;\; G_V = 1067 \text{ kp}$$

لتدقيق النتائج يمكن هنا ايضاً تطبيق شروط التوازن على الجائز ككل :

$$\Sigma H = 0 \; : \; A_H - B_H + R_1 \sin \alpha - R_2 \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; A_V + B_V - R_1 \cos \alpha - R_2 \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 : \; -A_V \,.\, (l_2 + l_4) - A_H \,.\, (l_8 - l_6) + R_1 \cos \alpha \,.\, (l_3 + l_2 - l_1) -$$

$$- R_1 \sin \alpha \, [l_8 - (l_6 - l_5)] + R_2 \sin \alpha \,.\, l_7 + R_2 \cos \alpha \,.\, l_3 = 0$$

$$M_{gr} = 0 : - B_H \,.\, l_8 + B_V \,.\, l_4 - R_2 \cos \alpha \cdot (l_4 - l_3) - R_1 \sin \alpha \,.\, (l_8 - l_7) = 0$$

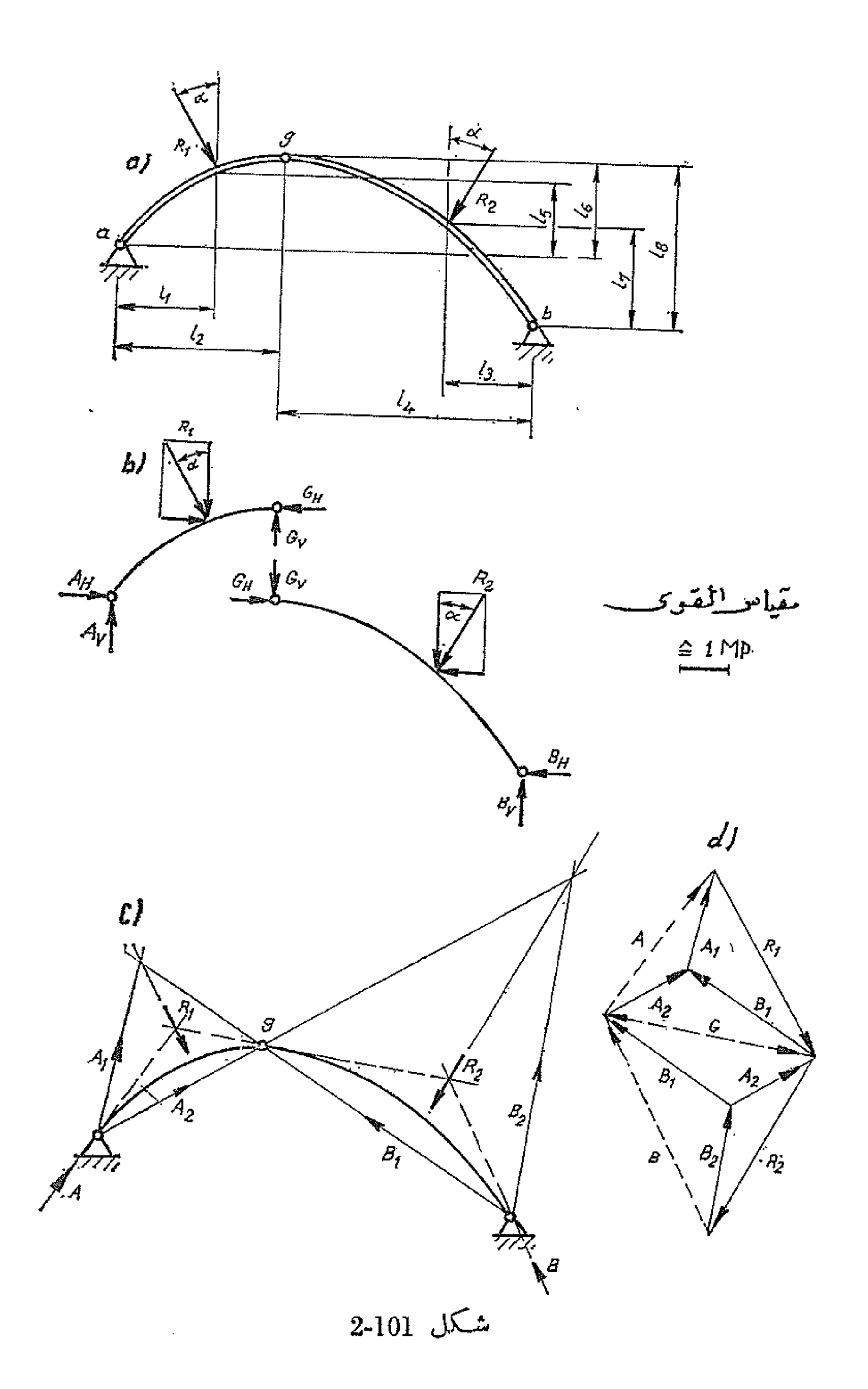
٢ ـ الطريق التخطيطي :

ليعتبر في البداية أن القوس ثلاثي المفصل محمل بالقوة R_1 فقط $(R_2 = 0)$.

وبما أن عزم الانعطاف في المفصل g يساوي الصفر اذاً ينبغي أن يمر حامل قوة رد الفعل B_1 من نقطة التمفصل g (شكل 4-101c) وكذلك ينبغي ان يمر حامل القوة A_1 من نقطة B_1 مع R_1 . لقد تم في الشكل (2-101 c) رسم مخطط القوى التابع لها .

بعد ذلك ليعتبر أن القوس محمل بالقوة R_2 فقط . وبسبب انعدام العزم في النقطة g يلزم أن يمر حامل القوة A_2 من g كما ينبغي أن يمر حامل B_2 من نقطة تقاطع A_2 مع R_2 . أما ردود افعال المساند النهائية فتساوي عندئذ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \qquad ; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$



شكل 2-101

عندما ترتب مضلعات القوى A_1 , B_1 , R_1 وكذلك A_2 , B_2 , R_2 بحيث تشكل القوى R_2 , R_1 مع بعضها تتابعاً شعاعياً ، عندئذ يتم تحقيق علاقة الجمع السابقة بنقل القوى A_2 , B_1 نقلا موازياً فقط .

التدقيق :

تشكل القوى A , G, R_1 وكذلك القوى B , G , R_2 مضلعات مغلقة للقوى (مضلعات قوى مغلقة) ، مما يحتم على كل منها ان تمر في مخطط المكان من نقطة واحدة .

عندما ترسم في مخطط المكان موازيات لحوامل القوى A , B , G الموجودة في مضلع القوى ، ينبغي ان تتقاطع هذه الموازيات مع حامل كل من القوتين R_1 وكذلك R_2 في نقطة واحدة .

لقد تم رسم ذلك في الشكل 2-101 c بشكل منقط .

مثال 56 :

المعطى : P , l . نصف قطر البكرة صغير ويمكن اهماله .

المطلوب : حساب ردود افعال المساند وقوى المفاصل وقيم القطع للجائز الممثل في الشكل (2-102) .

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند وقوى المفاصل :

بتطبيق شروط التوازن (الطريقة الثانية) على الجزء العلوي من الشكل (2-102 b) ينتج :

$$\Sigma V = 0 \; : - A_V + G_V - \frac{4}{5} P - P = 0$$

$$\Sigma H = 0 \; : \; A_H + G_H - \frac{3}{5} P = 0$$

$$\Sigma M_g = 0 \; : \; 3A_V \cdot l - 3\left(\frac{4}{5} + 1\right) P \cdot l = 0$$

وبتطبيق شروط التوازن على الجزء السفلي من الشكل (2-102 b) يتم الحصول على العلاقات التالية:

$$\Sigma V = 0 \; : - G_V + \frac{4}{5} P + B_V = 0$$

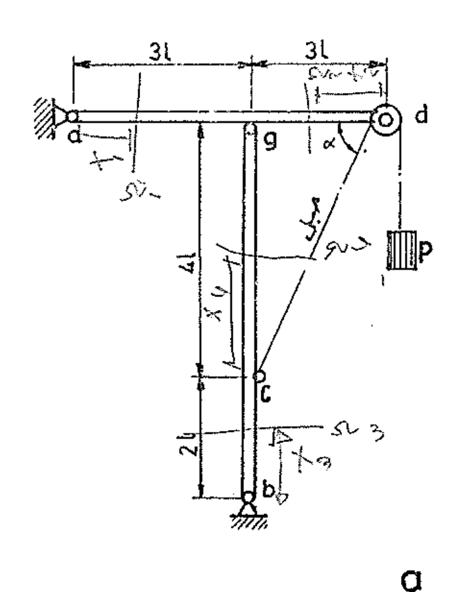
$$\Sigma H = 0 \; : - G_H + \frac{3}{5} P + B_H = 0$$

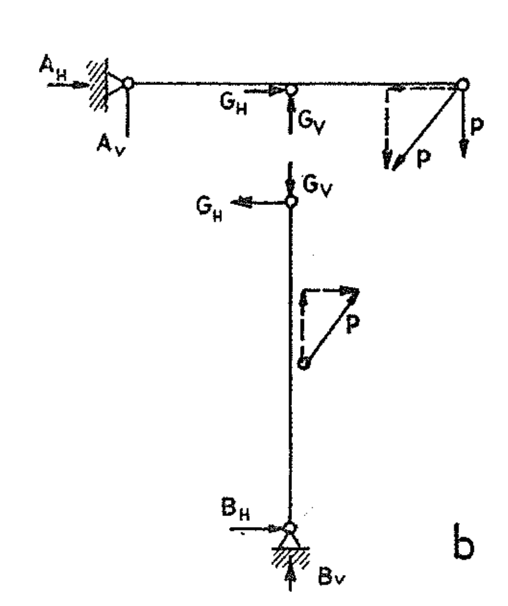
$$\Sigma M_g = 0 \; : \frac{3}{5} P \cdot 4l + 6B_H \cdot l = 0$$

النتيجة : بحل مجموعتي المعادلات يتم الحصول على المطلوب :

$$A_H = \frac{2}{5} P \; ; \; B_H = -\frac{2}{5} P \; ; \; G_H = \frac{1}{5} P$$

$$A_V = \frac{9}{5} P \; ; \; B_V = \frac{14}{5} P \; ; \; G_V = \frac{18}{5} P$$





شكل 2-102

يمكن ايضـــاً الحصول على ردود افعال المساند بتطبيق شـــروط التوازن على الجائز ككل (شكل 2-101) (باستخدام الطريقة الاولى) :

$$M_{gu} = 0 \;:\; -B_H \,.\, 6\,l - P \,.\, \frac{3}{5} \,.\, 4\,l = 0$$

$$B_H = -\frac{12}{30} P = -\frac{2}{5} P$$

$$\Sigma M_a = 0 \;:\; -B_V\, 3\,l - B_H \,.\, 6\,l + P \,.\, 6\,l = 0$$

$$B_v = 2\,P - 2B_H = 2\,P + \frac{4}{5} P = \frac{14}{5} P$$

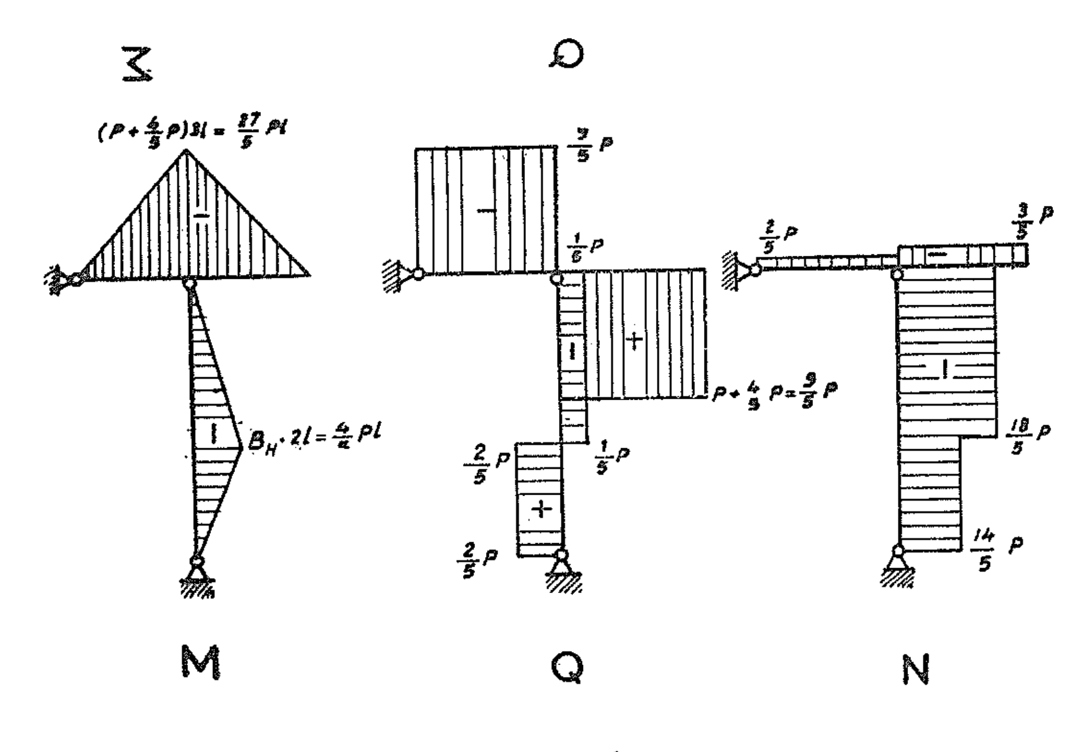
$$\Sigma H = 0 \;:\; A_H + B_H = 0$$

$$A_H = -B_H = +\frac{2}{5} P$$

$$\Sigma V = 0 \ : -A_v + B_v - P = 0$$

$$A_v = B_v - P = \frac{14}{5} P - P = \frac{9}{5} P$$

لقد تم رسم مخططات قيم القطع في الشكل (2-103) .



شكل 2-103

٢ ـ ٨ الجيزان الاطارية (الاطارات)

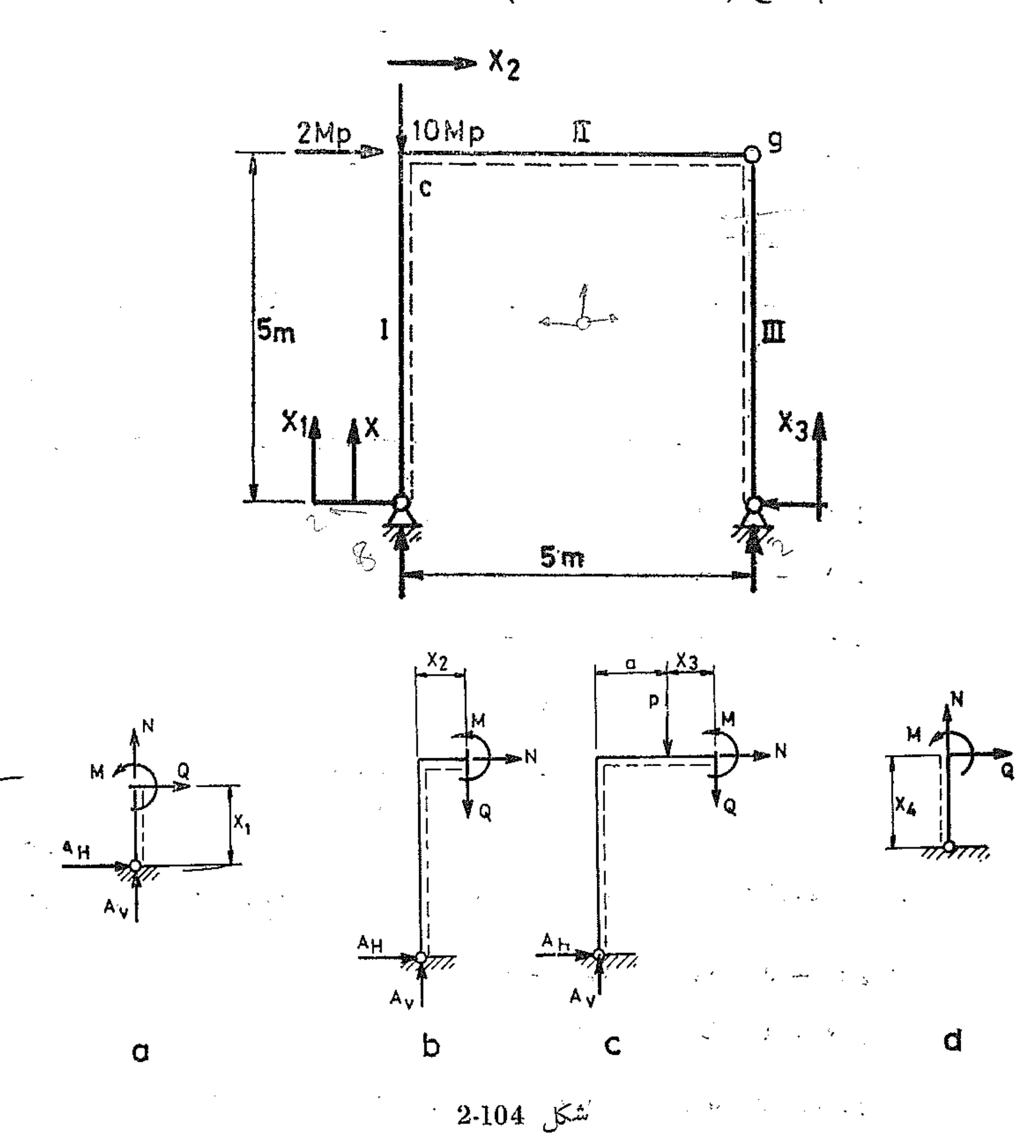
الاطارات هي الانشاءات التي يكون محورها الاوسط مضلعاً . ويطلق اسم **الاطارات البسيطة** على النوع الذي يستند على مسندين مفصليين ، احدهما من النوع الثابت الذي لايسمح بالانتقال (مسند ثابت) والثاني من النوع المتحرك الذي يسمح بالحركة الانتقالية باتجاه ما (مسند متحرك) ويكون رد الفعل عنده عمودياً على اتجاه الحركة . ويسمى هذا النوع من الاستناد بالاستناد البسيط أسوة بما سبق في حالة الجيزان البسيطة .

يطلق اسم **الاطار ثلاثي المفصل** على الاطار الذي يستند خارجياً على مسندين مفصليين من النوع الثابت الذي لا يسمح بالحركة الانتقالية والذي يحوي ايضاً بداخله عند احد القطوع العمودية

مفصل داخلي من النوع الذي يسمح بالدوران ولا يسمح بالحركة الانتقاليةوذلك بخلافالجيزان المفصلية المركبة التي قد يكون المفصل الداخلي فيها من النوع الذي يسمح بالحركة الانتقالية .

مثال 57 :

جائز اطاري ثلاثي المفصل (إطار ثلاثي المفصل) (شكل 2-104) .
المطلوب : ايجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .



شكل 2-104

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن وشرط المفصل (شرط انعدام العزم في المفصل) يتم الحصول على ردود أفعال المساند المطلوبة :

$$M_{gr} = 0 : B_H = 0$$

$$\Sigma M_. = 0 : B_V . 5 - 2.5 = 0 : B_V = 2 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 : A_V + B_V - 10 = 0 : A_V = 8 \text{ Mp}$$

$$\Sigma H = 0 : A_H + 2 - B_H = 0 : A_H = -2 \text{ Mp}$$

٢ ـ ايجاد معادلات قيم القطع .

يتألف الجائز من ثلاثة مجالات . بعد تثبيت الاحداثيات يمكن اجراء القطوع اللازمة .

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq 5)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع السفلي (شكل 2-104 a) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : Q_1 = - A_H = + 2 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 : N_1 = - A_V = - 8 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_{x1} = 0 : M_1 = - A_H x_1 = 2 x_1$$

$$x_1 = 0 : M_1 = 0$$

$$x_1 = 5 : M_1 = 10 \text{ Mpm}$$

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq 5)$

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر شكل (2-104 b) العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N_2 = - A_H - 2,0 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_2 = - 10 + A_V = - 2 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_{x2} = 0 : M_2 = - 10 x_2 + A_V x_2 - A_H . 5 = - 2 x_2 + 10$$

$$x_2 = 0 \quad : \quad M_2 = 10 \text{ Mpm}$$

$$x_2 = 5 \quad : \quad M_2 = 0$$

المجال $III(0 \leqq x_2 \leqq 5)$:

ان المجال III هو عبارة عن مسند نوسي ولعدم تأثير أية قوة خارجية عمودية على محوره يمكن فوراً القول بان $Q_3 = 0$, $M_3 = 0$. بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل c 2-104) تتأكد صحة العلاقات السابقة ويعطى علاوة على ذلك المعادلة التالية :

$$\Sigma H = 0 \quad : \quad Q_3 = B_H = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad : \quad M_3 = - B_H \, x_3 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad N_3 = - B_V = - 2 \text{ Mp}$$

التدقيق :

باقتطاع العقدة c (شكل 2-104 d) ثم تطبيق شروط التوازن عليها ينتج :

$$\Sigma H = 0 \quad : \quad N_2 + 2 - Q_1 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad Q_2 + 10 + N_1 = 0$$

$$\Sigma M_c = 0 \quad : \quad M_1 = M_2$$

بتبدبل القيم التي تم الحصول عليها يرى ان العلاقة محققة وهذا يؤكد صحة النتائج .

باقتطاع العقدة g (شكل 2-104 e) ثم تطبيق شروط التوازن عليها ينتج :

$$\Sigma H = 0 \quad : \quad N_2 = Q_3$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad Q_2 = N_3$$

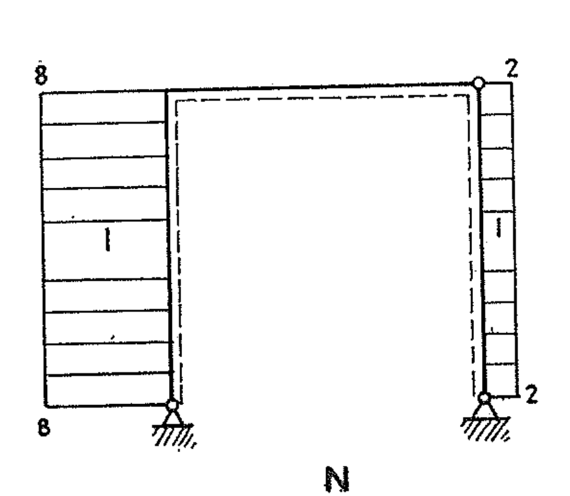
بتبدبل القيم التي تم الحصول عليها يرى أن العلاقات السابقة محققة وهذا يؤكد صحتها .

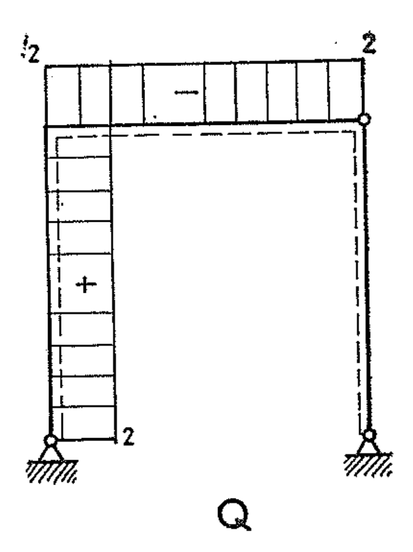
٣ ـ رسم مخططات قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-105) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثـال 58 :

المطلوب : ايجاد قيم القطع للجائز الاطاري الممثل في الشكل (2-106) .





شكل 2-105

(يهمل اثناء الحساب الوزن الذاتي للانشاء) .

الحـل :

١ ـ حساب ردود افعال المساند

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$\Sigma H = 0 \;:\; A_H = -P_2 = -2\,Mp$$

$$\Sigma M_a = 0 \;:\; B_v \,.\, 2 - P_1 \,.\, 4 - P_2 \,.\, 2 = 0 \;:\; B_v = 2\,P_1 + P_2$$

$$B_v = 4\,Mp$$

$$\Sigma V = 0 \ : \ A_v + B_v - P_1 = 0 \ : \ A_v = P_1 - B_v$$

$$A_v = -3\,Mp$$

التـدقيق :

$$\Sigma M_d = 0 \ : \ A_v \,.\, 4 + B_v \,.\, 2 - A_H \,.\, 2 = 0$$

بتبديل ردود الافعال بقيمها المحسوبة يرى ان العلاقة محققة وهذا يؤكد صحة النتائج .

٢ - حساب قيم القطع

يتألف الجائز من ثلاثة مجالات . بعد تثبيت الاحداثيات يمكن اجراء القطوع اللازمة .

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq 2)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شـكل 2-106 c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \ : \ Q_1 = -A_H = +2\,Mp$$

$$\Sigma V = 0 \ : \ N_1 = -A_v = +3\,Mp$$

$$\Sigma M_{x1} = 0 \ : \ M_1 = -A_H\, x_1 = 2\,x_1$$

تمثل هذه المعادلة مستقيما ميله 2+ ويمر من مركز الاحداثيات .

$$x_1 = 0 \ : \ M_1 = 0$$
$$x_1 = 2 \ : \ M_1 = 4\,Mpm$$

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq 2)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شـكل 2-106 d) العلاقات التالية :

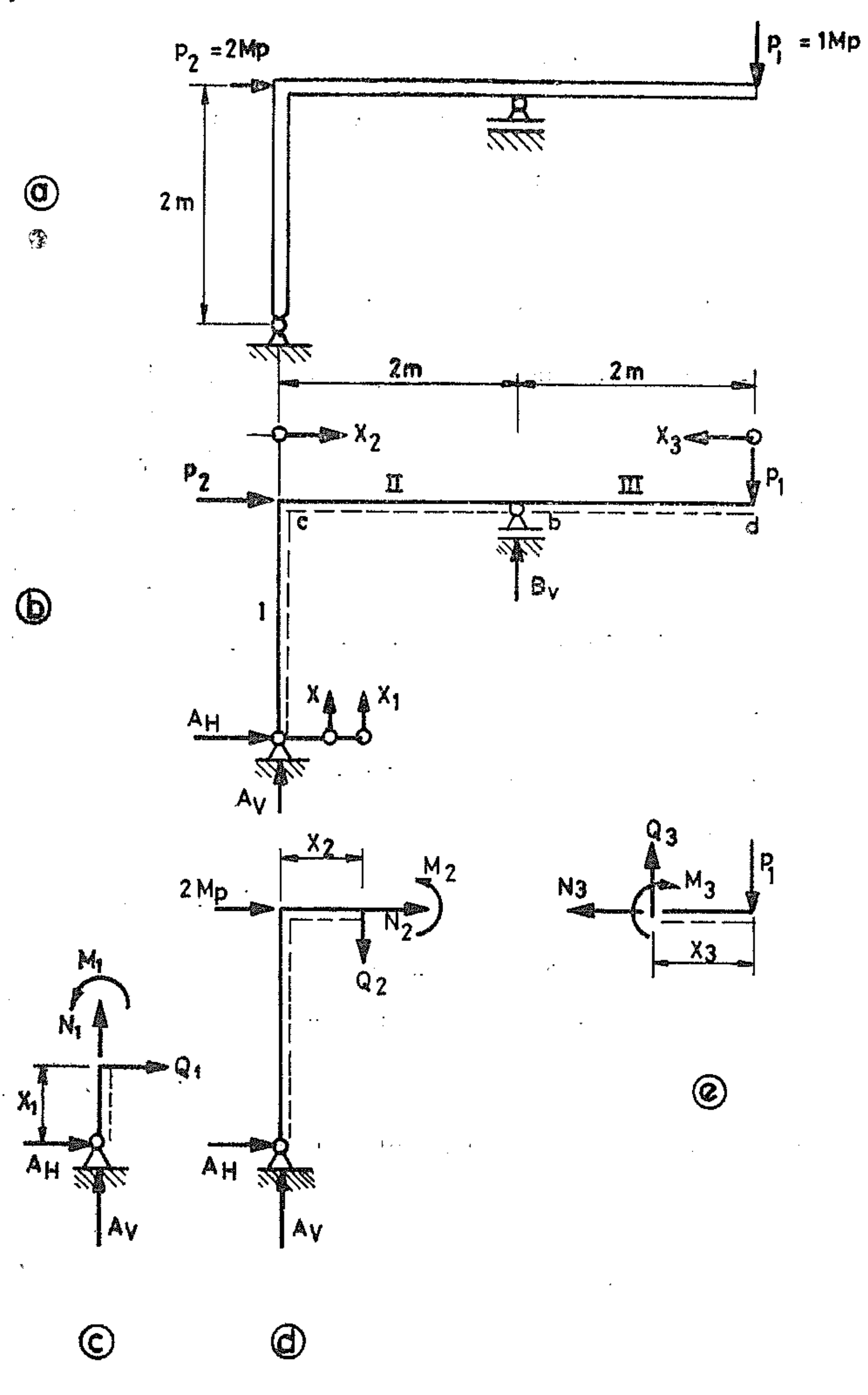
$$\Sigma H = 0 \ : \ N_2 = -A_H - 2 = +2 - 2 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \ : \ Q_2 = A_v = -3\,Mp$$

$$\Sigma M_{x2} = 0 \ : \ M_2 = A_v \,.\, x_2 - A_H \,.\, 2 = -3\,x_2 + 4$$

$$x_2 = 0 \ : \ M_2 = 4\,Mpm$$

$$x_2 = 2 \ : \ M_2 = -2\,Mpm$$



$P_2 = 2Mp$
$P_1 = 1Mp$
a
2 m
2m
2m
X_2
X_3
P_2
II
III
P_1
c
b
d
B_V
b
I
X
X_1
A_H
A_V
X_2
M_2
2 Mp
N_2
Q_2
Q_3
N_3
M_3
P_1
X_3
M_1
N_1
Q_1
X_1
A_H
A_V
A_H
A_V
e
c
d

شکل 2-106

المجال III $(0 \leqq x_3 \leqq 2)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل 2-106 e) يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N_3 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_3 = P_1 = 1\ Mp$$

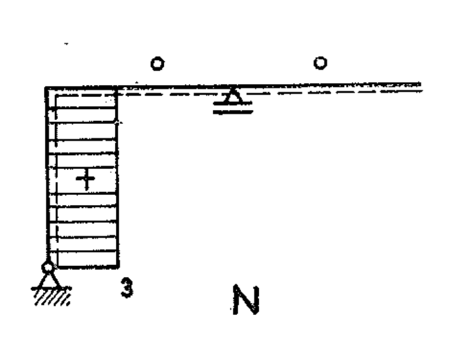
$$\Sigma M_{x3} = 0 : M_3 = -P_1 x_3 = -x_3$$

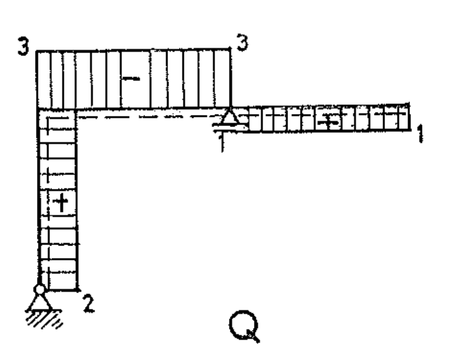
$$x_3 = 0 : M_3 = 0$$

$$x_3 = 2 : M_3 = -2\ Mpm$$

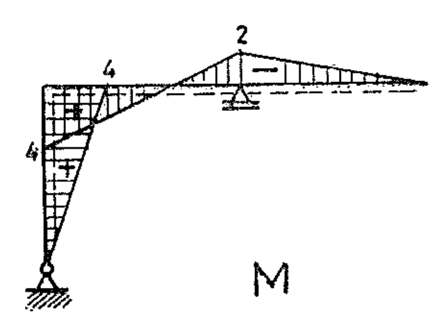
٣ ـ رسم مخططات قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-107) تمثيل مخططات قيم القطع .





W



شكل 2-107

مثال 59 :

المطلوب : ايجاد قيم القطع للجائز الممثل في الشكل (2-108) .

الحل :

١ ـ حساب ردود افعال المساند

يعطي تطبيق شروط التوازن العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 \;:\; A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \;:\; B_v \,.\, l \quad P \,.\, \frac{l}{3} = 0 \;:\; B_v = \frac{1}{3}\, P$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; A_v + B_v - P = 0 \;;\; A_v = \frac{2}{3}\, P$$

٢ ـ ايجاد معادلات قيم القطع

المجال I $(0 \leq x_1 \leqq 2\,l/3)$:

بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر السفلي (شـكل 2-108 c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \;:\; Q_1 = -A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; N_1 = -A_V = -\frac{2}{3}\, P$$

$$\Sigma M_x = 0 \;:\; M_1 = -\, A_H\, x_1 = 0$$

المجال II $(2\,l/3 \leqq x_2 \leqq l)$:

بتطبيق شروط التوازن على القطع السفلي (شكل 2-108 d) ينتج :

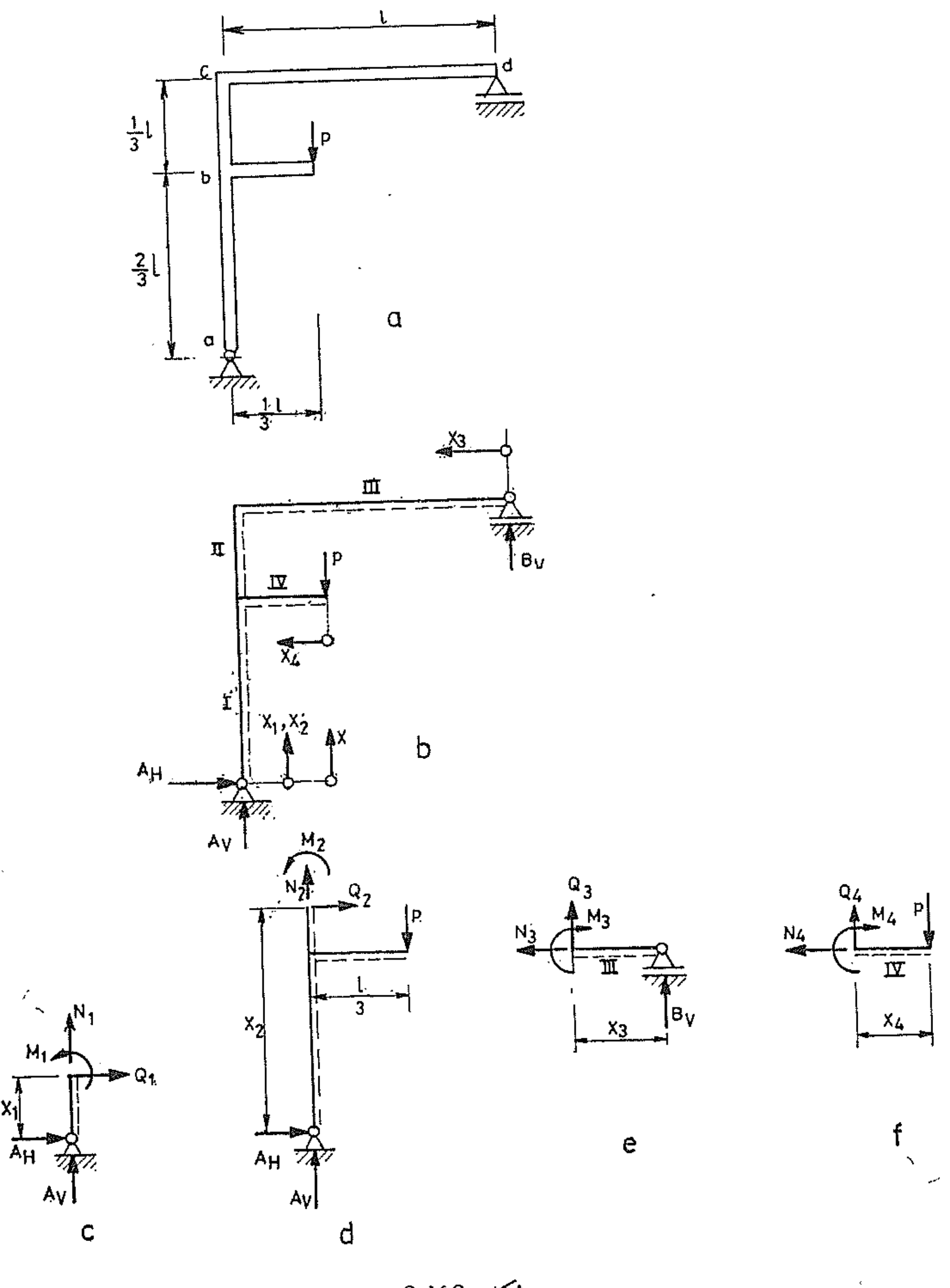
$$\Sigma H = 0 \;:\; Q_2 = -A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; N_2 = P - A_V = \frac{1}{3}\, P$$

$$\Sigma M_{x3} = 0 \;:\; M_2 = P \,.\, \frac{l}{3} - A_H \,.\, x_2 = P\frac{l}{3}$$

المجال III $(0 \leqq x_3 \leqq l)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الايمن (شـكل 2-108 e) المعادلات التالية :



l
c
d
$\frac{1}{3}l$
p
b
$\frac{2}{3}l$
a
a
$\frac{1}{3}l$
X_3
III
II
p
B_V
IV
X_4
I
X_1, X_2
X
b
A_H
A_V
M_2
N_2
Q_2
P
x_2
$\frac{l}{3}$
A_H
A_V
N_1
M_1
Q_1
X_1
A_H
A_V
c
d
Q_3
M_3
N_3
III
B_V
X_3
e
Q_4
M_4
P
N_4
IV
X_4
f

شكل 2-108

$$\Sigma H = 0 \quad : \quad N_3 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad Q_3 = -B_v = -\frac{1}{3}P$$

$$\Sigma M_{x3} = 0 \quad : \quad M_3 = B_v \cdot x_3 = \frac{1}{3} P\, x_3$$

$$x_3 = 0 \quad : \quad M_3 = 0$$

$$x_3 = l \quad : \quad M_3 = \frac{1}{3} P\, l$$

المجال IV $(0 \leqq x_4 \leqq l/3)$:

بتطبيق شروط التوازن على القطع الايمن (شكل 2-108 f) يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 \quad : N_4 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \quad : Q_4 = +P$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad : M_4 = -P\, x_4$$

$$x_4 = 0 \quad : M_4 = -0$$

$$x_4 = \frac{1}{3}\, l \ ; \ M_4 = -\frac{1}{3} Pl$$

٣ ـ رسم مخططات قيم القطع .

لقد تم في الشكل (2-109) رسم مخططات قيم القطع .

مثال 60 :

المطلوب : ايجاد قيم القطع في الجائز الممثل في الشكل (2-110) .

الحل :

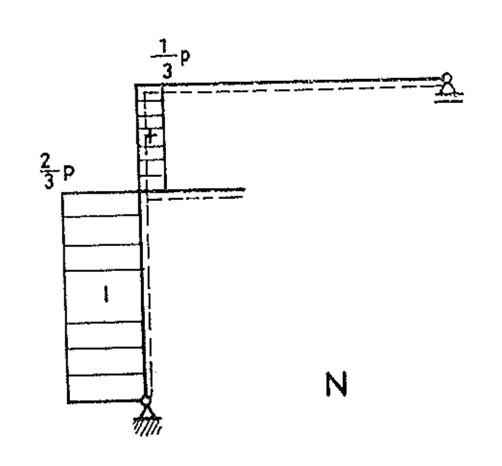
١ ـ حساب ردود افعال المساند :

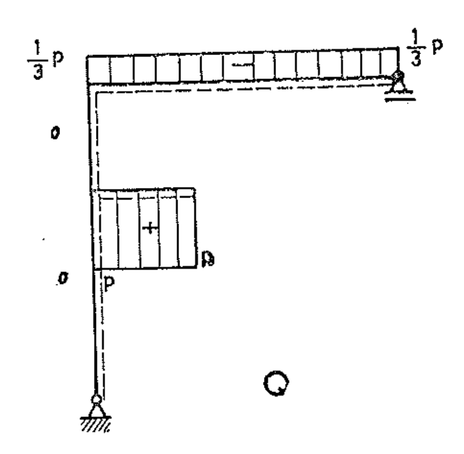
يتم حساب ردود افعال المساند بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل :

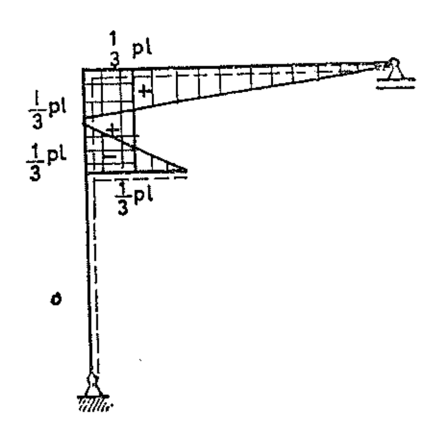
$$\Sigma H = 0 \ : \ A_H + 6 = 0 \quad : \quad A_H = -6\ \text{Mp}$$

$$\Sigma M_a = 0 \ : \ B_v \cdot 10 - 6 \cdot 2 = 0 : \quad B_v = 1{,}2\ \text{Mp}$$

$$\Sigma V = 0 \ : \ A_v + B_v = 0 \ ; \quad A_v = -B_v = -1{,}2\ \text{Mp}$$







شكل 2-109

التدقيق :

$$\Sigma H_c = 0 \quad : A_v . 7 - B_v . 3 + 6 . 2 = 0$$

من النتائج يتبين أن :

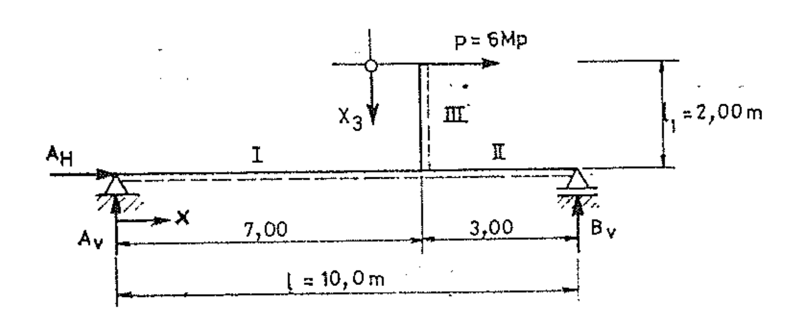
A_H الفعلية هي بعكس الاتجاه المرسوم في الشكل (2-110) وذلك لكون النتيجة سالبة .

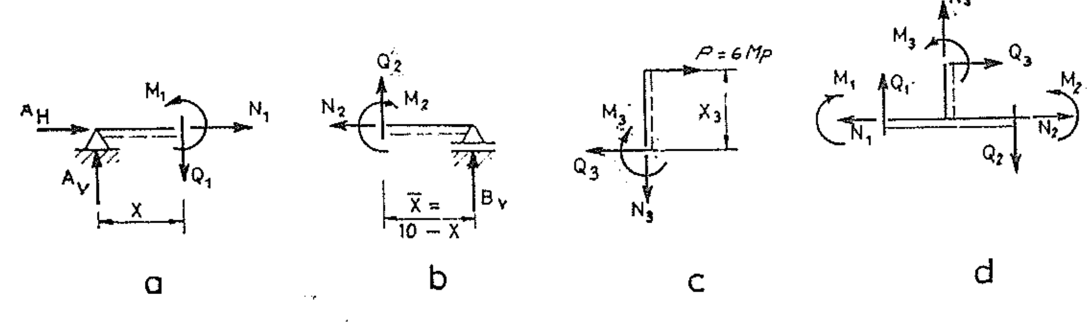
A_v الفعلية هي بعكس الاتجاه المرسوم في الشكل (2-110) وذلك لكون النتيجة سالبة .

B_v الفعلية هي بالاتجاه المرسوم في الشكل (2-110) وذلك لكون النتيجة موجبة .

٢ ـ **حساب قيم القطاع** (M , Q , N) :

تثبيت الاحداثيات الموجبة : تختار المنطقة المخططة في الجزء الافقي تحت محور القضيب وفي الجزء الشاقولي على يمين القضيب . أما محاور x فتثبت في الجزء الافقي ابتداء من المسند الثابت متجهة نحو اليمين وفي الجزء الشاقولي تثبت في نهايته العليا متجهة نحو الاسفل .





شكل 2-110

تحديد المجالات : يحتوي الجائز على ثلاثة مجالات .

المجال I $(0 \leqq x \leqq 7)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2-110 a) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \;:\; N_1 = - A_H = + \;6 \;\; Mp$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; Q_1 = + A_v = - 1{,}2 \; Mp$$

$$\Sigma M_x = 0 \;;\; M_1 = A_V \,.\, x = - 1{,}2x \; Mpm$$

$$x = 0 \;:\; M_1 = 0$$

$$x = 7 \;:\; M_1 = - 8{,}4 \; Mpm$$

التدقيق :

$$\frac{dM}{dx} = - 1{,}2 = Q$$

المجال II $(7 \leqq x \leqq 10)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل 2-110 b)المعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 \;:\; N_2 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \quad : Q_2 = -B = -1{,}2 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad : M_2 = B \cdot \bar{x} = 1{,}2\,\bar{x} = 1{,}2\,(10 - x)$$

$$x = 7 \quad ; M_2 = 3{,}6 \text{ Mpm}$$

$$x = 10 \; : M_2 = 0$$

التدقيق :

$$\frac{dM}{dx} = -1{,}2 = Q$$

المجال III $(0 \leqq x_3 \leqq 2)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الاعلى (شكل 2.110 c)ينتج :

$$\Sigma H = 0 \quad : Q_3 = +\,6 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 \quad : N_3 = 0$$

$$\Sigma M_{x3} = 0 \quad : M_3 = -6 \cdot x_3$$

$$x_3 = 0 \quad ; \quad M_3 = 0$$

$$x_3 = 2 \quad ; \quad M_3 = -\,12 \text{ Mpm}$$

التدقيق :

$$\frac{dM_3}{d\,x} = -\frac{dM_3}{d\,x_3} = +\,6$$

باقتطاع العقدة الصلبة (شكل 2-110 d)وتطبيق شروط التوازن عليها ينتج :

$$\Sigma H = 0 \quad : N_1 - Q_3 - N_2 = 0$$

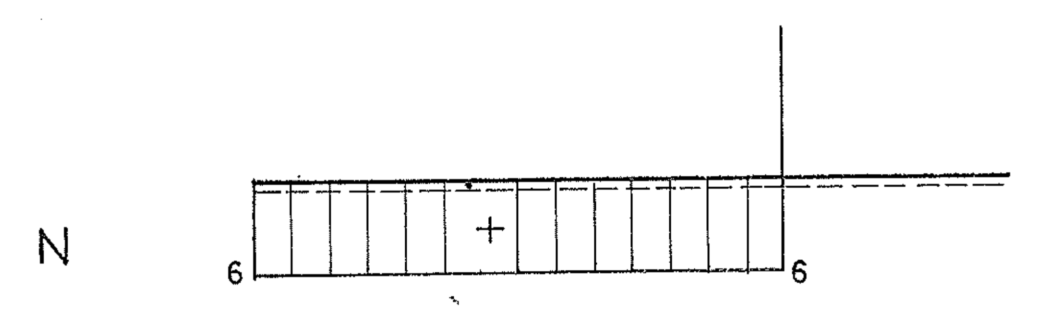
$$\Sigma V = 0 \quad : Q_1 + N_3 - Q_2 = 0$$

$$\Sigma M_c = 0 \quad : M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

بتعويض قيم القطع المحسوبة يرى ان المعادلات السابقة محققة وهذا يؤكد صحة النتائج .

٣ ـ رسم مخططات قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-111) تمثيل مخططات قيم القطع .



Q

1,2

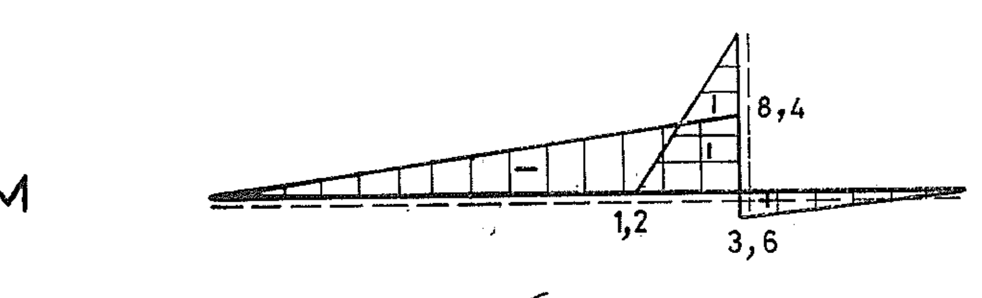
−

6

+

1.2

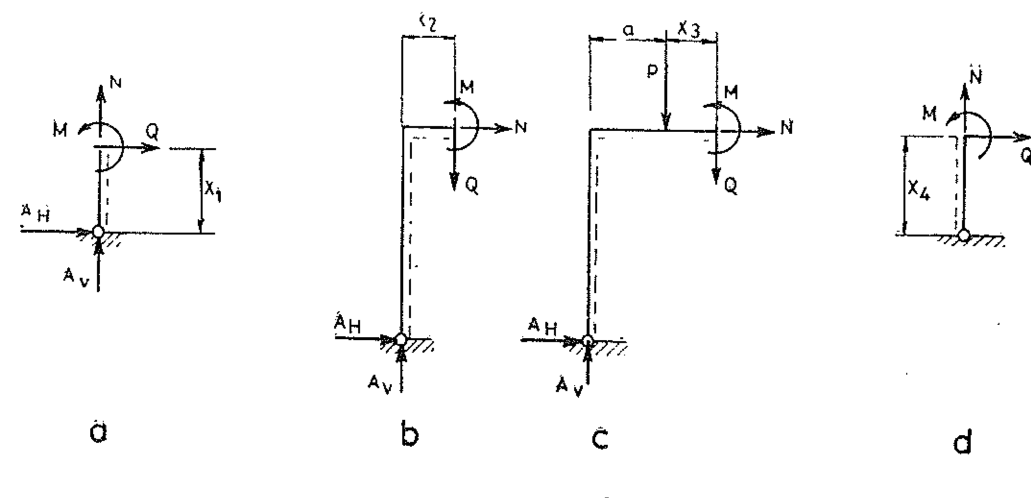
6



شكل 2-111

مثال 61 :

المطلوب : ايجاد قيم القطع للجائز الاطاري ثلاثي المفصل الممثل في الشكل (2-112) .



شكل 2-112

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم حساب ردود أفعال المساند . هكذا :

$$\Sigma H = 0 \; : A_H - B_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \; : B_v \cdot l - P \cdot a = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : A_v + B_v - P = 0$$

$$M_{gr} = 0 \; : B_V \cdot \frac{l}{2} - B_H . h = 0$$

بحل مجموعة المعادلات ينتج :

$$A_v = P \frac{b}{l} \; ; A_H = B_H = P\frac{a}{2h} \; ; \; B_v = P\frac{a}{l}$$

لتدقيق النتيجة يمكن استخدام شرط إنعدام العزوم حول النقطة g :

$$\Sigma M_g = 0 : B_V \cdot \frac{l}{2} - A_v \cdot \frac{l}{2} + A_H \cdot h - B_H \cdot h + P\left(\frac{l}{2} - a\right) = 0$$

٢ ـ حساب قيم القطع

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq h)$:

بتطبيق شروط التوازن على القطع السفلي الأيسر (شكل 2-112 a) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : A_H + Q = 0 \quad : \quad Q = -P\frac{a}{2h} = \text{const.}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + N = 0 \quad : N = -P\frac{b}{l} = \text{const.}$$

$$\Sigma M_{x1} = 0 : A_H \,.\, x_1 + M = 0 : \; M = -P\frac{a}{2h}\, x_1$$

تمثل معادلة عزم الانعطاف خطاً مستقيماً ميله $-P\frac{a}{2h}$ ويمر من مركز الاحداثيات .

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq a)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-112 b) المعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N + A_H = 0 : N = -P\frac{a}{2h} = \text{const.}$$

$$\Sigma V = 0 : Q - A_v = 0 : Q = P\frac{b}{l} = \text{const.}$$

$$\Sigma M_{x2} = 0 : M + A_H \,.\, h - A_v \,.\, x_2 = 0 : M = P\frac{b}{l}\, x_2 - P\frac{a}{2}$$

تمثل معادلة عزم الانعطاف خطاً مستقيماً ميله $P\frac{b}{l}$ ولا يمر من مركز الاحداثيات .

المجال III $(0 \leqq x_3 \leqq b)$:

بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-112 c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N + A_H = 0 \quad : N = -P\frac{a}{h} = \text{const.}$$

$$\Sigma V = 0 : Q + P - A_v = 0 : \; Q = \frac{P(b-l)}{l} = \text{const.}$$

$$\Sigma M_{x3} = 0 : M + P \,.\, x_3 + A_H \,.\, h - A_v \,.\, (a + x_3) = 0$$

$$M = P\left(\frac{b\,a}{l} - \frac{a}{2}\right) + P\left(\frac{b}{l} - 1\right) x_3$$

تمثل هـذه المعادلة خطاً مستقيماً ميله $p(-1+b/l)$ ولا يمر من مركز الاحداثيات .

لا يحدد المفصل في هذه الحالة مجالا جديداً . (وذلك لوقوع القضيبين المتلاقيين فيه على استقامة واحدة)

المجال IV $(0 \leqq x_4 \leqq h)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الأيمن السفلي (شكل 2-112 d) العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 \; : \; Q - B_H = 0 \; : \; Q = P\frac{a}{2h} = \text{const}$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; N + B_v = 0 \; : \; N = -P\frac{a}{l} = \text{const}$$

$$\Sigma M_{x_4} = 0 \; : \; M + B_H . x_4 = 0 \; : \; M = -P\frac{a}{2h}x_3$$

تمثل العلاقة الاخيرة خطاً مستقيماً ميـــله $-P\frac{a}{2h}$ ويمر من مركز الاحداثيات .

٣ ـ رسم مخططات قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-113) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 62 :

إطار ثلاثي المفصل (شكل 2-114) .

المطلوب : حساب قيم القطع ورسم مخططاتها .

الحل :

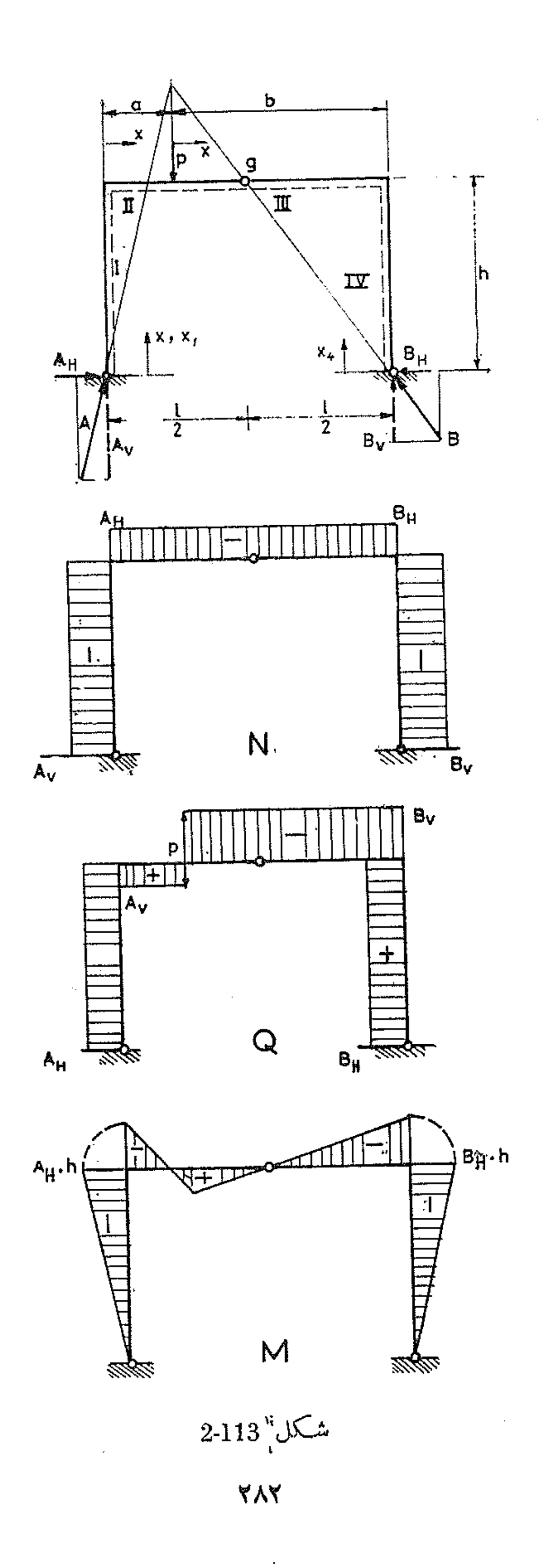
١ ـ ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم حساب ردود افعال المساند :

$$\Sigma M_a = 0 \; : \; B_v . 6 - 4 = 0 \; : \; B_v = \frac{2}{3}\,\text{Mp}$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; A_v - B_y = 0 \; : \; A_v = \frac{2}{3}\,\text{Mp}$$

$$M_{gl} = 0 \; : \; A_v . 3{,}0 - A_H . 4{,}0 = 0 \; : \; A_H = \frac{1}{2}\,\text{Mp}$$


a
b
x
p
x
g
II
III
I
IV
h
x , x₁
x₄
A_H
B_H
A
A_V
l/2
l/2
B_V
B
A_H
B_H
N
A_V
B_V
B_V
p
A_V
Q
A_H
B_H
A_H.h
B_H.h
M

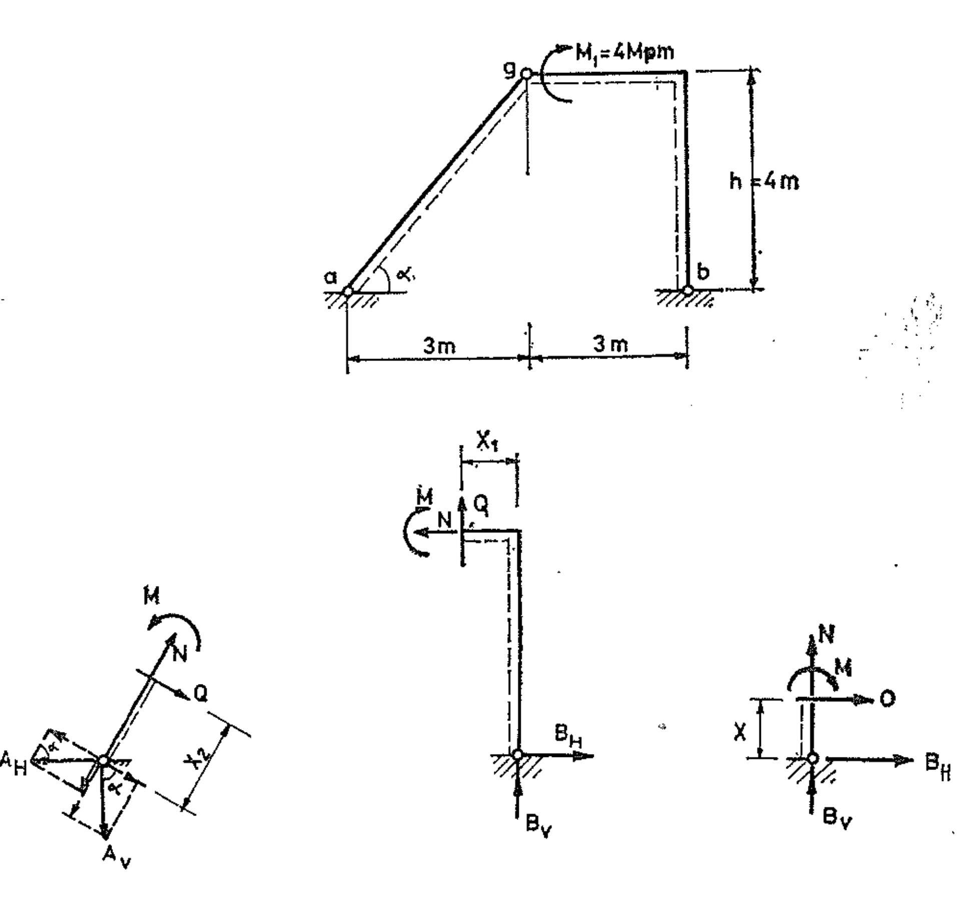
شکل 2-113

$$\Sigma H = 0 : B_H - A_H = 0 : B_H = \frac{1}{2} Mp$$

التدقيق :

لتدقيق قيم ردود افعال المساند يطبق شرط توازن العزوم بالنسبة لنقطة التمفصل g :

$$\Sigma M_g = 0 : B_v . 3,0 + A_v . 3,0 + B_H . 4,0 - A_H . 4,0 - 4 = 0$$



شكل 2.114

٢ ـ حساب قيم القطع :

يتألف الجائز الاطاري (شكل 2-114) من ثلاثة مجالات .

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq 5 \text{ m})$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2-114) ينتج :

$$\sum M_{x1} = 0 \;:\; M + A_v \cos\alpha \,.\, x_1 - A_H \sin\alpha \,.\, x_1 = 0$$

$$M = (A_v \cos\alpha - A_H \sin\alpha)\, x_1 = 0$$

(القضيب متمفصل من كلا طرفيه ولا تؤثر داخله حمولات خارجية ، لذا لا يحتوي إلا قوة ناظمية ، ويمكن هنا تسميته مسنداً نوسياً) .

$$\sum P_{zv} = 0 \;:\; Q + A_v \cos\alpha - A_H \sin\alpha = 0$$

$$Q = A_H \sin\alpha - A_v \cos\alpha = 0$$

$$\sum P_{xv} = 0 \;:\; N - A_v \sin\alpha - A_H \cos\alpha = 0$$

$$N = A_v \sin\alpha + A_H \cos\alpha = + \frac{5}{6} Mp = const.$$

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq 3m)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل 2.114) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \;:\; N - B_H = 0 \qquad : \; N = \frac{1}{2} Mp = const$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; Q + B_v = 0 \qquad : \; Q = - \frac{2}{3} Mp = const$$

$$\Sigma M_{x2} = 0 \;:\; M - B_v \,.\, x_2 - B_H .4 = 0; \quad M = 2 + \frac{2}{3} x_2$$

تمثل العلاقة الاخيرة معادلة خط مستقيم ميله 2/3 ولا يمر من مركز الاحداثيات .

المجال II $(0 \leq x_3 \leqq 4m)$

يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الايمن (شكل 2-114) المعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 \;:\; Q + B_H = 0 \;:\; Q = - \frac{1}{2} Mp = const$$

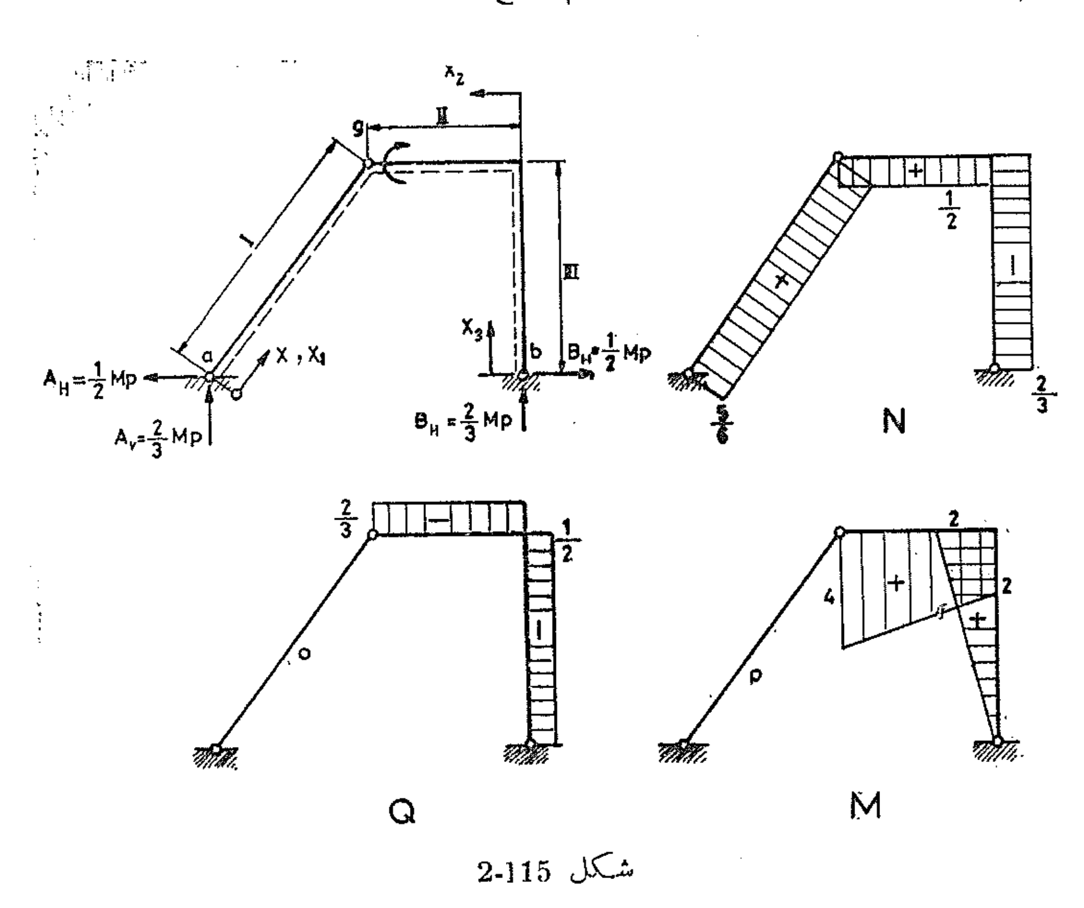
$$\Sigma V = 0 \;:\; N + B_v = 0 \;:\; N = - \frac{2}{3} Mp = const$$

$$\Sigma M_{x3} = 0 \;:\; M - B_H \,.\, x_3 = 0 \;:\; M = \frac{1}{2} x_3$$

تمثل العلاقة الاخيرة معادلة خط مستقيم ميله 1,2 ويمر من مركز الاحداثيات .

٣ ـ رسم مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-115) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-115

مثال 63 :

جائز إطاري بسيط (شكل 2-116) .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند .

تبلغ ردود افعال المساند القيم التالية :

$$A_H = 0$$

$$A_V = \frac{2}{a}\left[P.a + p_0 \frac{a^2}{2} + q_0 \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{4} a\right] = 2P + p_0 a + \frac{3}{4} q_0 a$$

$$B_V = \frac{2}{a}\left[-P \frac{a}{2} - q_0 \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\right] = -P - q_0 \frac{a}{4}$$

٢ ـ قيم القطع:

لا تتشكل في الجائز قوة ناظمية إلا في الاجزاء الشاقولية وقيمتها هناك تبلغ :

$$N = -\left(A_V - q_0 \frac{a}{2}\right) = -\left(2P + p_0 a + q_0 \frac{a}{4}\right)$$

أو كذلك :

$$N = -B = P + q_0 \frac{a}{4}$$

تأخذ القوة العرضية في الجزء الافقي العلوي من الجائز شكلا خطياً اما قيمتها فتبلغ عند النهايات :

$$Q_3 = A_V - P - q_0 \frac{a}{2} = P + p_0 a + q_0 \frac{a}{4}$$

و

$$Q_4 = P + q_0 \frac{a}{4}$$

تأخذ القوة العرضية في الجزء الافقي السفلي شكلا خطياً أما قيمتها عندالنهاية اليسرى فتبلغ :

$$Q_2 = -\left(2P + p_0 a + q_0 \frac{a}{4}\right)$$

وعند النهاية اليمنى فتأخذ القيمة التالية :

$$Q_1 = -A_v = -\left(2P + p_0 a + \frac{3}{4} q_0 a\right)$$

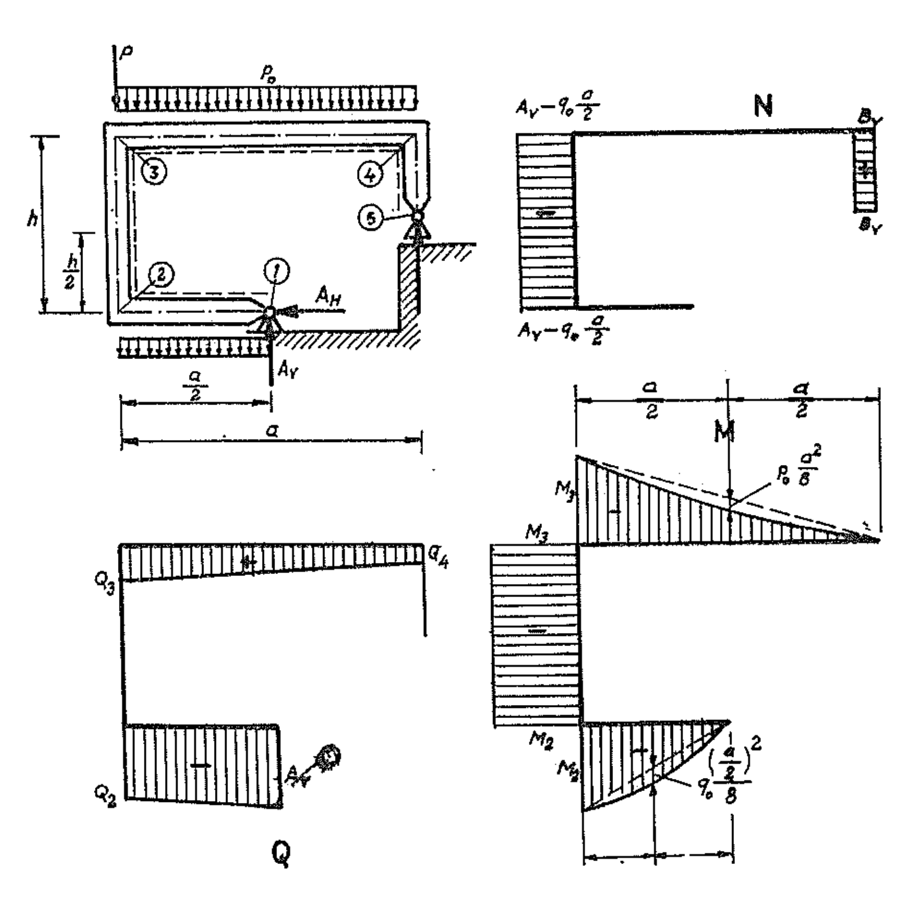
أما في الاجزاء الشاقولية فلا تتشكل فيها قوى عرضية .

تبلغ قيم عزم الانعطاف عند النقاط 2 , 3 , 4 القيم التالية :

$$M_3 = -A_V \frac{a}{2} + q_0 \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = -\left(Pa + p_0 \frac{a^2}{2} + q_0 \frac{a^2}{4} \right)$$

$$M_3 = M_2$$

$$M_4 = 0$$



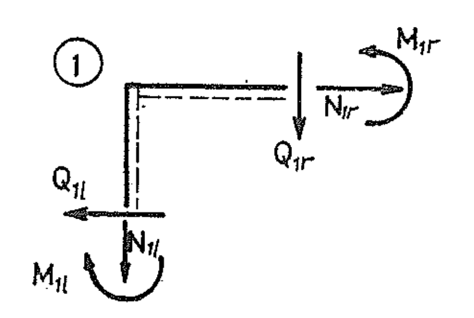
شكل 2-116

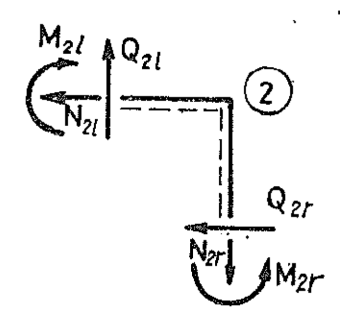
٣ ـ رسم مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل(2-116)تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 64 :

الاطار ثلاثي المفصل (شكل 2-118) .





شكل 2-117

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ – ردود افعال المساند

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود افعال المساند وقوى المفاصل :

$$A_V = \frac{1}{7{,}0}(R \cdot 2{,}0 - W \cdot 1{,}0) = 7{,}0 \text{ Mp}$$

$$B_V = \frac{1}{7{,}0}(R \cdot 5{,}0 + W \cdot 1{,}0) = 21{,}0 \text{ Mp}$$

$$A_H = \frac{1}{5{,}0}(-A_V \cdot 3{,}0 + W \cdot 4{,}0) = 1{,}4 \text{ Mp}$$

$$B_H = \frac{1}{5{,}0}(B_V \cdot 4{,}0 - R \cdot 2{,}0) = 5{,}6 \text{ Mp}$$

$$G_H = W - A_H = B_H = 5{,}6 \text{ Mp}$$

$$G_V = A_V = R - B_v = 7{,}0 \text{ Mp}$$

٢ – قيم القطع

تتوزع القوى الناظمية فى كافة قضبان الجائز الاطاري توزيعاً منتظما (توزيعاً ثابتاً) وكلها عبارة عن قوى ضاغطة . اما القـــوة العرضية فتتوزع في القضبان الافقية للجائز بشكل منتظم (ثابت) .

على بعد

$$x_0 = \frac{G_H}{q_0} = 1,0 \text{ m}$$

من المفصل الرأسي تغير القوة العرضية اشارتها .

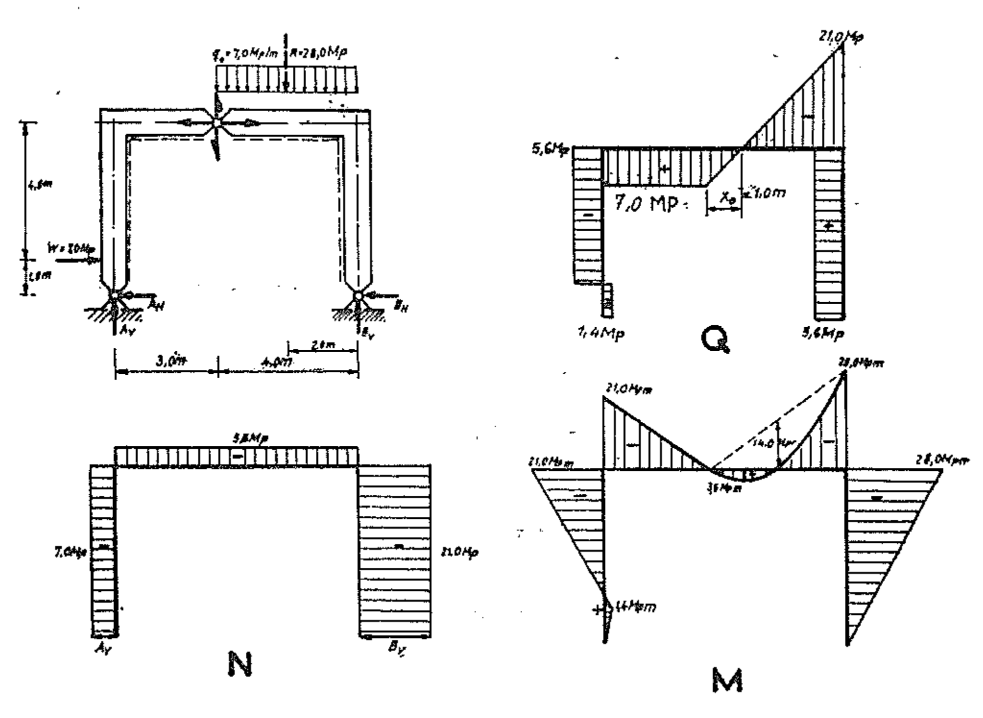
تبلغ عزوم الانعطاف في النقاط 1 , 2 , 3 القيم التالية :

$$M_1 = A_H \cdot 5,0 - W \cdot 4,0 = -21,0 \text{ Mpm}$$

$$M_2 = -B_H \cdot 5,0 = -28,0 \text{ Mpm}$$

$$M_3 = A_H \cdot 1,0 = -1,4 \text{ Mpm}$$

يلاحظ من مخططات قيم القطع الممثلة في الشكل (2.117) ان القوة الناظمية في القضيب الافقي وعلى مقربة من العقدة الصلبة تساوي القوة العرضية في القضيب الشاقولي كما وان القوة العرضية للقضيب الافقي على مقربة من العقدة الصلبة تساوي القوة الناظمية للقضيب الشاقولي . اما عزم الانعطاف فينقطة العقدةالصلبة فله نفسالقيمة عند القضيبالافقيوالقضيبالشاقولي (شكل2.117) .



شكل 2-117

مثـال 65 :

جائز اطاري مغلق (شكل 2-119) .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

١ ـ ردود افعال المساند وقوى المفاصل :

تنعدم ردود افعال المساند بسبب تشكيل القوى الخارجية المؤثرة فيما بينها مجمـــوعة متوازنة . بتطبيق شروط التوازن على اجزاء الاطار I , II يتم الحصـــول من المعادلات الستة على ستة مركبات لقوى المفاصل G_3, G_2, G_1.

من اجل الجزء I يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$G_{1H} \cdot 2{,}0 + G_{1v} \cdot 3{,}0 - P_1 \cdot 1{,}0 = 0$$

$$G_{1H} + G_{2H} - P_1 = 0$$

$$-G_{1v} + G_{2v} = 0$$

ومن اجل الجزء II يتم الحصول على العلاقات الاتية :

$$G_{1v} \cdot 5{,}0 - G_{1H} \cdot 2{,}0 - P_2 \cdot 1{,}0 = 0$$

$$G_{1H} + P_2 - G_{3H} = 0$$

$$G_{1v} - G_{3v} = 0$$

بحل المعادلات يتم الحصول على القيم التالية :

$$G_{1H} = 0{,}5 \text{ Mp}$$

$$G_{1v} = G_{2v} = G_{3v} = 1{,}0 \text{ Mp}$$

$$G_{2H} = 3{,}5 \text{ Mp}$$

$$G_{3H} = 4{,}5 \text{ Mp}$$

للتدقيق يمكن تطبيق شروط التوازن الثلاثة على الجزء III .

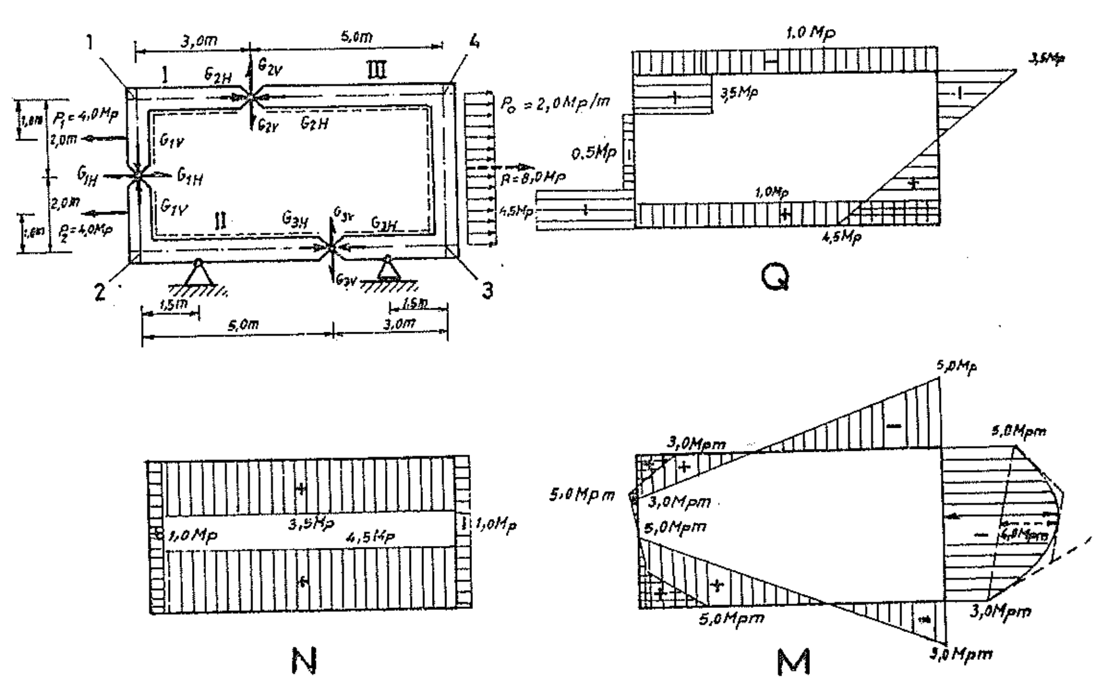
٢ ـ قيم القطع :

القوة الناظمية (القوة المحورية ، القوة الطولية) ثابتة في اجزاء الاطار الافقية والشاقولية .

تتوزع القوة العرضية في المجال الذي تؤثر فيه الحمولة الخطية فقط بشكل خطي ، اما فيما تبقى من المجالات فتتوزع توزيعاً ثابتاً .

بإيجاد قيم عزوم الانعطاف في النقـــاط 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 يتعين توزيـع العزم في الاطار المغلق .

لقد تم في الشكل (2-119) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-119

مثـال 66 :

جائز اطاري بشداد (اطار بشداد) (شكل 2-120).

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحـــل :

١ - ردود أفعال المساند

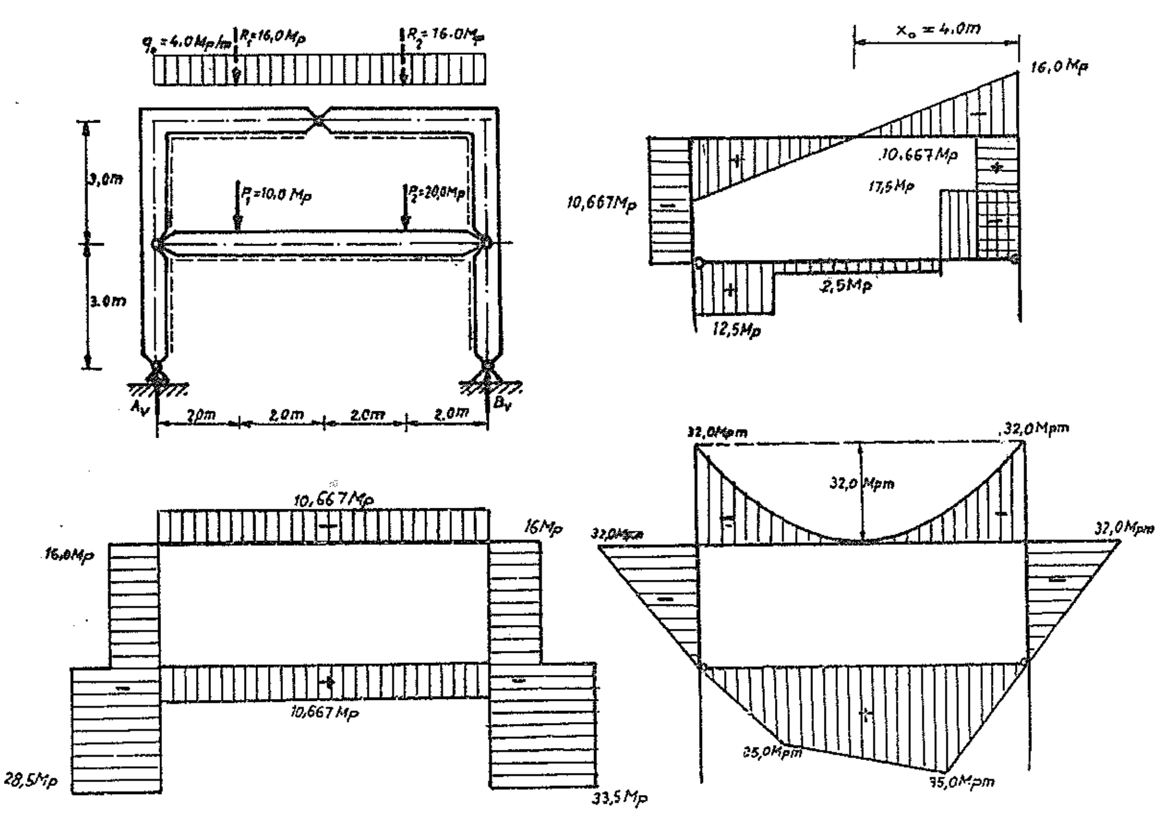
بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل يتم الحصول على قيم ردود أفعال المساند :

$A_v = 28{,}5\ Mp$; $G_{1H} = 10{,}667\ Mp$; $G_{2H} = 10{,}667\ Mp$; $G_{3H} = 10{,}667\ Mp$

$B_v = 33{,}5\ Mp$; G_{1v} $12{,}5\ Mp$; $G_{2v} = 17{,}5\ Mp$; $G_{3v} = 0{,}0\ Mp$

٢ ـ قيم القطع

بالاستعانة بردود افعال المساند وقوى المفاصل تتعين مخططات قيم القطع (شكل 2-120) .



شكل 2-120

٢ ـ ٩ الجيزان المختلطة (جيزان قضيبية ذات اشكال شبكية)

يعطي الشكل (2-121a) مثالا لهـــذه الجيزان وهي عبـارة عن جائز عادي ab ترتبط بـه قضبان مفصلية من النوع الذي يستعمل في الجيزان الشبكية (الشبيكيات) وهي af , fc , fg , ge , gb والغرض من هذه القضبان هو تقوية الجائز ab عن طريق تقليل القوى الداخليـة وعزوم الانعطاف فيها كما سيتضح من حل هذا المثال .

مثال 67 :

الجائز المختلط الممثل فى الشكل (2-121a) .

المطلوب : ايجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .

الحل :

كاد الجائز المبين في الشكل (2-121a) أن يكون غير مقرر ستاتيكياً من الدرجة الاولى لو لا وجود المفصل الداخلي فيه عند النقطة d . ولكنه بعد وجود هذا المفصل أصبح مقرر ستاتيكياً . ان رد الفعل عند كل من المسندين الموجودين في a , b شاقولي ولا يتأثر بوجود الأجزاء الشبكية والواقع أن هذا الجائز مقرر ستاتيكياً من الخارج وقيمة كل من ردي الفعل هي 9 Mp شاقولياً إلى الاعلى .

اذا اعتبر الآن قطع مثل s-s يمر بالمفصل الداخلي عند d ويفصل الجائز الى جزئين ، ودرس توازن الجزء الايسر مثلا لوجد ان القوى الخارجية المؤثرة عليه هي :

١ - حمولة منتظمة تؤثر بين d,a وشدتها 2 Mp/m (٢ ميغابوند على المتر) .

٢ - رد فعل شاقولي إلى الاعلى عند a مقداره 9 Mp .

٣ - قوة شد في القضيب المقطوع fg مجهولة القيمة وتعمل على الخط المستقيم fg (ينطبق حاملها على الخط المستقيم fg) .

٤ - قيم القطع (مؤثرات القوى الداخلية) عند القطع d وهي مجهولة وتتكون من قوة ناظمية وقوة عرضية وليس فيها عزم انعطاف لوجود المفصل الداخلي .

وعلى ذلك فعدد المجاهيل ثلاثة . ولهذا كان الجائز مقرر ستاتيكياً ولو لا وجود المفصل الداخلي عند d لزاد مجهول رابع هو عزم الانعطاف هناك ولاصبح الجائز كما ذكر غير مقرر ستاتيكياً من الدرجة الاولى .

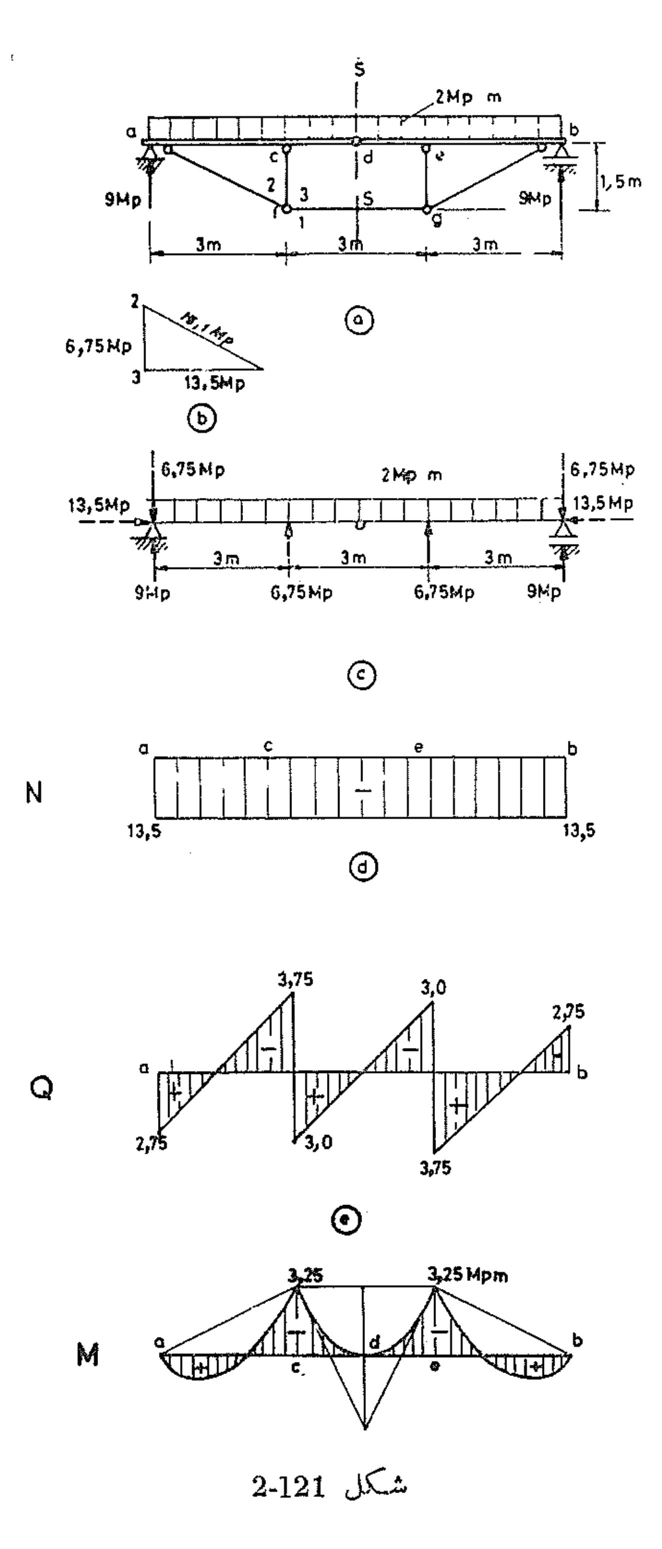
لايجاد قيمة قوة الشد في القضيب fg يؤخذ عزم القوى على جزء الجائز الواقع على يسار القطع s-s ، حول النقطة (بالنسبة للنقطة) d فيرى أن :

$$9 \,.\, (4,5) - 2 \,.\, (4,5)\,(2,25) - 1,5\,S = 0$$

ومنها ينتج :

$$S = 13,5\ \mathrm{Mp}$$

وبعد معرفة القوة S في القضيب fg يسهل تحليلها عند f باتجاه القضيبين f a و f c بالطريقة العادية كما في الشكل (2-121 b) لايجاد القوى في هذين القضيبين .



شكل 2-121

ولتسهيل حل الجائز ab اعتبرت بعـد ذلك القوى المؤثرة عليه من القضبـان المفصليـة عنـد a . c , e , b كما لو كانت قوى خارجية .

بعد ذلك تم رسم الشكل (2-121c) ليبين الجائز ab وجميع الحمولات والقوى الخارجية المؤثرة عليه . ومنه تم ايجاد مخطط القوى الناظمية (شكل 2-121 d) ومخطط القوى العرضية (شكل 2-121 e) ومخطط عزم الانعطاف (شكل 2-121 f) .

ويستطاع الآن الرؤية إلى أي حد نقصت قيم القوى العرضية وعزوم الانعطاف في الجائز نتيجة لوجود الاجزاء الشبكية فيه . ولو لا هذه الاجزاء (والاستغناء عن المفصل الداخلي في d) لبلغت عزوم الانعطاف عند d قيمة عظمى هي :

$$\frac{q\,l^2}{8} = \frac{2\,.\,9^2}{8} = 20{,}25 \text{ Mpm}$$

مقابل 2,25 Mpm كقيمة عظمى في الجائز الحالي . وليس من الضروري دائماً ان يحتوي الجائز على مفصل داخلي عند d ، ويكفي معرفة شرط اضافي كقيمة عزم الانعطاف عند أي قطع في الجائز مثلا لكي تصبح المسألة مقررة ستاتيكياً ، أو مقدار القوة الناظمية أو القوة العرضية أو قيمة القوة الداخلية في أحد قضبان التركيب الشبكي المرافق .

مثال 68 :

الجائز المختلط الممثل في الشكل (2-122) .

المعطى : q , l , $P=12\,q\,l$.

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند A , B وقوة المفصل وكذلك قوى القضبان 1 , 2 , 3 , 4 , 5 .

الحل :

١ ــ ردود افعال المساند

ليس للبناء الداخلي للجائز المختلط اهمية على حساب ردود افعال المساند . فمن الممكن اعتباره ككل جسماً صلباً (شكل 2-122 b)

يعطي تطبيق شروط التوازن العلاقات التالية :

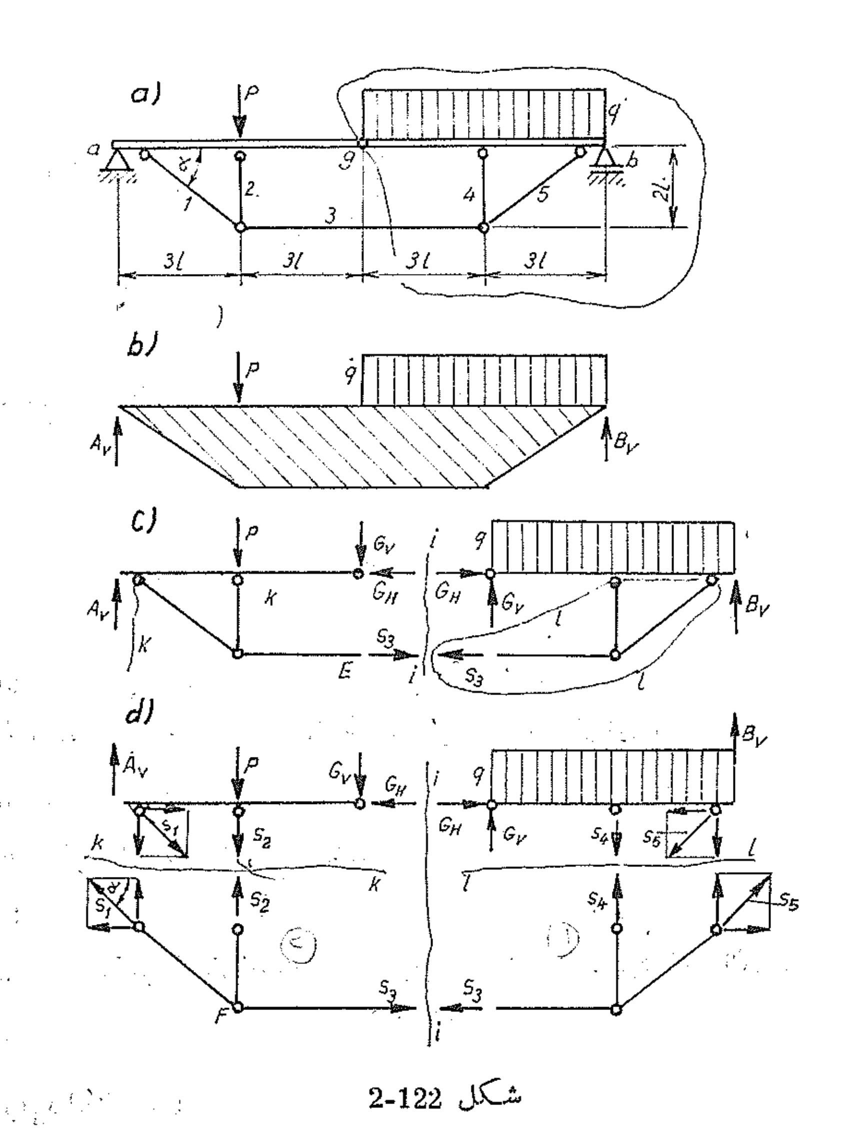
$$\Sigma H = 0 \;:\; A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \;:\; 3\,P\,l - 6\,q\,l{,}9l + 12\,B_v\,.\,l = 0$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; A_v - P - 6\,q\,l + B_v = 0$$

بعد حل مجموعة المعادلات ، يتم تعيين ردود أفعال المساند المطلوبة :

$$A_H = 0 \;;\; A_v = \frac{7}{8}\,P \;;\; B_v = \frac{5}{8}\,P$$



شكل 2-122

٣ ــ قوة المفصل

باجراء القطع i – i (شكل 2-122 a,c) تحول قوى المفصل الداخلية الى قوى خارجية (بذلك تجعل القوى الداخلية مرئية) .

في المفصل g ينعدم العزم M وبذلك لا يحوى إلا قوتين ، قـــوة شاقولية وقوة افقية . أما القضيب الافقي السفلي المقطوع بالقطع i — i فلا يحوي إلا قوة واحدة (هي القوة الناظمية) وذلك لأنه ينتهي في نهايته بمفاصل هـذا من جهـة ومن جهة اخرى لعـدم تأثير أية حمولات خارجية داخل مجال القضيب (قضيب نوسي ، قضيب شبكي) .

يفترض في البداية أن قوة القضيب المذكور هي قوة شادة . يعطي تطبيق شروط التوازن على

الجزء المقطوع الايمن أو الايسر من الشكل (2-122 c) نفس النتيجة . من اجل الجزء الأيسر يصبح تطبيق شروط التوازن ، هكذا :

$$\Sigma V = 0 : A_v - P - G_v = 0$$

$$\Sigma H = 0 : S_3 - G_H = 0$$

$$\Sigma M_e = 0 : -6 A_v . l + 3P . l + 2 G_H . l = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم الحصول على القيم المطلوبة :

$$G_H = \frac{9}{8} P \; ; \; G_v = -\frac{1}{8} P \; ; \; S_3 = \frac{9}{8} P$$

٣ - قوى القضبان

باجراء قطوع أخرى أمثال k - k و l - l علاوة على القطوع السابقة ، بجزىء الجائز المختلط إلى أربعة أجزاء منفصلة عن بعض انفصالا تاماً (شكل 2-122d) لايجاد S_{1H}, S_{1v}, S_2 يمكن أخذ الجزء المقطوع الايسر . كما يمكن ايضاً للحصول على هذه القوى تطبيق شروط التوازن على العقدة المفصلية F :

$$\Sigma V = 0 : S_{1v} + S_2 = 0$$

$$\Sigma H = 0 : -S_{1H} + S_3 = 0$$

العلاقة الهندسية :

$$tg\, \alpha = \frac{2l}{3l} = \frac{S_{1v}}{S_{1H}}$$

(يتم الحصول على هذه العلاقة من تشابه مضلع القوى S_1 , S_{1v}, S_{1H} الممثل في الشكل 2-122 d والمثلث المتكون من الجائز الرئيسي والقضبان 1 , 2) .

بعد حل مجموعة المعادلات ينتج :

$$S_{1H} = \frac{9}{8} P \; ; \; S_{1v} = \frac{3}{4} P \; ; \; S_2 = -\frac{3}{4} P$$

بتحليل القوة S_3 في الجزء السفلي الايمن من الشكل (2-122 d) بطريقة مشابهة ينتج :

$$S_4 = S_2 = -\frac{3}{4}P \quad ; \quad S_{5H} = S_{1H} = \frac{9}{8}P \quad ; \quad S_{5v} = S_{1v} = \frac{3}{4}P$$

٢ ـ ١٠ الجيزان المنحنية

يختص هذا البحث بدراسة الجيزان التي يكون محورها الاوسط منحنياً وتؤثر عليها حمولات تقع في مستوي هذا المحور المنحني . وستقتصر الدراسة هنا على الانشاءات المقررة ستاتيكياً .

مثال 69 :

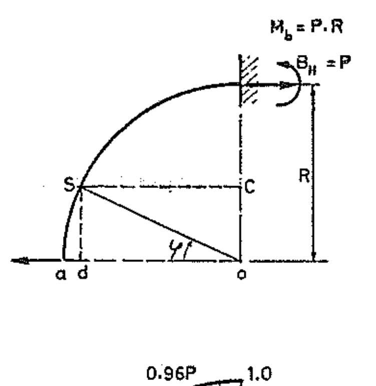
جائز بارز (ظفر) بطول ربع دائرة وموثوق عند الطرف b وتؤثر عليه عند الطرف a حمولة وحيدة (حمولة مركزة) باتجاه مركز الدائرة 0 (شكل 2-123).

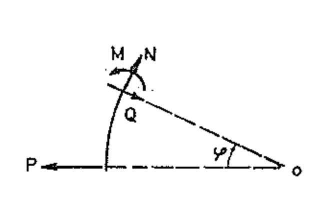
المعطى: قيمة الحمولة P ، نصف قطر الدائرة R .

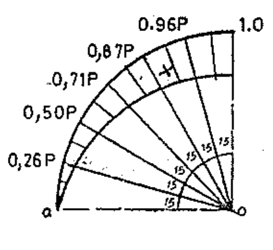
المطلوب : ايجاد قيم القطع .

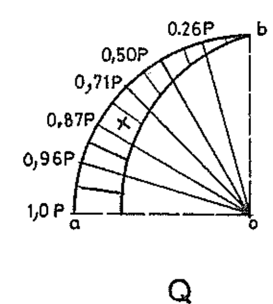
الحل :

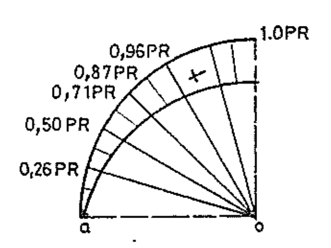
باعتبار القطع s الذي تحدده الزاوية φ وبتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر ينتج :











N　　　　Q　　　　M

شكل 2-123

$$\Sigma P_N = 0 \quad : \quad N = P \sin \varphi \qquad (1)$$

$$\Sigma P_Q = 0 \quad : \quad Q = P \cos \varphi \qquad (2)$$

$$\Sigma M_s = 0 \quad : \quad M = P R \sin \varphi \qquad (3)$$

من الممكن ان يتم رسم مخططات قيم القطع بالطريقة المبينة في الشكل (2.123) وذلك بتقسيم محيط الدائرة إلى اقسام على أبعاد متساوية وايجاد قيم القطع عند كل قسم بتعويض قيمة الزاوية φ في العلاقات (1) و (2) و (3) ثم تؤخذ الاحداثيات في اتجاه المركز عمودياً على المحور . وفي الشكل (2-123) قسم محيط ربع الدائرة إلى ستة أقسام بحيث أصبحت قيم الزاوية φ على التوالي $0°$ و $15°$ و $30°$ و $45°$ و $60°$ و $75°$ و $90°$ ومن المعلوم أن مخطط عزم الانعطاف في هذه الحالة يشبه شكل القوى الناظمية للتشابه الواضح بين العلاقتين (1) و (3) .

مثال 70 :

تقع الجملة الحاملة الممثلة في الشكل (2-124) تحت تأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها q .

المعطى : R و q .

المطلوب : إيجاد قيم القطع .

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند

بتطبيق شروط التوازن على الشكل (2-124) ينتج :

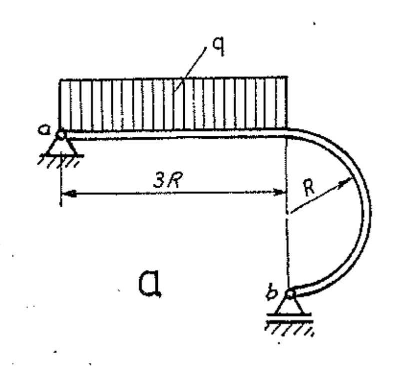
$$\Sigma H = 0 : \quad A_H = 0$$

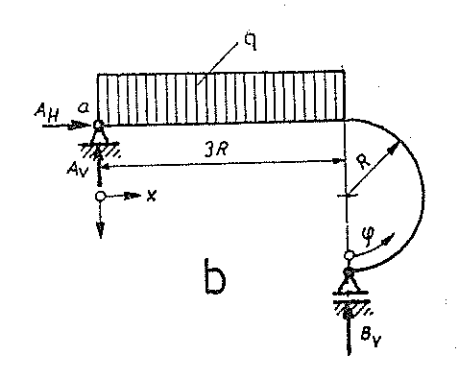
$$\Sigma M_a = 0 \; ; \; B_v \, . \, 3 R - q \, . \, \frac{3 R^2}{2} = 0 \; ; \; B_v = \frac{3}{2} R q$$

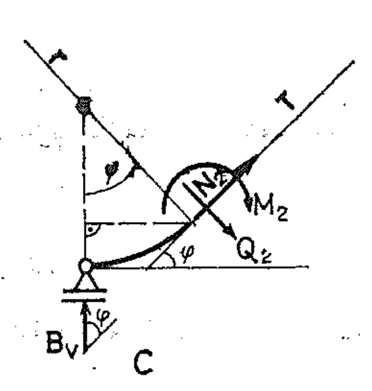
$$\Sigma V = 0 \; : \; A_v + B_V - q \, . \, 3 R = 0 \; : \; A_v = \frac{3}{2} R q$$

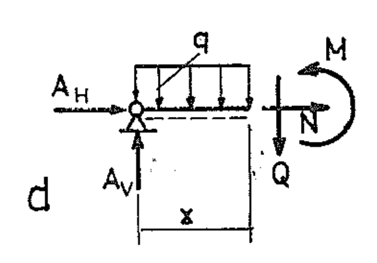
٢ ـ قيم القطع (ردود أفعال القطع)

يتألف الجائز من مجالين .









شكل 2-124

المجال I $(0 \leqq x \leqq 3R)$:

بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-124d)ينتج:

$$\Sigma H = 0 : N_1 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_1 = A_v - q\ x = \frac{3}{2} qR - qx$$

$$x = 0 : Q_1 = \frac{3}{2} q R$$

$$x = 3R : Q_1 = -\frac{3}{2} qR$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_1 = A_v \cdot x - q. \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2} q R x - q \frac{x^2}{2}$$

تمثل هذه المعادلة قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية .

$$x = 0 : M_1 = 0$$

$$x = 3R/2: M_1 = \frac{3}{9} q R^2$$

$$x = 3R: M_1 = 0$$

المجال II $(0 \leqq \varphi \leqq \pi)$:

بتطبيق شروط التوازن على القطع الايمن (شكل 2.124 c) ينتج :

$$\sum P_T = O : N_2 = - B_v \sin \alpha = - \frac{3}{2} R q \sin \alpha$$

(شرط توازن القوى بالاتجاه المماسي) .

$$\alpha = 0 \quad : N_2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : N_2 = - \frac{3}{2} R q$$

$$\alpha = \pi \quad : N_2 = 0$$

$$\sum P_r = 0 : Q_2 = B_v \cos \alpha = \frac{3}{2} R q \cos \alpha$$

(شرط توازن القوى بالاتجاه القطري) .

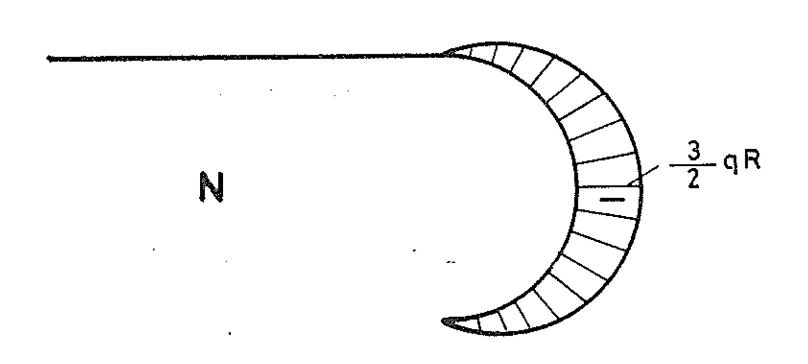
$$\alpha = 0 : Q_2 = \frac{3}{2} R q$$

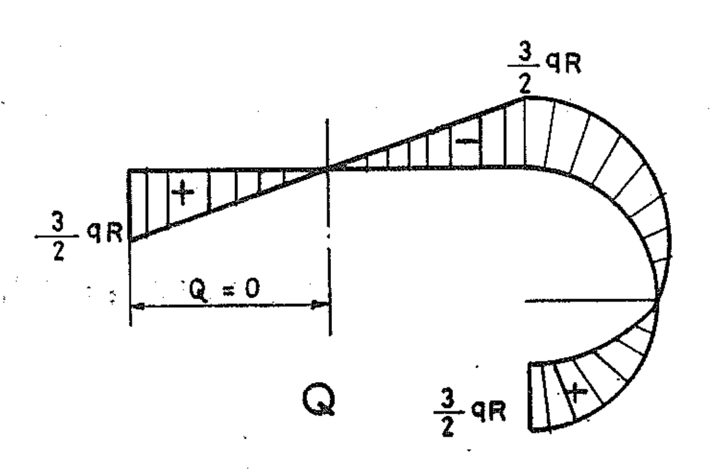
$$\alpha = \frac{\pi}{2} : Q_2 = 0$$

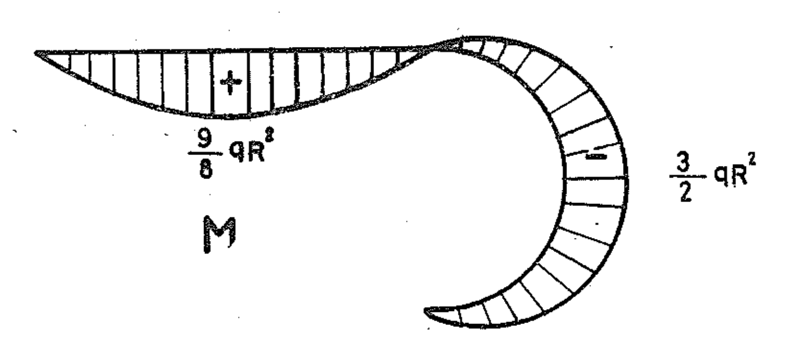
$$\alpha = \pi : Q_2 = - \frac{3}{2} R q$$

$$\sum M_\varphi = 0 : M_2 = - B_v R \sin \alpha = - \frac{3}{2} R^2 q \sin \alpha$$

$$\alpha = 0 \quad : \quad M_2 = 0$$







شكل 2-124 e

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : \quad M_2 = -\frac{3}{2} R^2 q$$

$$\alpha = \pi : \quad M_2 = 0 \quad .$$

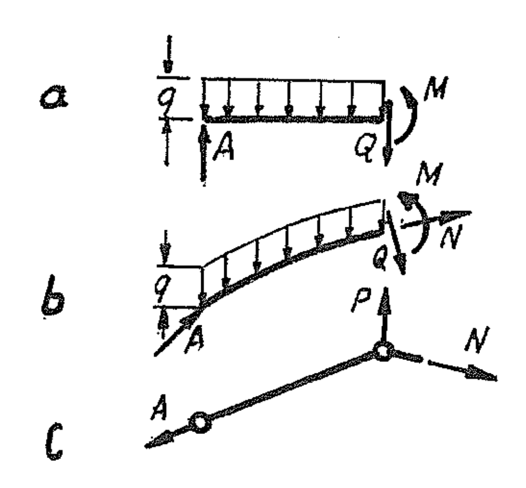
لقد تم في الشكل (2-124 e) تمثيل مخططات قيم القطع .

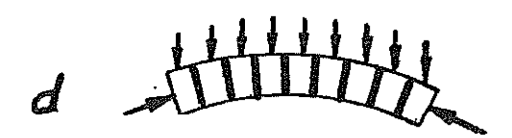
٢ ـ ١١ الاقواس

٢ ـ ١١ ـ ١ كيفية تحمل القوس

يتم في الجيزان القضيبية المستقيمة نقل الحمولات الناظمية على محورها الاوسط عن طريق (بواسطة) عزوم الانعطاف والقوى العرضية (شكل 2-125 a) . لكن نقل حمولات مشابهة في القوس يتم عن طريق (بواسطة) عزوم الانعطاف والقوى العرضية وكذلك القوى الناظمية (شكل 2-125 b) . يمثل الجائز ثلاثي المفصل ، الذي مثل منه في الشكل (2-125 c) الجزء المقطوع الايسر فقط ، حالة حدية للاقواس حيث يمكن اعتباره قوساً ثلاثي المفصل بأوتار مستقيمة فهو يشترك مع القوس بصفة كونه جائزاً مستوياً .

يوضح الشكل (2-125 d) فعالية تحمل الحمولات عن طريق القوى الناظمية N ، فالتقوس البسيط للحجارة فوق فتحة النافذة يساعد على تحملها لحمولات كبيرة تؤثر فوقها .

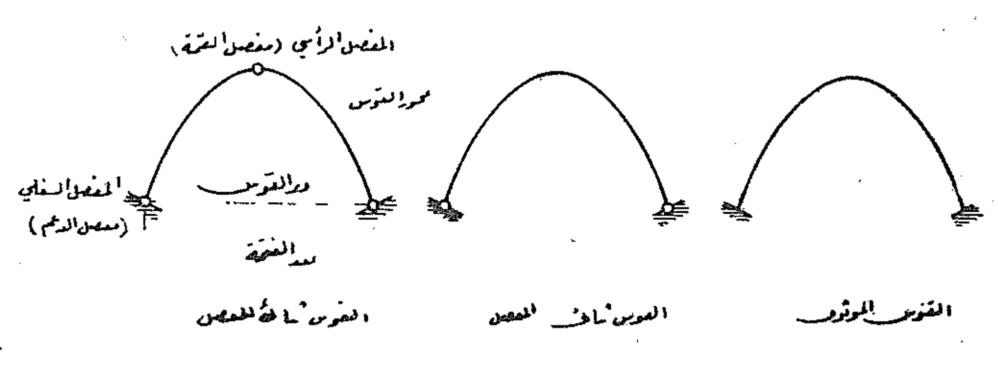




شكل 2-125

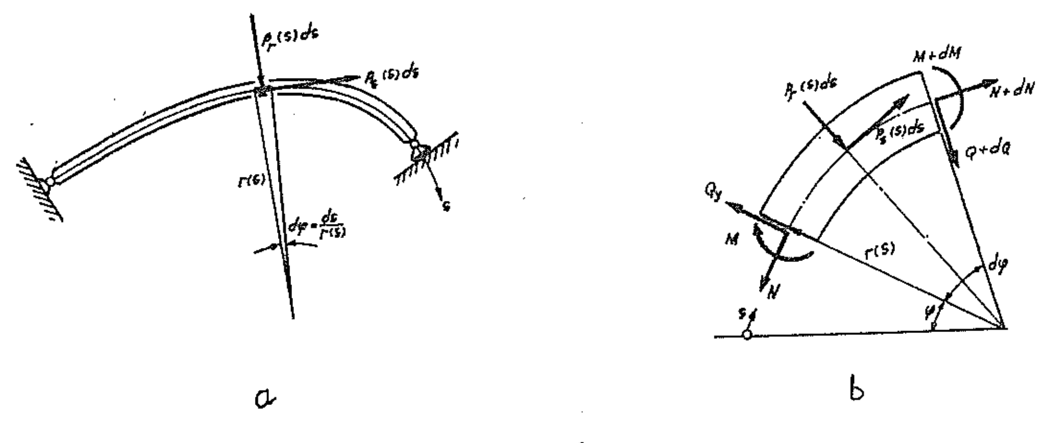
أما الاقواس فهي انشاءات محورها الاوسط منحني كما ان مساندها تحتوي في حالة التحميل الشاقولي على ردود فعل شاقولية وردود فعل افقية .

يوضح الشكل (2-126) ثلاثة أنواع للاقواس هما القوس ثلاثي المفصل (وهو مقررستاتيكياً) والقوس ثنائي المفصل (وهو غير مقرر ستاتيكياً من الدرجة الاولى) والقوس الموثوق (وهو غير مقرر ستاتيكياً من الدرجة الثالثة) .



شكل 2-126

فيما يلي ستقتصر الدراسة على جيزان محورهـا الاوسط هو عبـــارة عن خط منحني مستوي (شكل 2-127a) . يتحدد تحميل المحور الاوسط للقضيب من خلال القـوى الخطية $q_r(s)$ و $q_s(s)$ كما يتحدد نصف قطر انحناء محور القضيب بواسطة $r(s)$.



شكل 2-127

٢ ـ ١١ ـ ٢ العلاقات التفاضلية للجيزان المنحنية

باعتبار العنصر التفاضلي المقتطع من القوس (شكل 2-127 b) والذي يبلـغ طوله $ds = rd\varphi$

والذي يتعرض لضغط خارجي يؤثر ناظمياً على المحور الاوسط شدته q_r والى حمـولات تؤثر مماسية على منحني المحور الاوسط شدتها q_s وباعتبار ان قيم القطع عند a هي :

$$N(s) \quad , \quad Q(s) \quad , \quad M(s)$$

وعند b هي :

$$N(s+ds) = N(s) + dN(s)$$

$$Q(s+ds) = Q(s) + dQ(s)$$

$$M(s+ds) = M(s) + dM(s)$$

(يرمز للاحداثي الذي ينطبق على محور القضيب بالرمز s والى الزاوية التي تحدد مكان القطع بالرمز φ) وبالافتراض ان انحناء القوس صغير (طفيف) ، أي أن :

$$h << r$$

فان تطبيق شروط التوازن يعطي العلاقات التالية :

١ ـ شرط توازن القوى باتجاه القوة N (s+ds) (القوة الناظمية الموجودة على النهـاية اليمنى من محور العنصر) :

$$N(s) + dN(s) - N(s)\cos d\varphi - Q(s)\sin d\varphi +$$

$$+ q_s(s)\, ds \cos\frac{d\varphi}{2} + q_r(s)\, ds \sin\frac{d\varphi}{2} = 0$$

٢ ـ شرط توازن القوى باتجاه القوة Q (s+ds) (القوة العرضية الموجودة على النهـاية اليمنى من محور العنصر) :

$$Q(s) + dQ(s) + N(s)\sin d\varphi - Q(s)\cos d\varphi - q_s(s)\, ds \sin\frac{d\varphi}{2}$$

$$+ q_r(s)\, ds \cos\frac{d\varphi}{2} = 0$$

٣ ـ شرط توازن العزوم حول نقطة الحافة اليمنى s+ds (نقطـة الحافة اليمنى من محور القضيب) :

$$M(s) + dM(s) - M(s) + [-Q(s)\cos d\varphi + N(s)\sin d\varphi]\, r(s)\sin d\varphi$$
$$+ [-Q(s)\sin d\varphi - N(s)\cos d\varphi]\, r(s)(1-\cos d\varphi)$$
$$+ \left[-q_s(s)\, ds\sin\frac{d\varphi}{2} + q_r(s)\, ds\cos\frac{d\varphi}{2}\right] r(s)\sin\frac{d\varphi}{2}$$
$$+ \left[q_s(s)\, dx\cos\frac{d\varphi}{2} + q_r(s)\, ds\sin\frac{d\varphi}{2}\right] r(s)\left(1-\cos\frac{d\varphi}{2}\right) = 0$$

في حالة $d\varphi \to 0$ فان

$$\sin d\varphi \approx d\varphi \quad ; \quad \cos d\varphi \approx 1 \quad ; \quad \sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} \quad ; \quad \cos\frac{d\varphi}{2} \approx 1$$

بالاستعانة بهذه العلاقات وبالعلاقة التالية :

$$d\varphi = \frac{ds}{r(s)}$$

وبعد اهمال الحدود الصغيرة من المرتبة الثانية فان شروط التوازن تأخذ الشكل التالي :

$$dN(s) - Q(s)\, d\varphi + q_s(s)\, ds = 0$$
$$dQ(s) + N(s)\, d\varphi + q_r(s)\, ds = 0$$
$$dM(s) - Q(s)\, ds = 0$$

من الواضح ان المعادلة الاخيرة تصلح للجيزان سواء اكانت منحنية ام مستقيمة . من اجل الحالة الحدية $ds \to 0$ فان حامل $dN(s)$ ينطبق على حامل $N(s)+dN(s)$. في الجيزان المنحنية ايضاً لاتعطي القوة الناظمية اي نصيب الى شرط توازن العزوم.

يمكن كتابة معادلات التوازن كمعادلات تفاضلية على شكلين ، فمرة تقسم العلاقات الاخيرة على $d\varphi$ وفي المرة الاخرى تقسم على ds ففي الاولى ينتج :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN(s)}{d\varphi} - Q(s) + q_s(s)\, .r(s) = 0 \\ &\frac{dQ(s)}{d\varphi} + N(s) + q_r(s)\, .\, r(s) = 0 \\ &\frac{dM(s)}{d\varphi} - Q(s)\, .\, r(s) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}11)$$

أما في المرة الثانية فينتج :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN(s)}{ds} - \frac{Q(s)}{r(s)} + q_s(s) &= 0 \\ \frac{dQ(s)}{ds} + \frac{N(s)}{r(s)} + q_r(s) &= 0 \\ \frac{dM(s)}{ds} - Q(s) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}12)$$

حالة خاصة :

من أجل الجيزان المنحنية الدائرية الشكل فان

$$r = \text{const.} \quad ; \quad ds = r\,d\varphi$$

وبذلك ، وبعد استخدام الاختصار التالي :

$$\frac{d}{d\varphi}(\quad) = (\quad)^{\circ} \qquad (2.13)$$

فان العلاقات التفاضلية تأخذ الشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned} \dot{N} - Q + q_s \,.\, r &= 0 \\ \dot{Q} + N + q_r \,.\, r &= 0 \\ \dot{M} - Q \,.\, r &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}14)$$

باجراء بعض التحويلات فان المعادلات تصبح كما يلي :

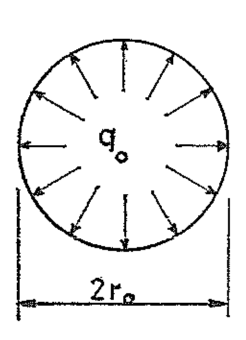
$$\left.\begin{aligned} & \ddot{N} + N + r \,.\, \dot{q}_s + r \,.\, q_r = 0 \\ & Q = \dot{N} + q_s \,.\, r \\ & M = N \,.\, r + r^2 \int q_s \, d\varphi + C \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}15)$$

مثـال 71 :

يقع قوس على شكل حلقـة دائرية مغلقة تحت تأثـــير ضغط داخلي ثابت الشدة $q_r = q_0$ (شكل 2-128).

المعطى : نصف قطر الدائرة r_0 وشدة الحمولة $q_r = q_0$.

المطلوب : حساب قيم القطع .



شكل 2-128

الحـل :

$$q_s = 0 \quad ; \quad q_r = q_0 \quad ; \quad r = r_0$$

بتبديل هذه القيم في المعادلات (2-14) ينتج :

$$\frac{dN}{d\varphi} - Q = 0$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} + N + q_0 r_0 = 0$$

$$\frac{dM}{d\varphi} - Q r_0 = 0$$

بسبب التناظر الدوراني للشكل الهندسي وللحمولة ، فان القوة العرضية تنعدم في كل نقطة من نقـاط الحلقة ، اي ان $Q = 0$. بالتعويض في المعادلة الثانيـــة من مجموعة المعـادلات السابقة ينتج :

$$N = - q_0 r_0 = \text{const.}$$

ومن المعادلة الثالثة يتم الحصول على النتيجة التالية :

$$M = C_1 = \text{const.}$$

بدراسة الجملة ، كجائز غير مقرر ستاتيكياً من الناحية الداخلية ، بطريقة قيم القطع (منهاج السنة الثانية) يتبين ان :

$$C_1 = 0 \quad : \quad M = 0$$

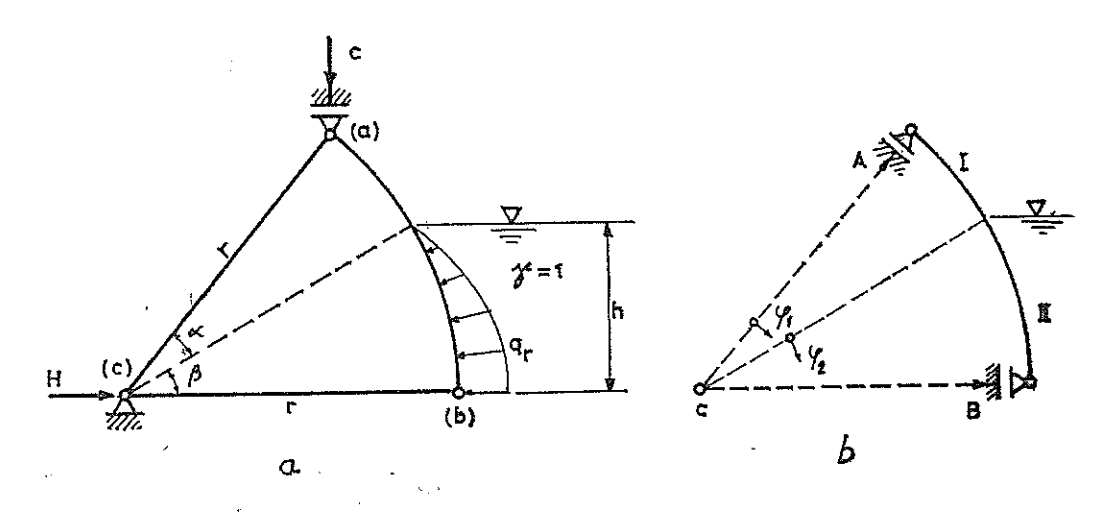
أي أن:

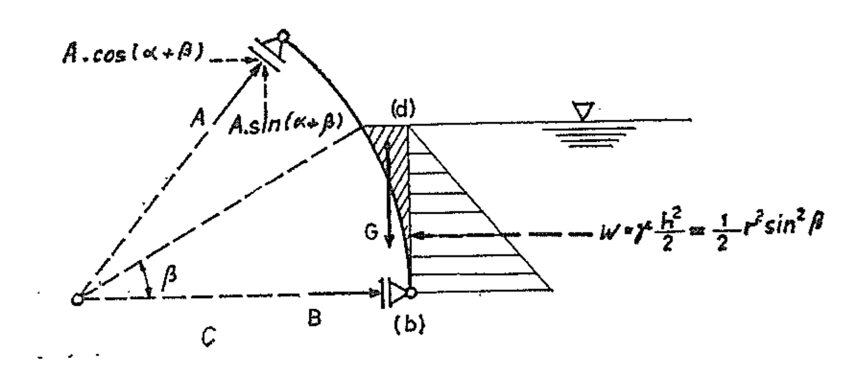
$$Q = M = 0 \quad ; \quad N = - q_0 \, r_0$$

تسمى هذه المعادلة بعلاقة المرجل (Kesselformel) وذلك لسلوك المرجـل الاسطواني الدائري الشكل في حالة الضغط الداخلي المنتظم ($q_0 < 0$) نفس حالة الاجهاد (وذلك بغض النظر عن الاضطرابات التي تنشأ عند نقاط الاتصال بين المرجل وقعره) .

مثـال 72 :

يقع سد واقي على شكل قطاع دائري (Segmentschütz) تحت تأثير ضغط الماء(شكل 2-129).
المعطى : ابعاد الجملة والحمولة .





شكل 2-129

المطلوب : حساب ورسم مخططات قيم القطع .

الحل :

بتطبيق شرط توازن العزوم حول النقطة c ينتج :

$$\Sigma M_c = 0 \quad : \quad C = 0$$

١ ـ قيم القطع :

١ ـ ١ قيم القطع في المجال I $(0 \leqq \varphi_1 \leqq \alpha)$:

سوف تنسب قيم القطع والحمولة على طول 1 m من السد الواقي .

١ ـ ١ ـ ١ الحمولة

$$q_r = q_s = 0$$

١ ـ ١ ـ ٢ القوى الناظمية :

بتبديل شدة الحمولة في العلاقة (2-15) ينتج :

$$\ddot{N} + N = 0$$

هذه هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية . يمثل حلها بالشكل التالي :

$$N = C_1 \cos \varphi_1 + C_2 \sin \varphi_1$$

شروط الاطراف :

$$\varphi_1 = 0 \ : \ N = 0 \ ; \ C_1 = 0$$

١ ـ ١ ـ ٣ القوى العرضية

بتبديل شدة الحمولة في العلاقة (2-15) ينتج :

$$Q = \dot{N}$$

$$Q = C_2 \cos \varphi_1$$

شروط الاطراف :

$\varphi_1 = 0 \quad : \quad Q = A \quad : \quad C_2 = A$

بالتبديل في العلاقات السابقة يتم الحصول على القوة الناظمية والعرضية :

$Q = A \cdot \cos \varphi_1 \quad ; \quad N = A \cdot \sin \varphi_1$ Mp/m

١ ـ ١ ـ ٤ عزم الانعطاف

$M = N \cdot r + C_3 = A \cdot r \cdot \sin \varphi_1 + C_3$

شروط الاطراف :

$\varphi_1 = 0 \quad : \quad M = 0 \quad ; \quad C_3 = 0$

بالتبديل في العلاقة الاخيرة يتم الحصول على معادلة عزم الانعطاف :

$M = A \cdot r \cdot \sin \varphi_1$ Mpm/m

١ ـ ١ ـ ٥ شروط التحول للمجال II :

$\varphi_1 = \alpha \quad : \quad N = A \cdot \sin \alpha$

$Q = A \cdot \cos \alpha$

$M = A \cdot r \cdot \sin \alpha$

١ ـ ٢ قيم القطع في المجال II

١ ـ ٢ ـ ١ الحمولة :

$q_s = 0$

$q_r = \gamma \left[h - r \cdot \sin (\beta - \varphi_2) \right]$

بالاستعانة بالعلاقة :

$h = r \cdot \sin \beta$

فان العلاقة الاخيرة تأخذ الشكل التالي :

$$\ddot{q}_r = \gamma\, [\, r.\sin\dot{\beta} - r\sin\dot{\beta}\,.\cos\dot{\varphi}_2 + r.\cos\dot{\beta}.\sin\varphi_2\,]$$

بتبديل الوزن النوعي للماء :

$$\gamma = 1 \quad Mp/m^3$$

تتحول العلاقة الاخيرة لتأخذ الشكل التالي :

$$q_r = r.\sin\beta - r.\sin\beta\,.\cos\varphi_2 + r.\cos\beta\,.\sin\varphi_2$$

١ ـ ٢ ـ ٢ القوة الناظمية

بتبديل شدة الحمولة في العلاقة (2-15) ينتج :

$$\ddot{N} + N = r^2.\sin\beta + r^2\sin\beta\,.\cos\varphi_2 - r^2\cos\beta\,.\sin\varphi_2$$

معادلة تفاضلية خطية لا متجانسة من المرتبة الثانية .

الحل المتجانس :

$$N_h = C_4\,.\cos\varphi_2 + C_5\,.\sin\varphi_2$$

الحل الخـاص :

$$N_p = -r^2\sin\beta + \frac{r^2}{2}\sin\beta\,\varphi_2\,.\sin\varphi_2 + \frac{r^2}{2}\cos\beta\,.\,\varphi_2.\cos\varphi_2$$

شروط الاطراف :

$$\varphi_2 = 0 \;:\; N = A\,.\sin\alpha$$

$$A\,.\sin\alpha = C_4 - r^2\,.\sin\beta$$

$$C_4 = A\,.\sin\alpha + r^2\,.\sin\beta$$

١ ـ ٢ ـ ٣ القوة العرضية

بتبديل شدة الحمولة في العلاقة (2-15) ينتج :

$$Q = \dot{N}$$

بتبديل C_4 في علاقة القوة الناظمية يصبح حل المعادلة التفاضلية ، هكذا :

$$Q_h = -(A.\sin\alpha + r^2 \sin\beta)\sin\varphi_2 + C_5 \cos\varphi_2$$

$$Q_p = \frac{r^2}{2}\sin\beta\,(\sin\varphi_2 + \varphi_2\cos\varphi_2) + \frac{r^2}{2}\cos\beta(\cos\varphi_2 - \varphi_2\sin\varphi_2)$$

شروط الاطراف :

$$\varphi_2 = 0 \ : \ Q = A.\cos\alpha$$

$$A.\cos\alpha = C_5 + \frac{r^2}{2}\cos\beta$$

$$C_5 = A.\cos\alpha - \frac{r^2}{2}\cos\beta$$

١ ـ ٢ ـ ٤ تبديل الثوابت C_4 و C_5

آ ـ القوة الناظمية :

$$N = (A.\sin\alpha + r^2\sin\beta)\cos\varphi_2 + (A\cos\alpha - \frac{r^2}{2}\cos\beta)\sin\varphi_2 -$$

$$-r^2\sin\beta + \frac{r^2}{2}\sin\beta.\varphi_2.\sin\varphi_2 + \frac{r^2}{2}\cos\beta.\varphi_2.\cos\varphi_2 \quad Mp/m$$

ب ـ القوة العرضية :

$$Q = -(A.\sin\alpha + r^2\sin\beta)\sin\varphi_2 + (A\cos\alpha - \frac{r^2}{2}\cos\beta)\cos\varphi_2 +$$

$$+\frac{r^2}{2}\sin\beta\,(\sin\varphi_2 + \varphi_2\cos\varphi_2) + \frac{r^2}{2}\cos\beta\,(\cos\varphi_2 - \varphi_2\sin\varphi_2) \quad Mp/m$$

١ ـ ٢ ـ ٥ عزم الانعطاف

$$M = N.r + C_6$$

شروط الاطراف :

$$\varphi_2 = 0 \ : \ M_2 = A.r.\sin\alpha$$

$$A.r.\sin\alpha = A.r.\sin\alpha + r^3\sin\beta - r^3\sin\beta + C_6 \ : \ C_6 = 0$$

ومنه يتم الحصول على معادلة عزم الانعطاف :

$$M = N . r = \dots$$

١ ـ ٣ تعيين A

شروط الأطراف :

$$\varphi_2 = \beta \ : N = 0$$

بالتبديل فى معادلة N الموجودة في الفقرة ١ ـ ٢ ـ ٤ آ ينتج :

$$0 = A (\sin \alpha . \cos \beta + \cos \alpha . \sin \beta) + \frac{r^2}{2} \sin \beta \cos \beta -$$

$$- r^2 \sin \beta + \frac{r^2}{2} . \beta (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)$$

$$= A . \sin (\alpha + \beta) + \frac{r^2}{2} \sin \beta . \cos \beta \cdot r^2 \sin \beta + \frac{r^2}{2} \beta$$

من هذه العلاقة يتم تعيين A :

$$A = \frac{1}{\sin (\alpha + \beta)} \left[r^2 , \sin \beta \left(1 - \frac{\cos \beta}{2}\right) - \frac{r^2}{2} \beta \right] \qquad \frac{Mp}{m}$$

بتبديل قيمة A في علاقات الفقرة ١ ـ ٢ ـ ٤ آ و ب يتم الحصول على قيم القطع النهائية .

١ ـ ٤ التدقيق الحسابي

القطع (b) (d) (شكل 2-129 c) :

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$\Sigma V = 0 \ : \ A . \sin (\alpha + \beta) = G$$

حيث أن G هو وزن الماء ويبلغ :

$$G = r^2 . \sin \beta \left(1 - \frac{1}{2} \cos\beta\right) - \frac{r^2}{2} \beta$$

بالتبديل في العلاقة السابقة ينتج :

(انظر نفس العلاقة المحسوبة سابقاً)

$$A = \dots$$

$$\Sigma H = 0 \; : \; B = W - A\cos(\alpha+\beta)$$

$$B = \frac{1}{2} r^2 \sin^2\beta - A\cos(\alpha+\beta)$$

$$\varphi_2 = \beta \; : \; Q = -B$$

$$Q(\beta) = -A\sin\alpha \, . \sin\beta + A\cos\alpha \, . \cos\beta -$$

$$- r^2\sin^2\beta - \frac{r^2}{2}\cos^2\beta + \frac{r^2}{2}\cos^2\beta +$$

$$+ \frac{r^2}{2}\sin^2\beta + \frac{r^2}{2}\sin\beta \, . \beta \, . \cos\beta -$$

$$- \frac{r^2}{2}\beta\cos\beta\sin\beta$$

$$Q(\beta) = A\cos(\alpha+\beta) - \frac{r^2}{2}\sin^2\beta = -B$$

١ ـ ٥ مخططات قيم القطع

لقد تم في الشـكل (2-131) تمثيل مخططات قيم القطع .

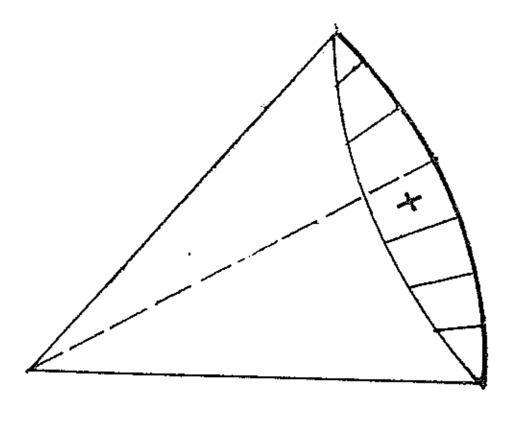
مثال 73 :

يقع قوس ثلاثي المفصل تحت تأثير قوة وحيدة F تؤثر في قمته (شكل 2-132) .
المطلوب : حساب ورسم مخططات قيم القطع .

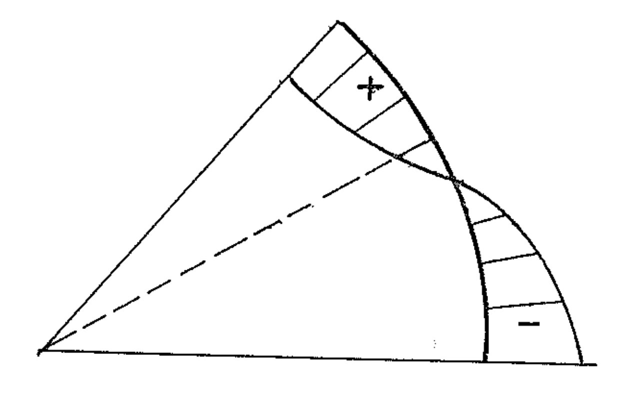
الحل :

يتألف القوس الممثل في الشـكل (2-132) من مجالين . لاسباب التناظر (الهندسي والحمولي) يمكن الاكتفاء بدراسة مجال واحد منه : على سبيل المثال الايسر .

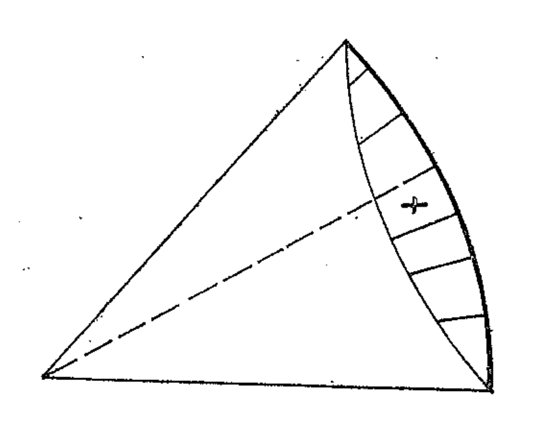
$$q_\theta = q_r = 0 \quad ; \quad r = r_0 = \text{const.}$$



N

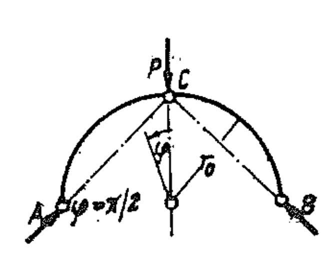


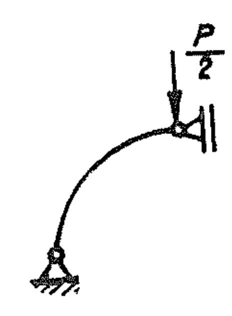
Q



M

شکل 2-131





شكل 2-132

بالاستعانة بالقيم السابقة فان العلاقات التفاضلية (2-14) تصبح بالشكل التالي :

$$\frac{dN}{d\varphi} - Q = 0$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} + N = 0 \qquad (2\text{-}16)$$

$$\frac{dM}{d\varphi} - r_0 Q = 0$$

من العلاقة الاولى يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\frac{dN}{d\varphi} = Q$$

وبتبديلها في العلاقة الثانية ينتج :

$$\frac{d^2N}{d\varphi^2} + N = 0$$

هذه العلاقة هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية (وتحل باستخدام الاختصار $N = e^{\lambda\varphi}$ وبذلك ينتج ان $\lambda_{1,2} = \pm i$) وبذلك فان حلها يكتب بالشكل التالي :

$$N = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi \qquad (2.16a)$$

يعطي التبديل في المعادلة الاولى ، من مجموعة المعادلات الاولى (2-16)، النتيجة التالية :

$$Q = \frac{dN}{d\varphi} = -C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi \qquad (2\text{-}16b)$$

بالتبديل في المعادلة الثالثة من مجموعة المعادلات نفسها (2-16) ينتج :

$$\frac{dM}{d\varphi} = r_0\, Q = -\, r_0\, C_1 \sin\varphi + r_0\, C_2 \cos\varphi \qquad (2\text{-}16\ c)$$

بمكاملة هذه العلاقة يتم الحصول على معادلة العزم المطلوبة :

$$M = M_0 + r_0\, C_1 \cos\beta + r_0\, C_2 \sin\varphi$$

بتحقيق معادلات قيم القطع لشروط الاطراف (الستاتيكية) التالية :

$$M\,(\varphi = 0) = M\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$N\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = -\,\frac{P}{2} \qquad (\text{تناظر})$$

يتم الحصول على ثوابت التكامل C_1 , C_2 , M_0 :

$$C_1 = C_2 = -\,\frac{P}{2} \quad ; \quad M_0 = r_0\,\frac{P}{2}$$

وبذلك تصبح علاقات قيم القطع النهائية بالشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{P\, r_0}{2}\,[\,1 - \sin\varphi - \cos\varphi\,] \\ Q &= \frac{P}{2}\,[\,\sin\varphi - \cos\varphi\,] \\ N &= -\,\frac{P}{2}\,[\,\sin\varphi + \cos\varphi\,] \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}16\,d)$$

من اجل $\varphi = \pi/4$ تنعدم القوة العرضية Q وهناك يأخذ عزم الانعطاف قيمة عظمى :

$$\max\ M = -\,\frac{P r_0}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 0{,}2\, P r_0$$

يمكن الحصول على اشارة ومكان القيمة العظمى لعزم الانعطاف بصورة ايضاحية غير مباشرة هكذا : ينبغي ان يمر حامل قوة رد فعل المسند ، كما هو موضح في الشكل (2-132) من

النقطة c . ان المضلع المتشكل من المستقيمات ABC هو خط الاستناد : عزم الانعطاف يحاول عطف القوس الجزئي الى الاعلى وتقع قيمته العظمى في الوسط .

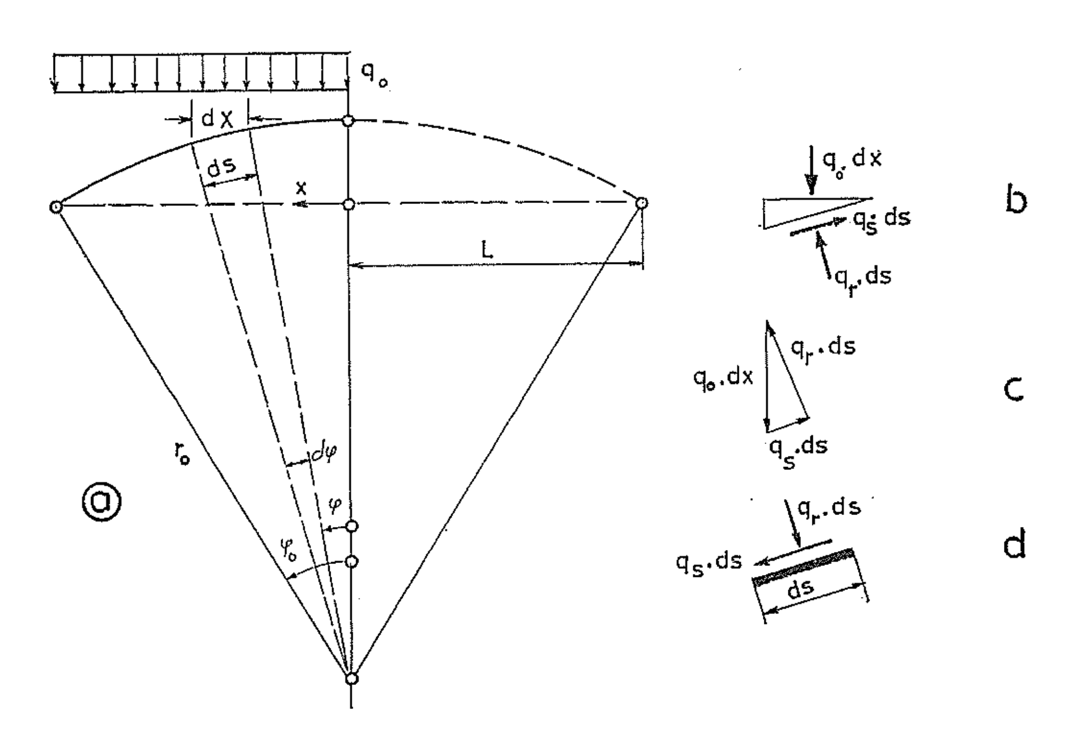
مثال 74 :

يقع القوس ثلاثي المفصل (شكل 2-135) تحت تأثير حمولة شاقولية q_0 موزعة بانتظام على طول المحور x (على سبيل المثال الوزن الذاتي على واحدة الطول لجسر) .
المطلوب : حساب ورسم مخططات قيم القطع .

الحل :

للتمكن من استخدام العلاقات التفاضلية (2-14) ينبغي تعيين الحمولات القطرية والحمولات المماسية. بتحقيق التوازن على المثلث الصغير الممثل في الشكل (2-134 b) وباعتبار الشكل(2.134 c) يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$q_0\, dx \cos\varphi = q_r\, d\,s$$
$$q_0\, dx \sin\varphi = q_s\, ds$$



شكل 2-134

باستخدام العلاقات التالية :

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$$

تصبح علاقات التحميل (العلاقات الاولى) هكذا :

$$\left.\begin{aligned} q_r &= q_0 \cos^2\varphi \\ q_s &= q_0 \cos\varphi \,.\, \sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (2.17.a)$$

بذلك فان الحمولات التي تؤثر على القوس هي القوى q_s , q_r . اما اشارتها فمعطاة في الشكل (2-134 d) .

من اجل القوس الدائري الذي يبلغ نصف قطره $r = r_0 = const$ وفي حالة تأثير الحمولات الممثلة في العلاقة (2-17 a) فان حل العلاقات التفاضلية ليس بالامر الصعب .

ان الحل العام لهذه المعادلات (وهو يتألف من الحل المتجانس مضافا اليه الحل الخاص المعادلات) هو :

$$N = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi - q_0 r_0 \sin^2\varphi$$

$$Q = -C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi - q_0 r_0 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$M = M_0 + r_0 C_1 \cos\varphi + r_0 C_2 \sin\varphi - \frac{q_0 r_0^2}{2} \sin^2\varphi$$

شروط الاطراف :

(تناظر) $Q(\varphi=0)=0$

$$M(\varphi = 0) = M(\varphi_0) = 0$$

بتحقيق معادلات قيم القطع لشروط الاطراف المذكورة يتم الحصول على ثوابت التكامل :

$$C_2 = 0 \quad ; \quad r_0 C_1 = M_0 = \frac{q_0 r_0^2}{2}(1 + \cos\varphi_0)$$

بتبديلها في معادلات قيم القطع السابقة يتم الحصول على المعادلات النهائية لقيم القطع :

$$
\left.
\begin{aligned}
M &= -\frac{q_0 r_0^2}{2}(1-\cos\varphi)(\cos\varphi-\cos\varphi_0)\\
Q &= -\frac{q_0 r_0}{2}\sin\varphi\,(1+\cos\varphi_0-2\cos\varphi)\\
N &= -\frac{q_0 r_0}{2}\left[\cos\varphi\,(1+\cos\varphi_0)+2\sin^2\varphi\right]
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2\text{-}17\,b)
$$

بجعل القوة العرضية تساوي الصفر $(Q=0)$ تنتج العلاقة التالية :

$$\sin\varphi\,(1+\cos\varphi_0-2\cos\varphi)=0$$

تتحقق هذه العلاقة ، إما في حالة كون :

$$\sin\varphi=0 \quad : \quad \varphi=0\,,\ \pi\,,\ldots,\ n\pi$$

او في حالة كون :

$$1+\cos\varphi_0-2\cos\varphi=0 : \quad \cos\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos\varphi_0)$$

يشير الحل الاول الى ان $\varphi=0$ وهذا واضح بسبب التناظر (حيث تنعدم القوة العرضيـة في نقطة التناظر) $Q(\varphi=0)=0$ وبسبب وجود المفصل ينعدم العزم هناك ايضاً. اما الحلول الثانية فلا قيمة لها من الناحية العملية . وبذلك يكون المكان الذي تنعدم فيه القوة العرضية هو المكان الذي يتحقق فيه الشرط $\cos\varphi=1/2\,(1+\cos\varphi_0)$ فقط . بتبديل هذه العلاقة في معـادلة العزم يتم الحصول على قيمة العزم الاعظمية :

$$\max M=-\frac{q_0 r_0^2}{8}(1-\cos\varphi_0)^2$$

تبتدأ القوة الناظمية الضاغطة بالقيمة :

$$\frac{q_0 r_0}{2}(1+\cos\varphi_0)$$

وذلك من اجل $\varphi=0$. الى ان تبلغ القيمة :

$$\frac{q_0 r_0}{2}(1+\cos\varphi_0+\sin\varphi^2{}_0)$$

من اجل

$$\varphi = \varphi_0$$

يبقى العزم في الاقواس الدائرية ذات الانحناء الطفيف (البسيط) صغيراً . بواسطة العلاقة :

$$1 - \cos\varphi_0 \approx \frac{\rho_0{}^2}{2} \; ; \;\; r_0\,\varphi_0 \approx L$$

فان عزم الانعطاف الاعظمي يبلغ :

$$\max M = -\frac{q_0 L^2}{32}\,\varphi^2{}_0$$

لكن هذه العلاقة لاتصلح من اجل $\varphi_0 = 0$ وذلك لان $N \sim q_0 L/\varphi_0$ تنطلق من اجل $\varphi_0 \to 0$ فوق كل الحدود (فالجائز القضيبي المستقيم لايمكن ان يستند بواسطة قوى ناظمية) . من اجل القوس ثلاثي المفصل نصف الدائري $(\varphi_0 = \pi/2)$ فان قيمة $\max M$ في العلاقة (2-17 c) قابلة للمقارنة مع قيمة العزم الاعظمي $q_0 l^2/8$ العائد للجائز القضيبي المستقيم المحمل بحمولة موزعة بانتظام ، هذا يعني بشكل وضوح ان القوس الدائري لايمثل خط استناد للحمولات الخطية الشاقولية الموزعة بانتظام .

بتوجيه السؤال التالي : ما هو شكل القوس الذي ينعدم فيه العزم بشكل دقيق ، يتم الحصول على نتائج هامة . ان نقطة الانطلاق للحصول على جواب لهذا السؤال موجودة في المعادلات (2-14) و (2-17b) وكذلك في العلاقات $M = Q = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{N} + q_0 r \sin\varphi \cos\varphi &= 0 \\ N + q_0 r \cos^2\varphi &= 0 \end{aligned} \qquad (2.17.d)$$

هاتين المعادلتين هما معادلتان لتعيين كل من $r = r(\varphi)$ و $N = N(\varphi)$ ، فنصف قطر الانحناء r يثبت شكل القوس . يعطي إختزال N من المعادلتين السابقتين ، العلاقة التالية :

$$q_0\,\dot{r}\cos^2\varphi - 2\,q_0\,r\cos\varphi\sin\varphi - q_0\,r\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

ومنها ينتج :

$$\frac{\dot{r}}{r} = 3\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

أو

$$\frac{dr}{r} = 3\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi$$

وبالمكاملة يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$ln\, r = -\,3\, ln\,(\cos\varphi) + ln\, R$$

حيث ان R هو نصف القطر عند القمة ، اي عند $\varphi = 0$. إذاً الجواب على السؤال هو أن يكون

$$r = \frac{R}{\cos^3\varphi}$$

وبشكل فوري يعرض السؤال التالي نفسه : ما هو نوع المنحني $y(x)$ الذي يحقق هذا الشرط (شرط انعدام العزم على طول المحور الاوسط).بسهولة يمكن فوراً وبشكل مفاجيء الاجابة عليه:

ان معادلة هذا المنحني هي :

$$z = \frac{x^2}{2R} + k_1 x + k_2 \qquad (2.17e)$$

وذلك لان العلاقة العامة المعروفة هي التالية :

$$\frac{1}{r} = \frac{z''}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3} = \frac{z''}{\left(\sqrt{1+tg^2\varphi}\right)^3} = z''\cos^3\varphi$$

وهي تعطي بسبب ما يلي:

$$z' = \frac{x}{R} + k_1 \quad ; \quad z'' = \frac{1}{R}$$

[حيث أن $\frac{d(\ )}{d\varphi} = (\ \ )'$].

العلاقة (2-17 e) مباشرة وبذلك يتم التوصل للنتيجة التالية :

ان خط الاستناد (خط الدعم) للحمولات الشاقولية المنتظمة التوزيع هـو قطع مكافىء من الدرجة الثانية . (بالطبع لا يحتاج القرس الذي هو على شكل قطـع مكافىء لان يحوي ، في حالة التحميل المذكورة ، مفصلا ثالثاً وذلك لانعدام العزم M في كل مكان منه) .

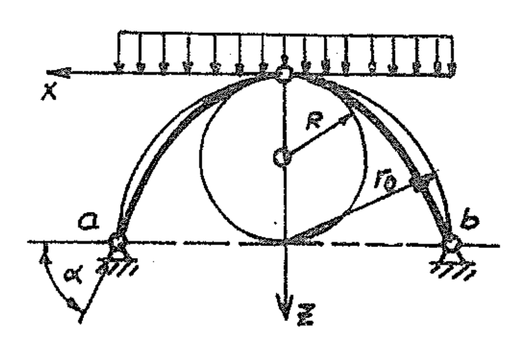
من العلاقة (2-17 d) يتم الحصول على القوة الضاغطة :

$$N = - q_0 \frac{R}{\cos \varphi} \qquad (2.17 f)$$

ان قيمة القوة الضاغطة عند القمة هي $q_0 R$ وتزداد هذه القيمة بزيادة الزاوية φ (تزداد على مقربة من القمة ازدياداً بطيئاً) . يمثل الشكل (2-135) قوساً دائرياً ثلاثي المفصل نصف قطره r_0 وتؤثر عليه الحمولة الموزعة بانتظام كما يشير الى خط الاستناد العائد لذلك النوع من الحمولات . اذا ثبت الاحداثي z في القمة وإتجه للاسفل بذلك تصبح معادلة قطع مكافىء الاستناد حسب العلاقة (2.17e) بالشكل التالي :

$$z = \frac{x^2}{2R}$$

وبذلك فان نصف قطر إنحناء القمة R للقطع المكافىء المار من a و b هو اذاً $r_0/2$. في المكان $x=r_0$ حيث $z'=tg\alpha=2$ فان المركبة الشاقولية لقوة الاستناد في a و b تساوي q_0r_0 كما ان المركبة الافقية تساوي $(1/2)q_0r_0$ وبذلك تتفق هذه النتائج من نتائج العلاقة (2-17 f) ، حيث تبلغ القوة عند القمة ، حسبها القيمة $q_0\ r_0/2$.

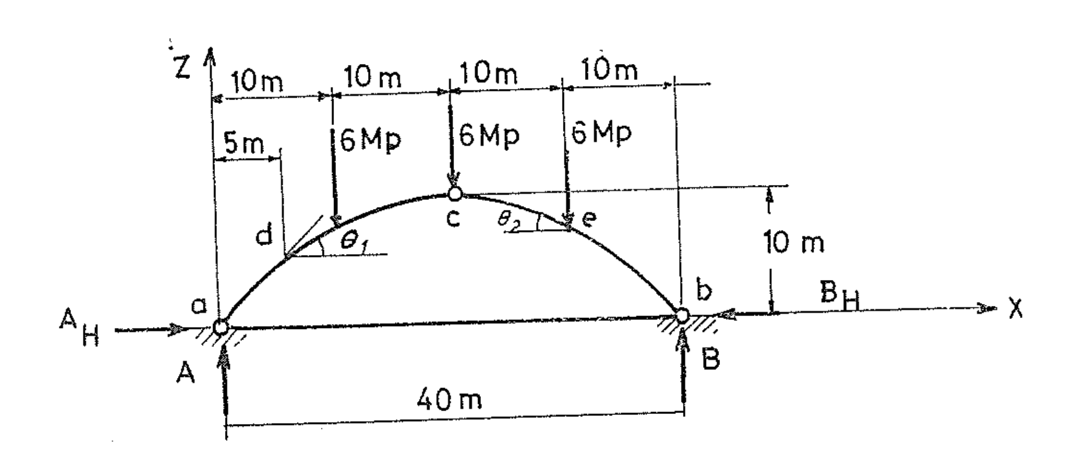


شكل 2-135

مثال 75 :

يتعرض القوس ثلاثي المفصل الممثل في الشكل (2-136) لتأثير عدة حمولات وحيدة .
يمثل الشكل الهندسي للقوس قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية معادلته $z=x-0.025\,x^2$. طول فتحة الجائز $l=40$ m وارتفاع قمته حيث يقع المفصل الرأسي هو $R=10$ m .

المطلوب . ايجاد قيم القطع في النقاط d و e .



شكل 2-136

الحل :

١ - ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود أفعال المساند المطلوبة :

$\Sigma M_a = 0$: $B_v . 40 - 6(30+20+10) = 0$: $B_v = 9$ Mp

$\Sigma V = 0$: $A_v + B_v - (6+6+6) = 0$: $A_v = 9$ Mp

$M_{cr} = 0$: $B_v . 20 - B_H . 10 - 6 . 10 = 0$: $B_H = 12$ Mp

$\Sigma H = 0$: $A_H - B_H = 0$: $A_H = 12$ Mp

(بسبب التناظر يتضح أن $A_H = B_H$ و $A_v = B_v$) .

٢ - قيم القطع

قيم القطع في النقطة d :

ان احداثيات النقطة d هي :

$z = z_d = 5 - 0{,}025 \; . \; 5^2 = 4{,}375$ m ; $x = x_d = 5$m

$\operatorname{tg} \theta_1 = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=5} = 1 - 0{,}05 \; . \; 5 = 0{,}75$

$\sin \theta_1 = 0{,}6$; $\cos \theta_1 = 0{,}8$

باجراء قطع في النقطه d ثم باعتبار الجزء المقطوع الايسر (شكل 2.137a) وتطبيق شروط التوازن عليه ينتج :

$$\Sigma P_N = 0 \quad : N_d = A_v . \sin \theta_1 + A_H . \cos \theta_1$$

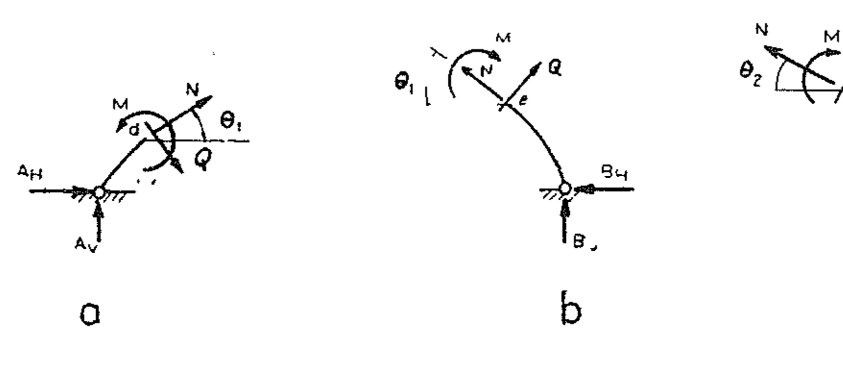
$$N_d = 9 . 0,6 + 12.0,8 = 15 \text{ Mp}$$

$$\Sigma P_Q = 0 \quad : Q_d = A_v . \cos \theta_1 - A_H . \sin \theta_1$$

$$Q_d = 9 . 0,8 - 12 . 0,6 = 0$$

$$\Sigma M_d = 0 \quad : M_d + A_H . 4,375 - A_v . 5 = 0$$

$$M_d = -7,5 \text{ Mpm}$$



شكل 1.137

قيم القطع في النقطة e :

إحداثيات النقطة e هي :

$$z = z_e = 30 - 0\ 025 . 30^2 = 7,5 \text{ m} , x = x_e = 30 \text{ m}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=30} = 1 - 0,05 . 30 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg } \theta_2 = \frac{1}{2} \; ; \; \sin \theta_2 = 0,446 \quad ; \quad \cos \theta_2 = 0,893$$

لحساب قيم القطع في النقطة e يقطع القوس في النقطة المذكورة ثم يؤخذ الجزء المقطوع الايمن (لكن ايجاد Q و N يتطلب اجراء قطعين أحدهما قبل القوة مباشرة والاخر بعد القوة مباشرة) .

بتطبيق شروط التوازن على القطع الايمن الممثل في الشكل (2-137 b) يتم الحصول على قيم القطع في النقطة e وذلك قبل نقطة تأثير القوة الوحيدة :

$$\Sigma P_N = 0 \; : \; N_e = -(12 \,.\, 0{,}893 + 9 \,.\, 0{,}446) = -14{,}73 \text{ Mp}$$

$$\Sigma P_Q = 0 \; : \; Q_e = \; 12 \,.\, 0{,}446 + 9 \,.\, 0{,}893 \; = -2{,}685 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_e = 0 \; : \; M_e + B_H \,.\, 7{,}5 - B_V \,.\, 10 = 0 \quad : \quad M_e = 0$$

وبتطبيق شروط التوازن على القطع الايمن الممثل فى الشكل (2-137 c) يتم الحصول على قيم القطع في النقطة e وذلك بعد نقطة تطبيق القوة الوحيدة :

$$\Sigma P_N = 0 \; : \; N_e = -(12 \,.\, 0{,}893 + 3 \,.\, 0{,}446) = -12{,}054 \text{ Mp}$$

$$\Sigma P_Q = 0 \; : \; Q_e = 12 \,.\, 0{,}446 - 3 \,.\, 0{,}893 \; = \; 2{,}673 \text{ Mp}$$

أما عزم الانعطاف فلا تتغير قيمته .

مثال 76 :

يتعرض الجائز الممثل في الشكل (2-138) لتأثير حمولة وحيدة P .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند .

تبلغ ردود أفعال المساند القيم التالية :

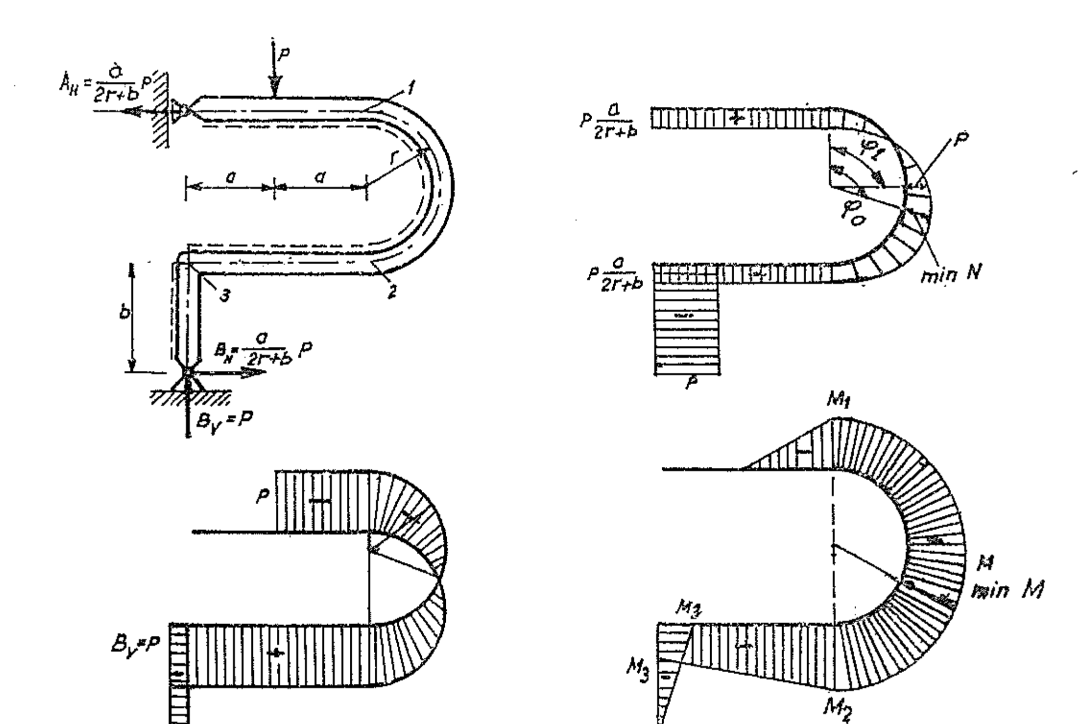
$$A_H = \frac{a}{2r + b} P \quad , \quad B_H = A_H = \frac{a}{2r + b} P \quad , \quad B_v = P$$

٢ ـ قيم القطع :

في الجزء العلوي من الجائز تساوي القوة الناظمية قيمة رد فعل المسند A_H :

$$N = A_H = \frac{a}{2r + b} P$$

تحسب قوى القطع $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ وعزم الانعطاف $M(\varphi)$ ضمن المجـــال نصف الدائري بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقتطع من الجائز والممثل في الشكل (2-138) .



شكل 2.138

من اجل القوة الناظمية ينتج :

$$N(\varphi) = -P\sin\varphi + A_H\cos\varphi = -(\sin\varphi - \frac{a}{2r+b}\cos\varphi)P$$

$$N\left(\frac{\pi}{2}\right) = -P \quad ; \quad N(\pi) = -\frac{a}{2r+b}P$$

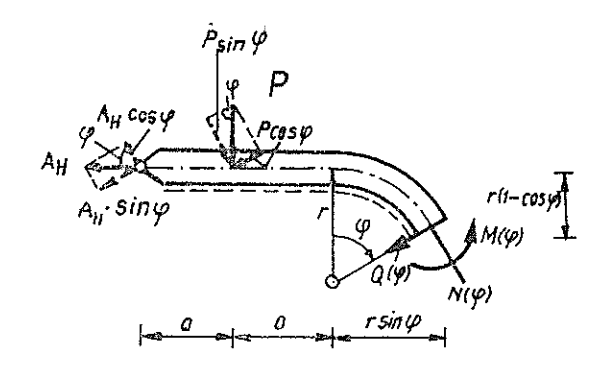
يتم الحصول على المكان φ_0 الذي تأخذ فيه القوة الناظمية قيمتها الاعظمية من العلاقة :

$$N'(\varphi) = -P\left(\cos\varphi + \frac{a}{2r+b}\sin\varphi\right) = 0$$

$$\varphi_0 = -\operatorname{arc\,tg}\frac{2r+b}{a}$$

بواسطة :

$$\sin\varphi_0 = \frac{2r+b}{\sqrt{a^2+(2r+b)^2}} \quad ; \quad \cos\varphi_0 = -\frac{a}{\sqrt{a^2+(2r+b)^2}}$$



شكل 2-139

تصبح القوة الناظمية الحدية :

$$N(\varphi_0) = \min N = -\frac{\sqrt{a^2+(2r+b)^2}}{2r+b} P$$

وفي مجال الجزء الشاقولي فان القوة الناظمية تبلغ :

$$N = -P$$

وبنفس الطريقة يتم الحصول على توزيع القوة العرضية ، حيث تأخذ القوة العرضيـة على يمين القوة P قيمة ثابتة سالبة . وفي الجزء نصف الدائري تصلح العلاقة التالية :

$$Q(\varphi) = -P\cos\varphi - A_H\sin\varphi = -\left(\cos\varphi + \frac{a}{2r+b}\sin\varphi\right)P$$

اما احداثيات القوة العرضية هناك فتبلغ :

$$Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{a}{2r+b}P$$

$$Q(\varphi_0) = 0$$

$$Q(\pi) = P$$

من المشتق:

$$Q'(\varphi) = P\left(\sin\varphi - \frac{2}{2r+b}\cos\varphi\right)$$

يمكن ايجاد مكان تشكل القيمة الحدية للقوة العرضية :

$$\varphi_1 = \text{arc tg} \frac{a}{2r+b}$$

في نفس المكان تنعدم القوة الناظمية أيضاً . بواسطة العلاقات التالية :

$$\sin\varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+(2r+b)^2}} \quad ; \quad \cos\varphi_1 = \frac{2r+b}{\sqrt{a^2+(2r+b)^2}}$$

يتم الحصول على القوة العرضية الحدية :

$$Q(\varphi) = \min Q = -\frac{\sqrt{a^2+(2r+b)^2}}{2r+b} P$$

وفي الجزء الشاقولي تبلغ القوة العرضية ، القيمة التالية :

$$Q = -B_H = -\frac{a}{2r+b} P$$

لقد تبقى الان ايجاد توزيع العزم (مخطط عزم الانعطاف) . يبلغ العزم عند 1 القيمة التالية :

$$M_1 = - Pa$$

لتعيين عزم الانعطاف $M(\varphi)$ في الجزء المنحني ينبغي العودة للشكل ,2-139) ثانية :

$$M(\varphi) = - A_H\, r\,(1-\cos\varphi) - P\,(a + r\sin\varphi)$$

$$= -Pr\left[\frac{a}{r} + \sin\varphi + \frac{a}{2r+b}(1-\cos\varphi)\right]$$

بواسطة المشتق :

$$M'(\varphi) = -P \cdot r\left(\cos\varphi + \frac{a}{2r+b}\sin\varphi\right) = 0$$

يتم الحصول على مكان القيمة الحدية :

$$\varphi_0 = -\,\text{arc tg}\,\frac{2r+b}{a}$$

أما القيمة الحدية فتبلغ :

$$M(\varphi_0) = \min M = -\left[\frac{r}{2r+b}\left(\sqrt{a^2+(2r+b)^2}+a\right)+a\right]P$$

علاوة على ذلك فان العزم في نقطة اخرى يبلغ :

$$M(\pi) = M_2 = -a\,\frac{4r+b}{2r+b}\,P$$

وللتمكن من تمثيل العزم بيانياً يبقى ايجاد قيمة اخرى للعزم ضرورياً . فالعزم في القطع 3 يبلغ :

$$M_3 = B_H\,.b = \frac{ab}{2r+b}\,P$$

مثال 77 :

يتعرض جائز قوسي نصف دائري مسند على مسندين بسيطين لتأثير سائل ساكن(شكل 2-140).
المطلوب : ايجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .

الحل :

باعتبار ان عرض الجائز هو b وان الوزن النوعي للسائل هو γ فان قيمة القوة الموزعة والتي تؤثر بالاتجاه القطري هي :

$$p_n(\varphi) = \gamma\, b\,(H-\rho\sin\varphi)$$

اما مركبتيها بالاتجاهين z , x فتبلغ :

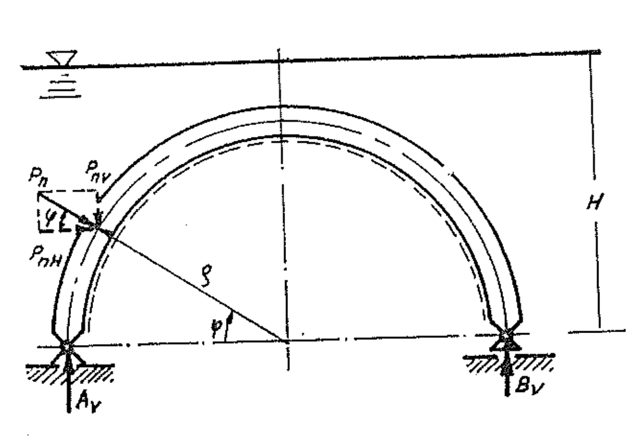
$$p_{nx}(\varphi) = p_n\cos\varphi$$

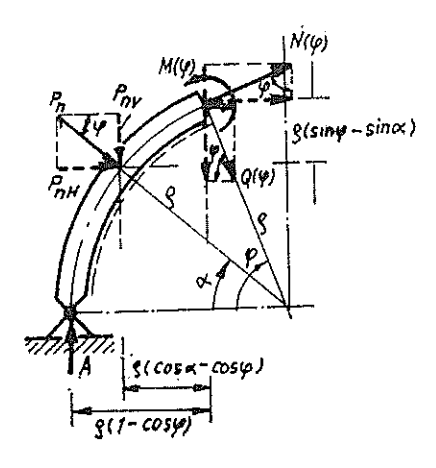
$$p_{nz}(\varphi) = p_n\sin\varphi$$

لقد افترض للتسهيل ان ضغط الماء يؤثر على محور القضيب.

١ - ردود أفعال المساند

سيتم ايجاد ردود افعال المساند، في حالة اعتبار التناظر ، من العلاقه التالية :





شكل 2-140

$$A_v - \int_0^{\pi/2} p_{nz}\, \rho\, d\varphi = 0$$

وبذلك ينتج :

$$A_v = B_v = \gamma\, b\, \rho \left(H - \frac{\pi}{4}\, \rho\right)$$

٢ - قيم القطع

لايجاد قيم القطع يجرى في المكان φ قطعاً ثم ترسم عليه قوى القطع $N(\varphi)$ و $Q(\varphi)$ وكذلك عزم الانعطاف $M(\varphi)$ وذلك كما يشير الشكل (2-140) .

بتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي ينتج .

$$A_v - \int_0^{\varphi} (\alpha)\, \rho\, dx + N(\varphi) \cos \varphi - Q(\varphi) \sin \varphi = 0$$

وبتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الافقي ينتج :

$$\int_0^{\varphi} p_{nx}(\alpha)\, \rho d\alpha + N(\varphi) \sin \varphi + Q(\varphi) \cos \varphi = 0$$

اما تطبيق شرط توازن العزوم فيعطى:

$$A_V \rho \, (1 - \cos \varphi) - \int_0^{\varphi} p_{oz} \, (\alpha) \, \rho \, (\cos \alpha - \cos \varphi) \, \rho \, d\alpha$$

$$- \int_0^{\varphi} p_{ox} \, (\alpha) \, \rho \, (\sin\varphi - \sin \alpha) \, \rho \, d\alpha - M \, (\varphi) = 0$$

من العلاقات السابقة يتم الحصول على قيم القطع المطلوبة :

القوة الناظمية :

$$N(\varphi) = - \frac{\gamma \, b \, \rho^2}{4} \left(4 \frac{H}{\rho} - \pi \cos \varphi - 2 \sin \varphi + 2 \varphi \cos \varphi \right)$$

القوة العرضية :

$$Q \, (\varphi) = \frac{\gamma \, b \, \rho^2}{4} (2 \varphi - \pi) \sin \varphi$$

عزم الانعطاف :

$$M(\varphi) = \frac{\gamma \, b \, \rho^3}{4} \left[2 \sin \varphi - 2 \varphi \cos \varphi - \pi \, (1 - \cos \varphi) \right]$$

تقع القيمة الاعظمية للقوة الناظمية في قمة الجائز :

$$\max N = - \gamma \, b \, \rho^2 \quad \left(\frac{H}{\delta} - 0{,}5 \right)$$

وكذلك أيضاً لعزم الانعطاف:

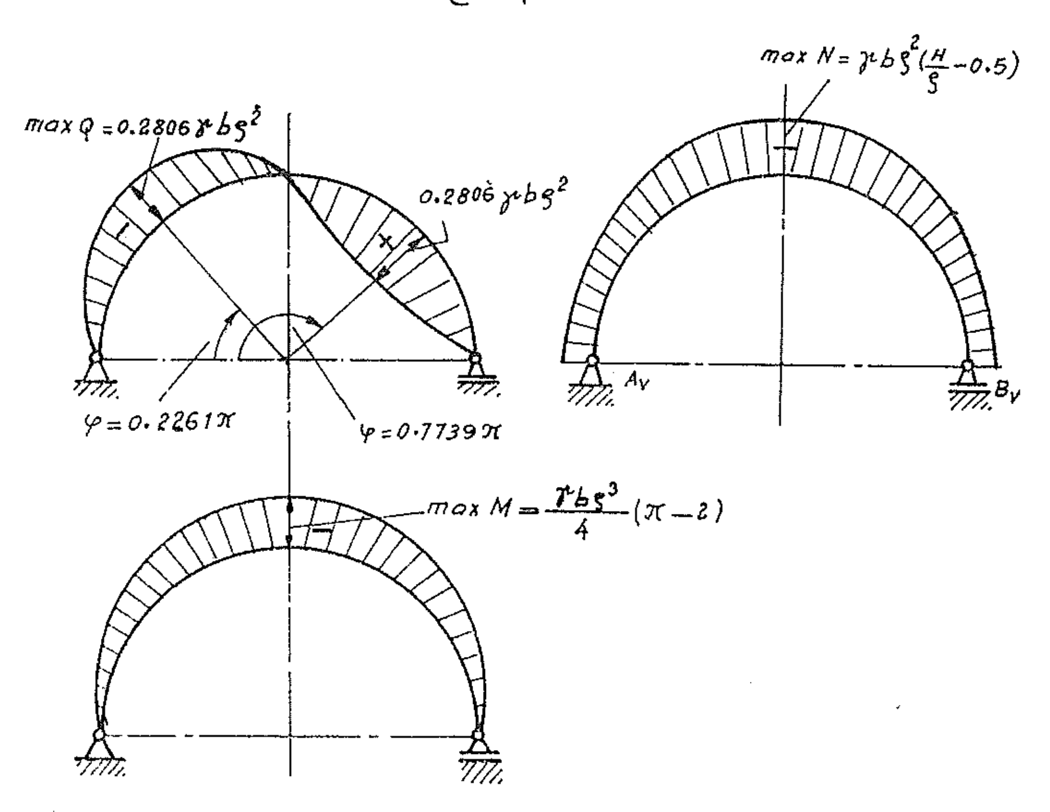
$$\max M = - \frac{\gamma \, b \, \rho^2}{4} (\pi - 2)$$

بينما تأخذ القوة العرضية قيمتها الاعظمية :

$$\max Q = \pm \, 0{,}2806 \, \gamma \, b \, \rho^2$$

عند النقاط $\varphi = 0,2261\ \pi$ و $\varphi = 0,7739\ \pi$.

لقد تم في الشكل (2-141) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-141

٢ ـ ١٢ أمثله على الطريقة العكسية .

يرمز لطريقة ايجاد مخطط القوة العرضية وتعيين الحمولات المؤثرة على الانشاءات بالاستعانة بمخطط عزم الانعطاف **بالطريقة العكسية** .

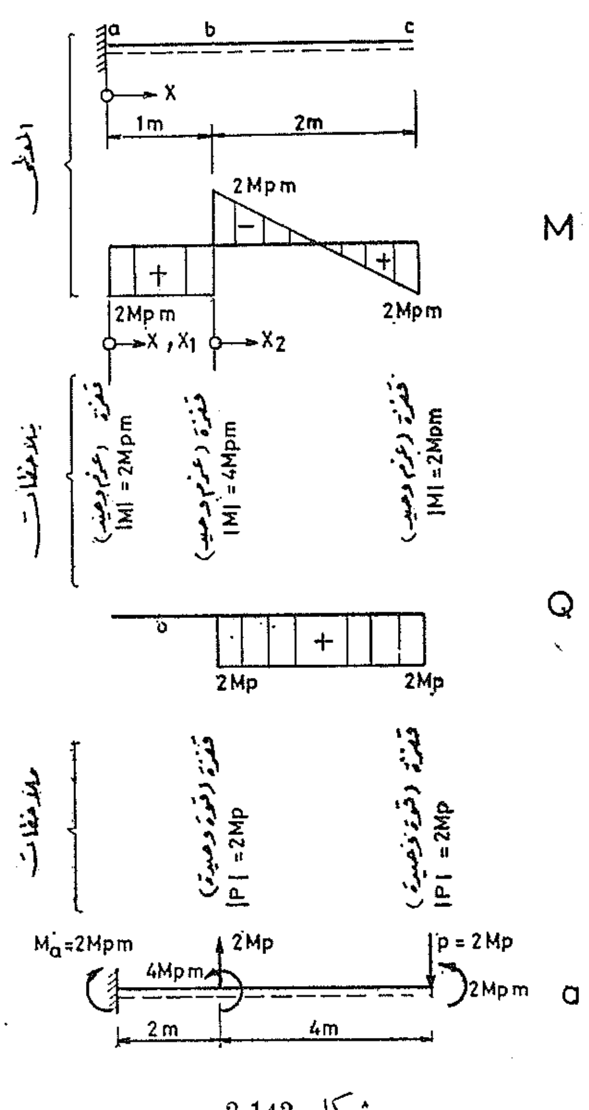
مثال 78 .

المعطى : أبعاد الجائز البارز (الظفر) الممثل في الشكل (2-142) ومخطط عزم الانعطاف M واتجاه المحور x والمنطقة المخططة .

المطلوب :

١ ـ **ايجاد مخطط القوة العرضية** Q .

٢ ـ تعيين الحمولات التي تؤثر على الجائز والتي تؤدي لتشكيل مخطط عزم الانعطاف المعطى ،



شكل 2-142

الحـل :

آ ـ تحديد المجالات :

حسب مخطط M فان الجائز يقسم الى مجالين ، الاول $0 \leqq x \leqq 1m$ والثاني $1m \leqq x \leqq 3m$.

ب ـ تعيين تابع Q و q لكل مجال بالاستعانة بالعلاقات التفاضلية .

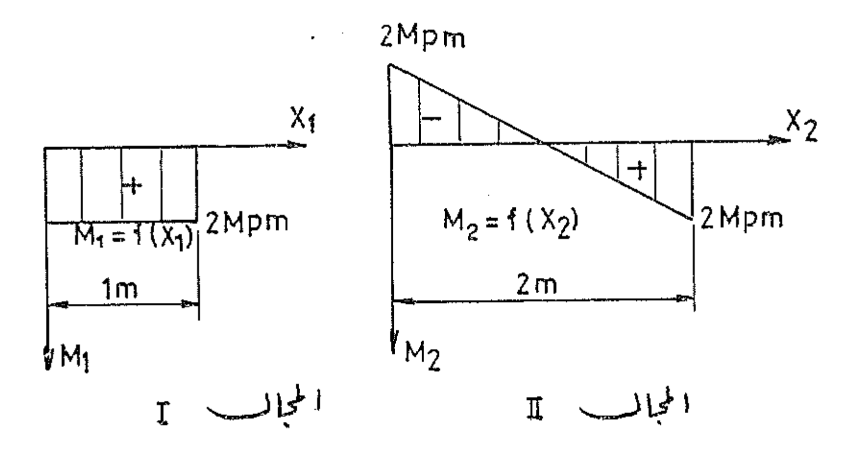
المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq 1m)$.

لقد اختير الاحداثي x_1 بشكل مناسب ويمكن ان يخالف اتجاهه اتجـاه الاحداثي X . فاذا تخالف الاحداثيان بالاتجاه وجب كتابة العلاقة التفاضلية بالشكل التالي :

$$\frac{d M_1}{d x} = - \frac{d M_1}{d x_1} = Q_1$$

من الشكل (2-143) يمكن الكتابة :

$$M_1 = + 2 \text{ Mpm} = \text{const}$$



شكل 2-143

باستخدام العلاقات التفاضلية ينتج :

$$\frac{d M_1}{d x_1} = + Q_1 = 0$$

$$\frac{d Q_1}{d x_1} = - q_1 = 0$$

تشير هذه العلاقة لعدم وجود قوى موزعة في هذا المجال .

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq 2 \text{ m})$.

من الشكل (2-143) يمكن الكتابة :

$$M_2 = - 2 + 2 x_2$$

$$\frac{d M_2}{d x_2} = Q_2 = 2$$

هذه العلاقة تشير الى وجود قوى وحيدة .

$$\frac{d\,Q_2}{dx_2} = -\,q_2 = 0$$

من هذه العلاقة يتبين ان المجال II لا يحتوي على قوى موزعة .

ج - رسم مخطط Q .

لقد تم في الشكل (2-142) رسم مخطط Q .

د - وضع ملاحظات على مخطط M و Q :

مثلا قفزة في مخطط M تعني تأثير عزم وحيد في تلك النقطة قيمتـــه المطلقة تســاوي طول القفزة . وقفزة في مخطط Q تعني تأثير قوة وحيدة في تلك النقطة قيمتها المطلقة تساوي طول القفزة والخ (شكل 2-142) .

هـ - تحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية .

لتحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية يقطع الجائز بعد حدوث القفزة مباشرة .

تفترض اتجاهات القيم المنقطة في البداية كيفياً ثم تحدد بعد ذلك بواسطة الحسابات .

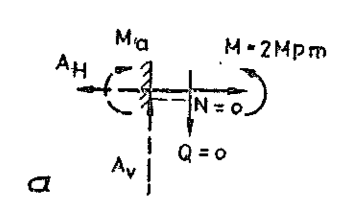
بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-144a) ينتج :

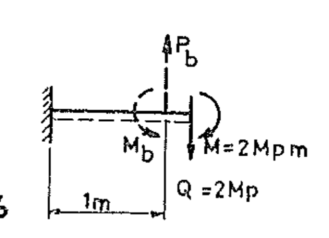
$$\Sigma H = 0 \;:\; A_H = 0$$

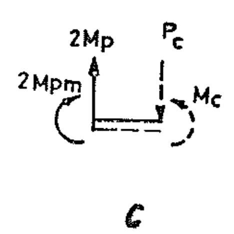
$$\Sigma V = 0 \;:\; A_v = 0$$

$$\Sigma M = 0 \;:\; M_a = +\,2\ \text{Mpm}$$

تؤكد الاشارة الموجبة صحة الاتجاه المختار للعزم M_a .







شكل 2-144

وبتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-144b) ينتج :

$$\Sigma V = 0 \quad : P_b = +\ 2\,Mp$$

$$\Sigma M_1 = 0 \quad : M_b = 2+2 = +\ 4\ Mpm$$

اما تطبيق شروط التوازن على القطع الايمن (شكل 2-144c) فيعطي :

$$\Sigma V = 0 \quad : P_c = +\ 2\ Mp$$

$$\Sigma M_2 = 0 \quad : M_c = +\ 2\ Mpm$$

و ـ الحمولات التي تؤثر على الجائز :

لقد تم في الشكل(2-142) تمثيل الحمولات التي تؤثر على الجائز .

مثال 79 :

المعطى : ابعاد الجائز البارز (الظفر) الممثل في الشكل(2-145) ومخطط عزم الانعطاف M (ان اشارة 0 في مخطط M تعني ان المنحني يحتوي في تلك النقطة على مماس افقي) واتجاه المحور x والمنطقة المخططة .

المطلوب :

١ ـ ايجاد مخطط القوة العرضية Q .

٢ ـ تعيين الحمولات التي ادت لتشكيل مخطط عزم الانعطاف المعطى .

الحل :

أ ـ تحديد المجالات :

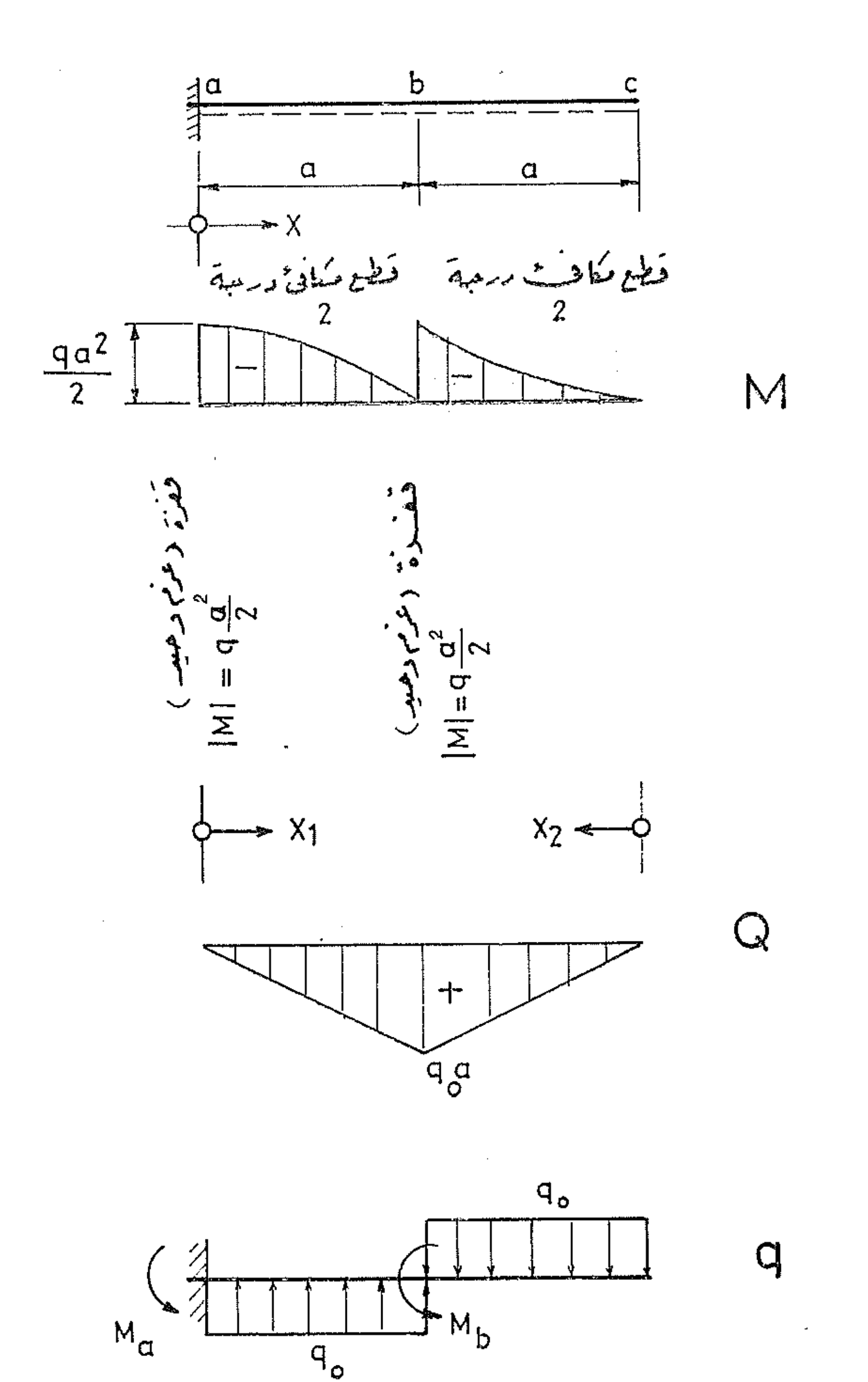
يقسم الجائز لمجالين ، الاول $0 \leqq x \leqq a$ والثاني $a \leqq x \leqq 2a$.

ب ـ تعيين معادلات Q , q لكل مجال باستخدام العلاقات التفاضلية :

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq a)$ (شكل 2-146) .

معادلة القطع المكافيء من الدرجة الثانية العامة :

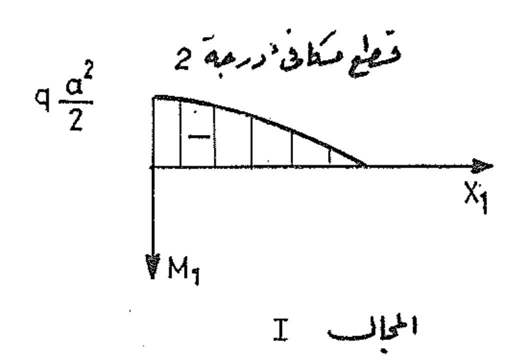
$$M_1 = C_1\ x_1^2 + C_2\ x_1 + C_3$$

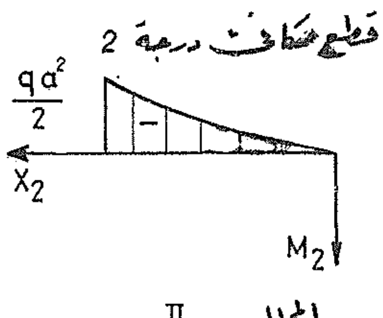


شكل 2-145

شروط الاطراف اللازمة لتعيين الثوابت C_1, C_2 , C_3 :

$$M_1'(x_1 = 0) = 0 \quad : \; C_2 = 0$$





شكل 2-146

$$M_1\ (x_1 = 0) = -\frac{q_0\ a^2}{2}\ :\ C_3 = -\frac{q_0\ a^2}{2}$$

$$M_1\ (x_1 = a) = 0\quad :\quad C_1 = \frac{q_0\ a^2}{2\ a^2} = +\frac{q_0}{2}$$

بتبديل قيم الثوابت في المعادلة العامة ينتج :

$$M_1 = \frac{q_0}{2}\ x_1{}^2 - \frac{q_0\ a^2}{2}$$

يعطي استخدام العلاقات التفاضلية ما يلي :

$$\frac{d\ M_1}{dx_1} = Q_1 = +\ q_0\ x_1$$

($+Q_1$ لان $x\ ,\ x_1$ لهما نفس الاتجاه) .

$$x_1 = 0\ \ :\ \ Q_1 = 0$$
$$x_1 = a\ :\ \ Q_1 = +\ q_0 a$$

$$\frac{dQ_1}{dx_1} = -\ q = q_0$$

تشير هذه العلاقة لوجود حمولة موزعة بانتظام شدتها q_0 وتتجه للاعلى (بعكس اتجاه z) .

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq a)$ (شكل 2-146) :

أن معادلة عزم الانعطاف الممثلة بقطع مكافىء من الدرجة الثانية هي :

$$M_2 = C_4 x_2^2 + C_5 x_2 + C_6$$

لقد اختير اتجاه x_2 كما هو مبين في الشكل (2.145) لانعدام اغلب الثوابت .

شروط الاطراف اللازمة لتعيين الثوابت C_4 , C_5 , C_6 :

$$M_2 (x_2 = 0) = 0 : C_6 = 0$$

$$M_2' (x_2 = 0) = 0 \quad : \quad C_5 = 0$$

$$M_2(x_2 = a) = - \frac{q_0 a^2}{2} : C_4 = - \frac{q_0}{2}$$

بتبديل قيم الثوابت في المعادلة العامة يتم الحصول على العلاقة النهائية التالية :

$$M_2 = - \frac{q_0}{2} x_2^2$$

بالاستعانة بالعلاقات التفاضلية يتم الحصول على المعادلات المطلوبة :

$$\frac{d M_2}{dx_2} = - Q_2 = - q_0 x_2$$

($-Q_2$ لان اتجاه x_2 يعاكس اتجاه x) .

$$x_2 = 0 \quad : \quad Q_2 = 0$$

$$x_2 = a \quad : \quad Q_2 = q_0 a$$

$$\frac{d Q_2}{dx_2} = + q_2 = - q_0$$

($+q_2$ لان اتجاه x_2 يعاكس اتجاه x) . تشير هذه العلاقة لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها q_0 وتتجه للاسفل .

ج - رسم مخطط Q

لقد تم في الشكل (2-145) رسم مخطط Q .

د - تحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية التي تؤثر على الجائز .

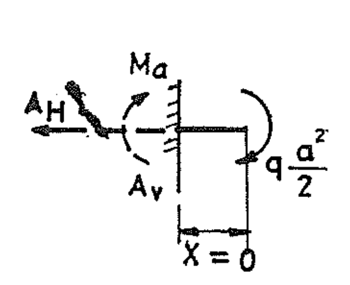
بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-147) ينتج :

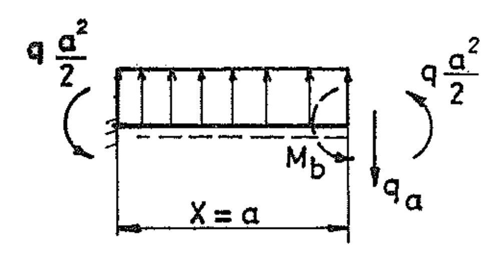
$$\Sigma H = 0 \; : \; A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; A_v = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \; : \; M_a = -\frac{q_0 a^2}{2}$$

(اشارة السالب تعني ان الاتجاه المفروض للعزم Ma غير صحيح) .





شكل 2-147

وبتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-147) ينتج :

$$\Sigma V = 0 \; : \; q_0 a - q_0 a = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \; : \; M_b + \frac{q_0 a^2}{2} - \frac{q_0 a^2}{2} - q_0 a \frac{a}{2} = 0 \; : \; M_b = +\frac{q_0 a^2}{2}$$

(اشارة الموجب تعني ان الاتجاه المفروض للعزم M_b صحيح) .

هـ ـ الحمولات التي تؤثر على الجائز

لقد تم في الشكل (2-145) تمثيل الحمولات التي تؤثر على الجائز .

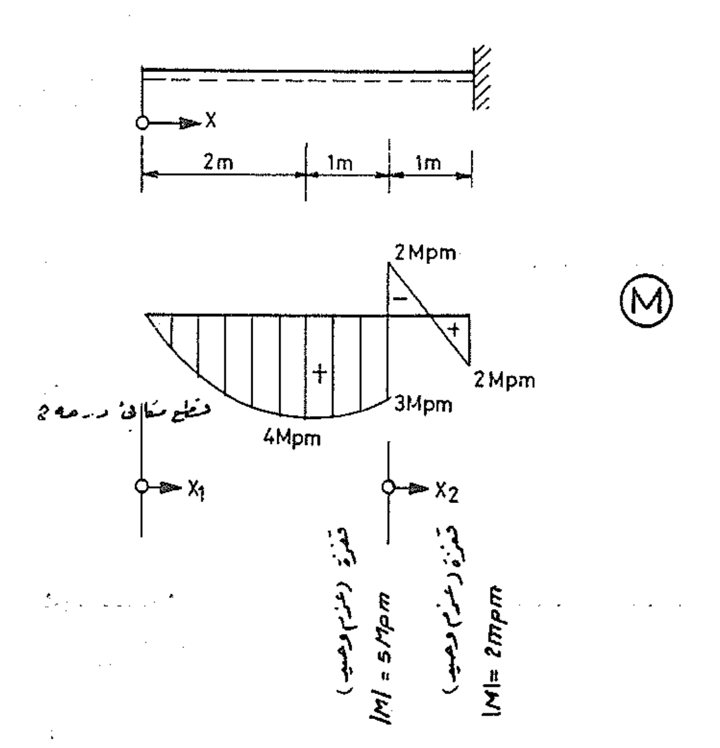
مثال 80 :

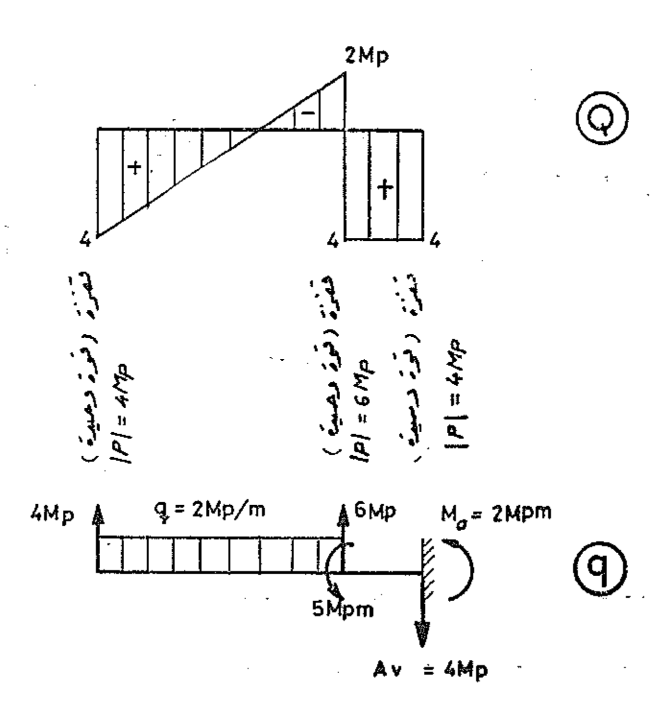
المعطى : ابعاد الجائز البارز (الظفر) الممثل في الشكل (2-148) ومخطط عزم الانعطاف واتجاه المحور x والمنطقة المخططة .

المطلوب :

١ ـ ايجاد مخطط Q (القوة العرضية) .

٢ ـ تعيين الحمولات التي تؤثر على الجائز والتي تؤدي لتشكل عزم الانعطاف المعطى .


2m
1m
1m
2Mpm
2Mpm
3Mpm
4Mpm
X
X_1
X_2
|M| = 5Mpm
|M|= 2mpm


2Mp
4
4
4
|P| = 4Mp
|P| = 6Mp
|P| = 4Mp
4Mp
q = 2Mp/m
6Mp
M_a = 2Mpm
5Mpm
Av = 4Mp

شكل 2-148

الحل

أ ـ تحديد مجالات الجائز

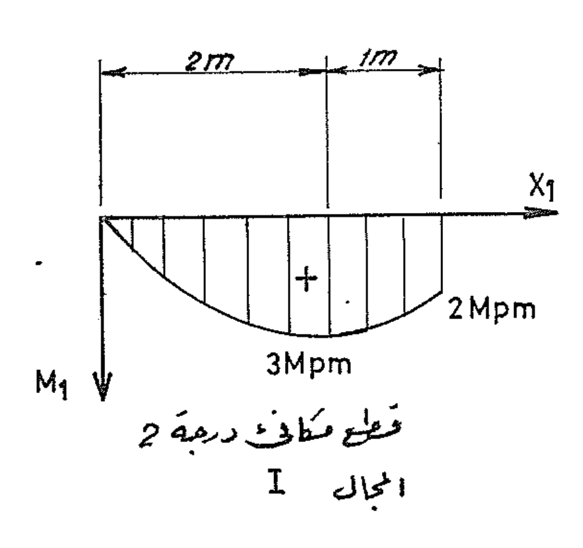
يتألف الجائز من مجالين . الاول $0 \leqq x \leqq 1\ m$ والثاني $1\ m \leqq x \leqq 4m$.

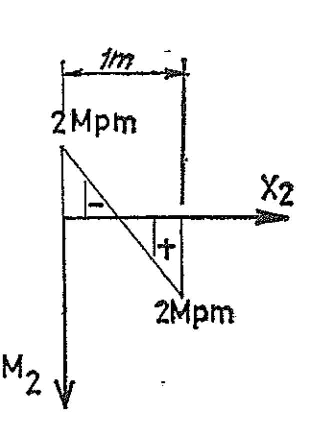
ب ـ تعيين معادلات Q , q لكل مجال وذلك بالاستعانة بالعلاقات التفاضلية :

المجال $(0 \leqq x_1 \leqq 3m)$ (شكل 2-149) :

معادلة القطع مكافىء من الدرجة الثانية العامة :

$$M_1 = C_1 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3$$





شكل 2-149

شروط الاطراف لتعيين الثوابت C_1 , C_2 , C_3 :

$$M_1 (x_1 = 0) = 0 \quad : \quad C_3 = 0$$

$$M_1 (x_1 = 2m) = 4Mpm : 4 C_1 + 2 C_2 = 4$$

$$M_1 (x_1 = 3m) = 3Mpm : 9 C_1 + 3C_2 = 3$$

بحل مجموعة المعادلات ينتج :

$$C_1 = -1 \quad , \quad C_2 = +4 \quad , \quad C_3 = 0$$

بتبديل قيم الثوابت في المعادلة العامة للقطع المكافىء يتم الحصول على معادلة عزم الانعطاف :

$$M_1 = -x_1^2 + 4x_1$$

وبالاشتقاق ينتج :

$$\frac{dM_1}{dx_1} = +Q_1 = -2x_1 + 4$$

($+Q_1$ لتطابق اتجاه x_1 مع اتجاه x) .

$$x_1 = 0 \quad : Q_1 = 4 \quad Mp$$

$$x_1 = 3m : Q_1 = -2 \; Mp$$

$$\frac{dQ_1}{dx_1} = -q_1 = -2$$

هذا يعني ان قوة موزعة بانتظام شدتها 2 Mp/m تؤثر في هذا المجال .

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq 1m)$ (شكل 2-149) :

$$M_2 = -2 + 4x_2$$

$$\frac{dM_2}{dx_2} = Q_2 = 4$$

$$\frac{dQ_2}{dx_2} = -q_2 = 0$$

(تشير هذه العلاقة لعدم وجود حمولة موزعة) .

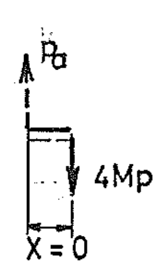
ج ـ رسم مخطط Q

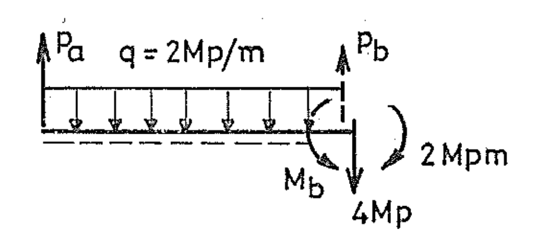
لقد تم في الشكل (2-148) تمثيل مخطط القوة العرضية ، كما وقد تم وضع بعض الملاحظات الهامة عليه وعلى مخطط M .

د ـ تحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية التي تؤثر على الجائز :

بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-150) ينتج :

$$\Sigma V = 0 \; : \; P_a = +4 \; Mp$$





شكل 2-150

ويعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-150) مايلي :

$$\Sigma V = 0 : - P_b + 4 + 2 . 3 - 4 = 0 \quad : P_b = 6\ Mp$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_b - 2 + 2.\ 3.\ \frac{3}{2} - 4.3 = 0 : \ M_b = +5\ Mpm$$

اما تطبيق شروط التوازن على القطع الايمن (شكل 2-150) فيعطي :

$$\Sigma V = 0 : A_v = +4\ Mp$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_a = +2\ M\ pm$$

هـ ـ الحمولات التي تؤثر على الجائز

لقد تم في الشكل (2-148) تمثيل الحمولات التي تؤثر على الجائز .

مثال 81 :

المعطى : ابعاد الجائز ممتد الاطراف (شكل 2-151) ومخطط عزم الانعطاف واتجـاه المحور x والمنطقة المخططة .

المطلوب :

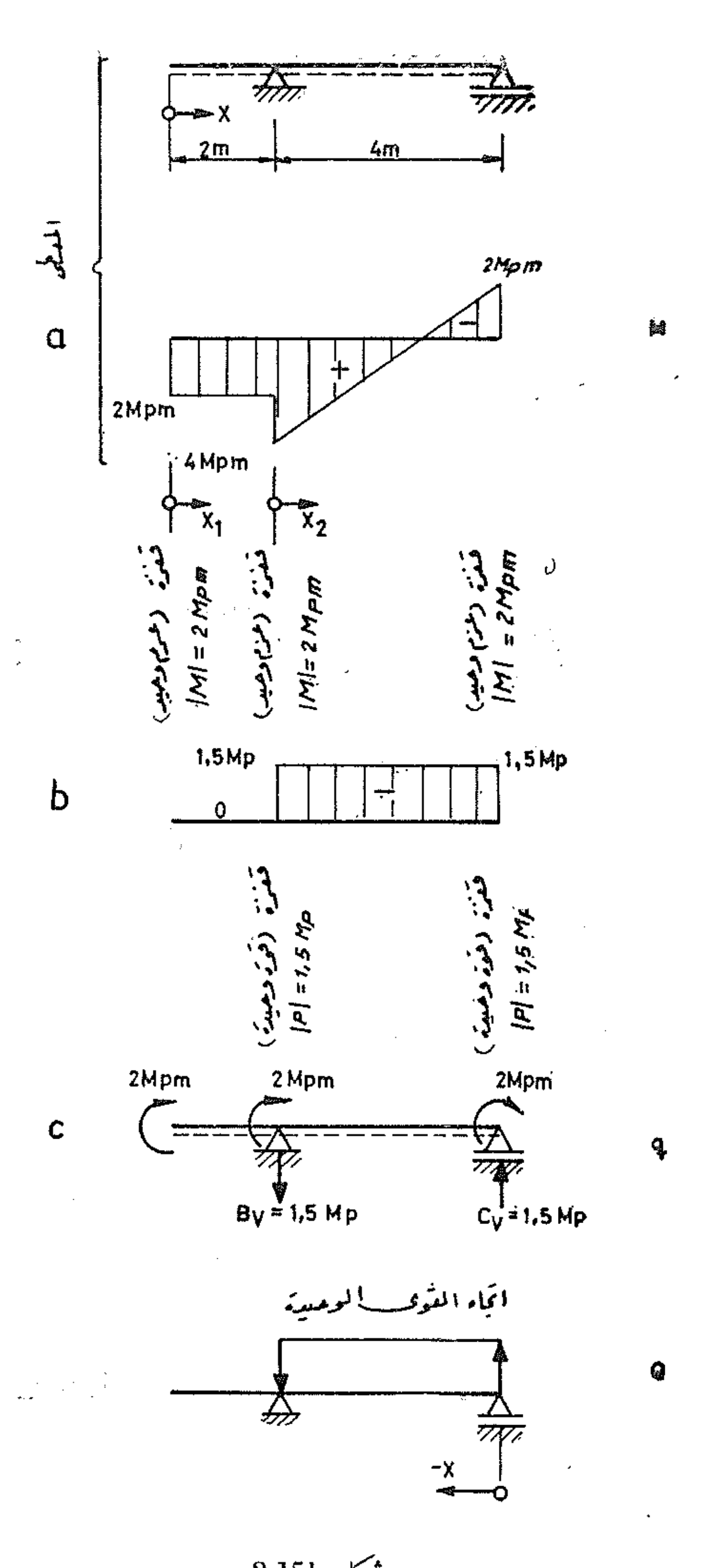
١ ـ ايجاد مخطط القوة العرضية Q .

٢ ـ تعيين الحمولات التي تؤثر على الجائز والتي ادت لتشكل مخطط M المعطى .

الحل :

أ ـ تحديد مجالات الجائز

حسب مخطط M فان الجائز يتألف من مجالين . الاول $0 \leqq x \leqq 2m$ والثاني $2m \leqq x \leqq 6m$.

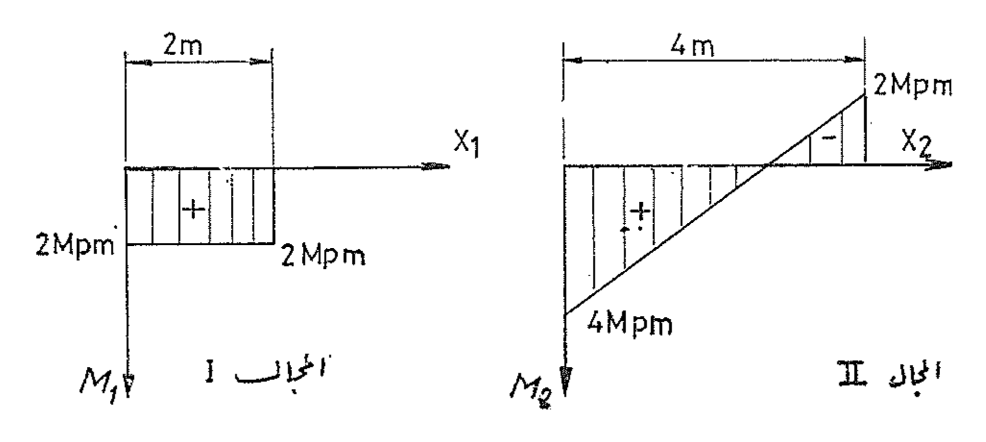

X
2m
4m
a
2Mpm
2Mpm
4Mpm
M
X_1
X_2
$|M| = 2 Mpm$
$|M| = 2 Mpm$
$|M| = 2 Mpm$
b
1,5Mp
0
1,5Mp
$|P| = 1,5 Mp$
$|P| = 1,5 Mp$
c
2Mpm
2 Mpm
2Mpm
q
$B_V = 1,5$ Mp
$C_V = 1,5$ Mp
اتجاه القوى الوحيدة
Q
-X

شكل 2-151

ب ـ تعيين معادلات q و Q لكل مجال وذلك باستخدام العلاقات التفاضلية .

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq 2m)$ (شكل 2-152) :

$$M_1 = +2 \text{ Mpm} = \text{const.}$$



شكل 2-152

بالاشتقاق المزدوج يتم الحصول على ما يلي

$$\frac{dM_1}{dx_1} = Q_1 = 0$$

$$\frac{dQ_1}{dx_1} = -q_1 = 0$$

(هذه العلاقة تشير لعدم وجود حمولات موزعة) .

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq 4 \text{ m})$ (شكل 2-152):

$$M_2 = 4 - \frac{6}{4} x_2 = 4 - 1,5 \, x_2$$

بالاشتقاق المزدوج ينتج:

$$\frac{dM_2}{dx_2} = Q_2 = -1,5 \text{ Mp}$$

$$\frac{dQ_2}{dx_2} = -q_2 = 0$$

تشير هذه العلاقة لعدم وجود حمولات موزعة .

ج - رسم مخطط Q

لقد تم في الشكل (2-151) رسم مخطط Q . كما وقد تم وضع ملاحظات هامة على مخطط M و Q .

د - تحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية التي تؤثر على الجائز .

لقد تم في الشكل (2-151) تحديد اتجاه القوى الوحيدة تخطيطياً.

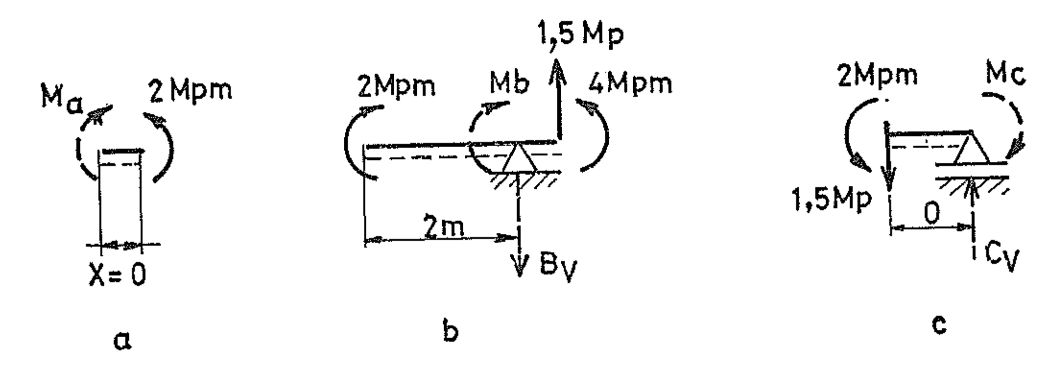
بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر شكل (2-153p) ينتج :

$$\Sigma M_x = 0 : M_a = + 2 \text{ Mpm}$$

اما تطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-153) فيعطي :

$$\Sigma V = 0 : B_v = 1{,}5 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_b = 2{,}0 \text{ Mpm}$$



شكل 2-153

كما يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الايمن (شكل 2-153c) مايلي :

$$\Sigma V = 0 : C_V = 1{,}5 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_c = 2{,}0 \text{ Mpm}$$

هـ ـ الحمولات التي تؤثر على الجائز

لقد تم في الشكل (2-151) رسم الحمولات التي تؤثر على الجائز .

مثـال 82 :

المعطى : ابعاد الجائز المفصلي الممثل في الشكل (2-154) ومخطط عزم الانعطاف M واتجـاه المحور x والمنطقة المخططة .

المطلوب

١ – ايجاد مخطط القوة العرضية Q .

٢ ـ تعيين الحمولات التي تؤثر على الجائز والتي تؤدي لتشكيل مخطط عزم الانعطاف المعطى .

الحـل

١ ـ تحديد مجالات الجائز:

يتألف الجائز من اربعة مجالات، الاول $0 \leqq x \leqq 2\,m$ والثاني $2m \leqq x \leqq 5m$ والثالث $5m \leqq x \leqq 7m$ والرابـع $7m \leqq x \leqq 9m$.

ب ـ تعيين معادلات q و Q لكل مجال وذلك باستخدام العلاقات التفاضلية :

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq 2m)$ (شكل 2-155a) :

$$M_1 = C_1 + C_2\, x_1 = -20 - \frac{30-20}{2}\, x_1 = -20 - 5\, x_1$$

$$\frac{d M_1}{dx_1} = +Q_1 = -5$$

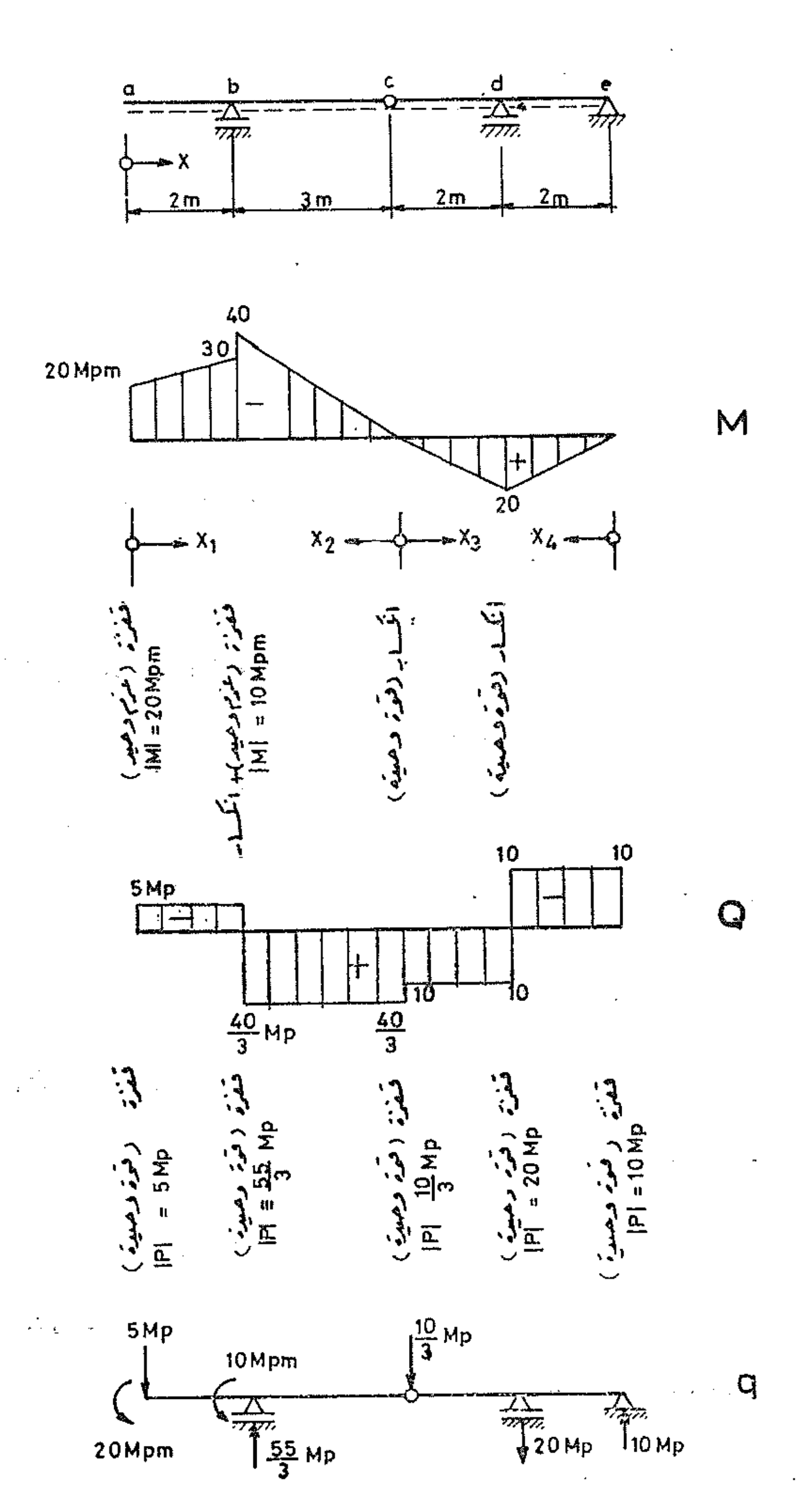
$$\frac{dQ_1}{dx_1} = -q_1 = 0$$

تشير هذه العلاقة لعدم وجود حمولة موزعة في هذا المجال .

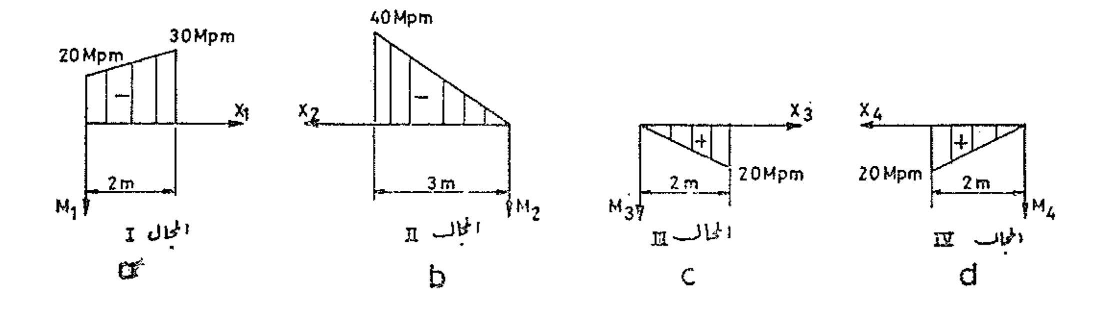
المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq 3m)$ (شكل 2-155b) :

$$M_2 = -\frac{40}{3}\, x_2$$

$$\frac{dM_2}{dx_2} = -Q_2 = -\frac{40}{3}\,Mp \quad : \quad Q_2 = \frac{40}{3}\,Mp$$



شكل 2-154



شكل 2-155

(Q_2 – لتعاكس اتجاه x_2 واتجاه x) .

$$\frac{dQ_2}{dx_2} = + q_2 = 0$$

($+q_2$ لتعاكس اتجاه x_2 واتجاه x) .

من هذه العلاقة يتبين ان هذا المجال لا يحتوي على حمولة موزعة .

المجال III $(0 \leq x_3 \leq 2\ m)$ (شكل 2-155c) :

$$M_3 = \frac{20}{2} x_3 = 10\ x_3$$

$$\frac{dM_3}{dx_3} = + Q_3 = 10\ Mp$$

(Q_3 + لان x_3 باتجاه x) .

$$\frac{dQ_3}{dx_3} = - q_3 = 0$$

(q_3 – لان x_3 باتجاه x) . تشير هذه العلاقة لعدم وجود حمولة موزعة في هذا المجال .

المجال IV $(0 \leqq x_4 \leqq 2m)$ (شكل 2-155d) :

$$M_4 = + \frac{20}{2} x_4 = + 10\ x_4$$

$$\frac{dM_4}{dx_4} = - Q_4 = + 10\ Mp\ :\ Q_4 = -10\ Mp$$

$$\frac{dQ_4}{dx_4} = + q_4 = 0$$

تشير هذه المعادلة لعدم وجود حمولة موزعة .

ج - رسم مخطط Q :

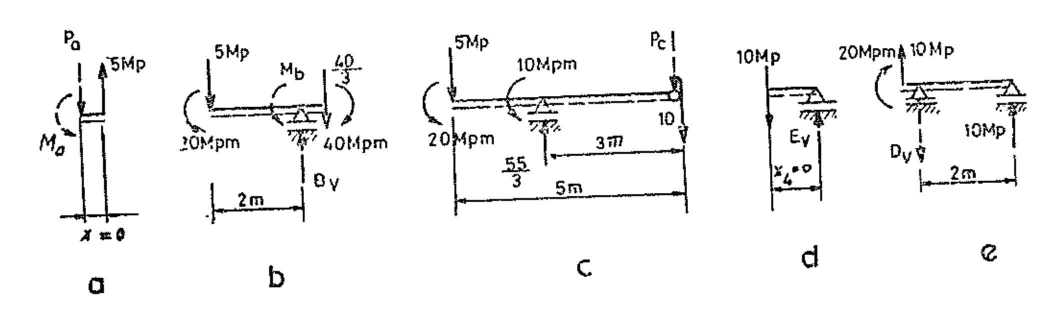
لقد تم في الشكل (2-154) رسم مخطط Q . كما وقد تم وضـــع ملاحـظات على كل من مخططي M و Q .

د - تحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية التي تؤثر على الجائز :

يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شـكل 2-156a) العلاقات التالية:

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad P_a = 5 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad : \quad M_a = 20 \text{ Mpm}$$



شكل 2-156

كما يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-156b) ما يلي :

$$\Sigma V = 0 \; : \; B_v = 5 + \frac{40}{3} = \frac{55}{3} \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 \; : \; M_b = 40 - 20 - 5 \,.\, 2 = 10 \text{ Mpm}$$

اما تطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شـكل 2-156c) فيعطي مايلي:

$$\Sigma V = 0 \; : \; P_c = -10 - 5 + \frac{55}{3} = \frac{10}{3} \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 \; : \; 10 + 20 + 5.5 - \frac{55}{3} 3 = 0$$

وتعطي شروط التوازن المطبقة على القطع الايمن (شكل 2-156d) مايلي :

$$\Sigma V = 0 \;:\; E_v = 10 \text{ Mp}$$

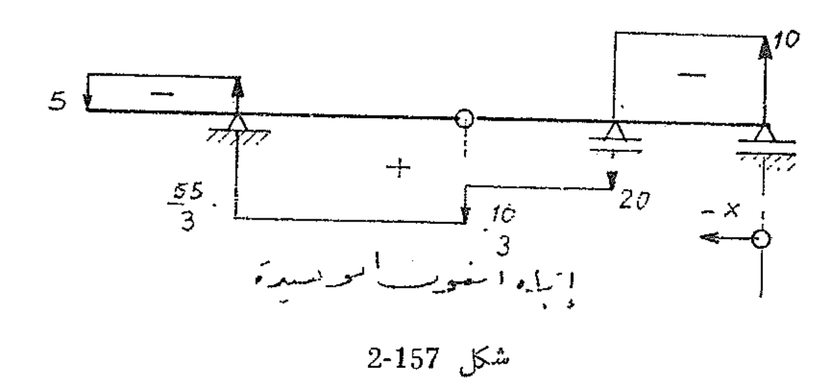
وبتطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن المقطوع (شكل 2-156e) ينتج :

$$\Sigma V = 0 \;:\; D_v = 10 + 10 = 20 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 \;:\; -20 + 10 \,.\, 2 = 0$$

Q ـ الحمولات التي تؤثر على الجائز

لقد تم في الشكل (2-154) تمثيل الحمولات التي تؤثر على الجائز . ولقد تم في الشكل (2-157) تحديد اتجاه القوى الخارجية تخطيطياً .



شكل 2-157

٢ ـ ١٣ قانون التنضد (قانون جمع الآثار):

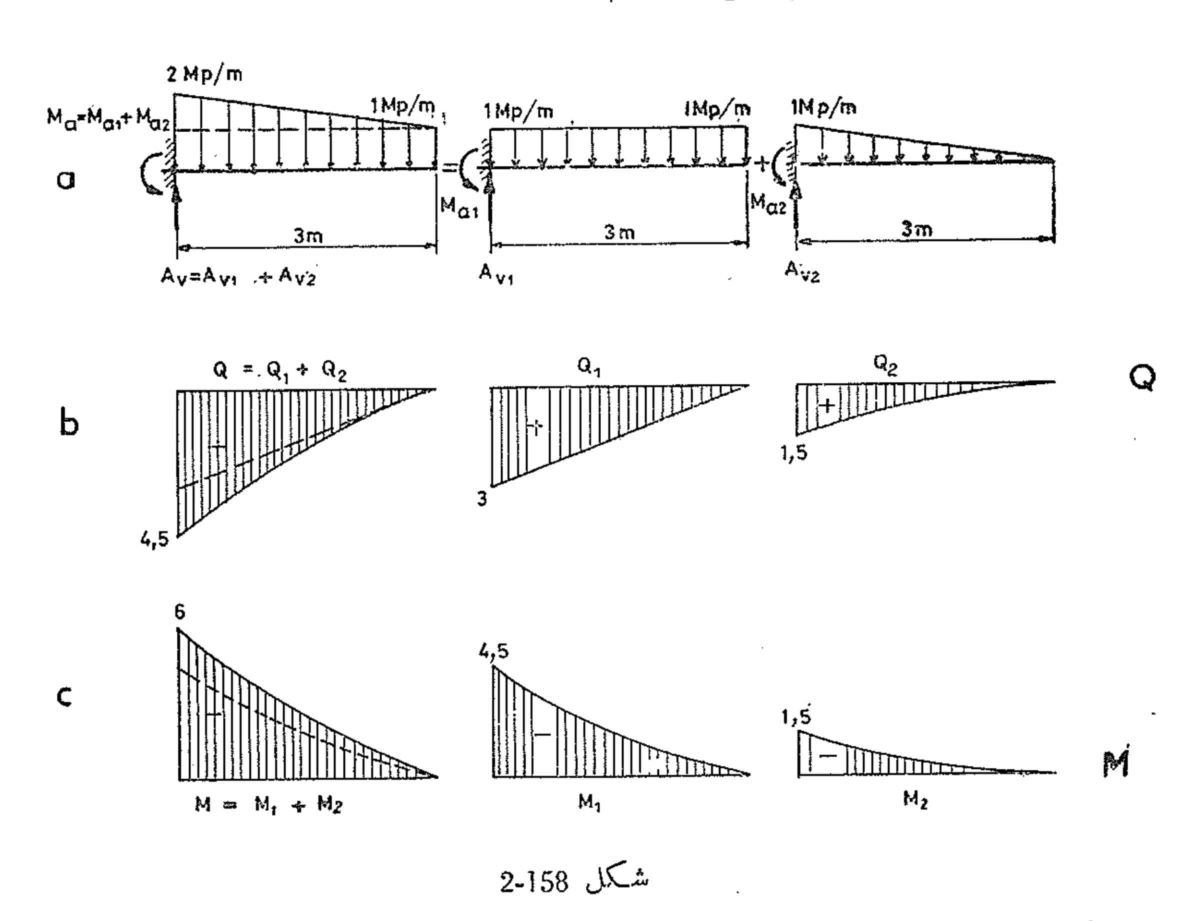
ينص قانون التنضد (Supperpositionsgesetz) على مايلي :

ان شكل القوى العرضية او عزوم الانعطاف او اية قيم اخرى الناتجة عن مجموعتين او اكثر من الحمولات يساوي الشكل الناتج عن اضافة القوى العرضية او عزوم الانعطاف او اية قيم ما المتولدة عن كل مجموعة من هذه الحمولات على حدة . ومن الممكن ايضاً ان يعبر عن قانون التنضد تخطيطياً كما يلي :

ان شكل المنحني الذي تكون معادلته مكونة من مجموع دالتين او اكثر يمكن رسمه بجمع منحنيات كل دالة على حدة .

مثـال 83 :

حمل جائز بارز (ظفر) بحمولة موزعة على شكل شبه منحرف (شكل 2-158) .
المطلوب : ايجاد مخططات قيم القطع باستخدام قانون التنضد .



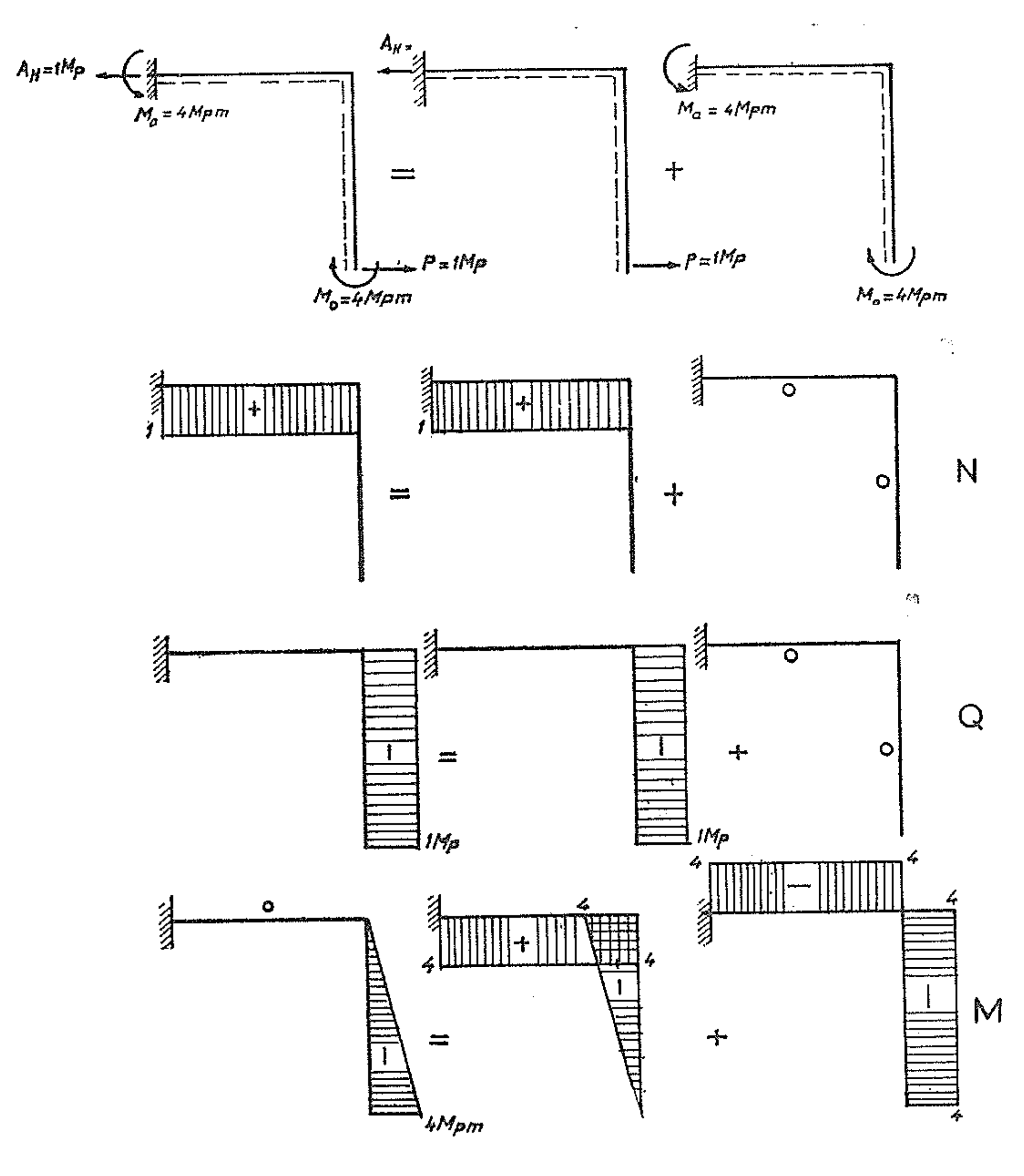
شكل 2-158

الحـــل :

باستخدام قانون التنضد تعاد الحمولة الى مجموع حمولتين ، الاولى هي حمولة موزعة بانتظـام شدتها 1 Mp/m والثانية هي حمولة خطية شدتها الاعظمية 1 Mp/m (يعاد شبه المنحرف الى مستطيل ومثلث) . ان مخططات القوة العرضية وعزم الانعطاف لـكل من الحمولتين معلومة ويسهل رسمها بدقة . للحصول على مخططات قيم القطع الناتجة عن تأثير حمولة على شكل شـبه منحرف تجمع مخططات قيم القطع الناتجة عن تأثير الحمولتين الجزئيتين هنا المستطيلة والمثلثية (شكل 2-158) .

مثال 84 :

المعطى : جائز بارز مضلع الشكل (شكل 2-159) محمل بحمولة مؤلفة من قوة وحـــيدة P وعزم وحيد M وابعاد الجائز .



شكل 2-159

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع باستعمال قانون التنضد .

الحل :

باستخدام قانون التنضد يتم الحصول على قيم القطع المطلوبة (شكل 2-159) .

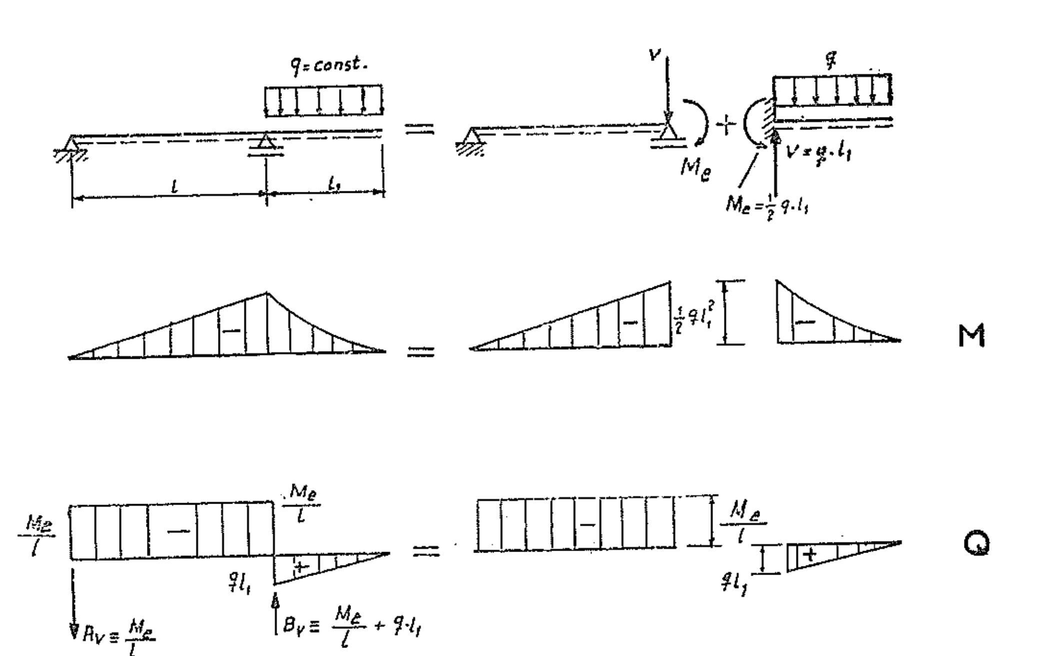
مثـال 85 :

المعطى : جائز ممتد الاطراف (شكل 2-160) وابعاده وشدة الحمولة الموزعة بانتظام q الـتي تؤثر على جزءه البارز .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

باستخدام قانون التنضد يعاد الجائز الممتد الى جائز بسيط وجائز بارز . تؤثر علاوة على الحمولة الفعلية ، قيم القطع التي نشأت نتيجة لفصل الجائز وهي V و M_e والتي ستعتبر بعد القطع كحمولة خارجية تؤثر بشكل متعاكس على الجائزين الجزئيين . اما ردود افعال المساند وقيم القطع في الجائزين الجزئيين فقد تم ايجادها في امثلة سابقة (شكل 160-2) .



شكل 160-2

٢ ـ ١٤ الجيزان الشبكية المستوية

٢ ـ ١٤ ـ ١ عموميات وتعاريف

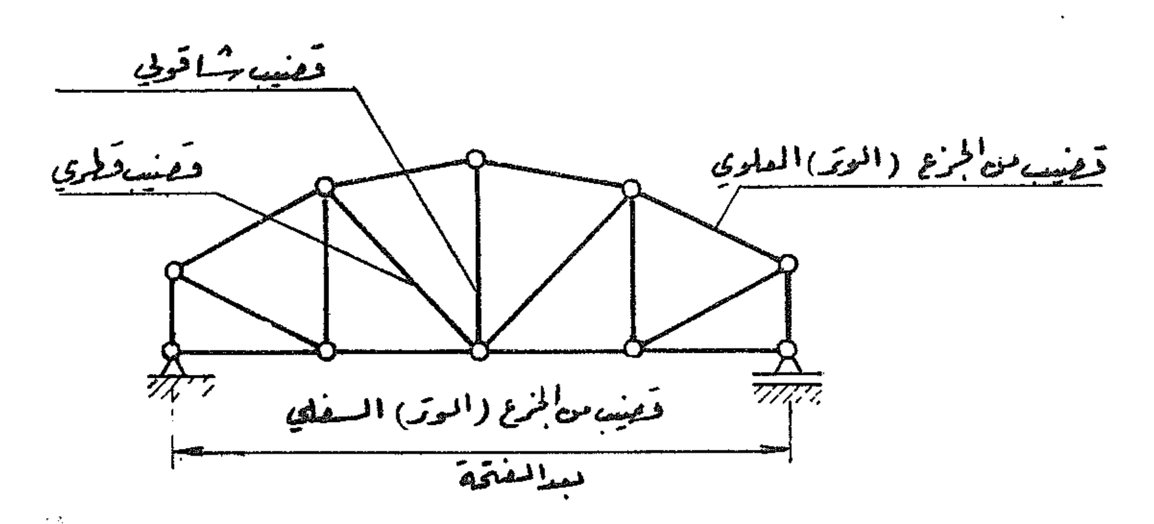
يمكن مبدئياً تعريف **الجيزان الشبكية** (التي يطلق عليها ايضاً اسم **الشبكيات** ويقصد فيها الجيزان الشبكية المثالية) بأنها الانشاءات التي تتكون من مجموعة من القضبان ذات المحاور المستقيمة التي تقع في مستو واحد والتي تتصل اطرافها بعضها ببعض اتصالا مفصلياً بحيث تعطي انشاءاً متماسكاً ، وتبدو الجيزان الشبكية كانها غزل مفصلي ويطلق على هذا النوع من الانشاءات اسماء اخرى الى جانب الجيزان الشبكية او الشبكيات فتسمى احيانا جمالونات وخاصة فيما يستعمل

منها للسقوف . اما الوظيفة الرئيسية للجائز الشبكي فهي كوظيفة الجائز القضيبي ، عبور الفراغات (اجتياز وادي او أنهر مثلاً) وحمل الحمولات .

لقد تم في الفصول السابقة الاصطلاح على تسمية الجيزان المبحوثة هناك بالجيزان القضيبية (الجيزان ذات الجدار أو ذات الجسد المليء) وذلك للتفريق بينها وبين الجائز الشبكي الذي ستتم دراسته في هذه الفقرة .

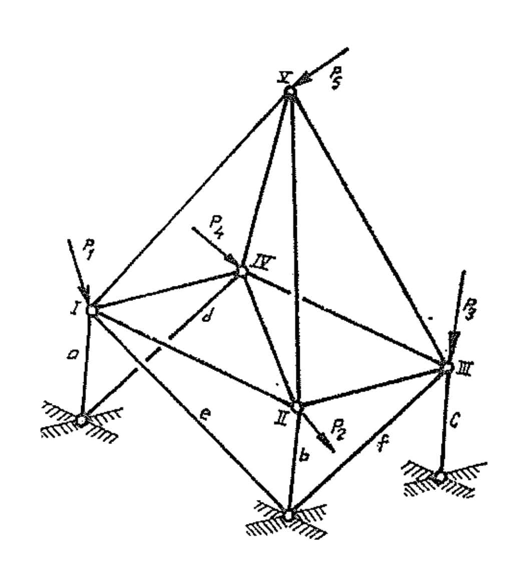
يسمى الجائز ، على العموم ، قضيبياً عندما توجد فيه امكانية تشكل قوى ناظمية N وقوى عرضية Q وعزوم انعطاف M ويسمى شبكياً عندما توجد فيه امكانية تشكل قوى ناظمية فقط والتي تسمى حينئذ **بقوى القضبان** (ولذلك يمكن اعتبار الجائز الشبكي حالة خاصة للجائز القضيبي حيث لا تتحمل عناصره الا قوى ناظمية فقط) .

تسمى مجموعة القضبان التي تشكل المحيط الخارجي للجائز الشبكي ، ما عدا القضبان الشاقولية الموجودة على النهاية اليمنى واليسرى ، **بقضبان الجزع او قضبان الوتر** ويسمى محورها(الاوسط) **بالجزع او الوتر** ، تشكل القضبان العلوية للجزع ما تسمى **بقضبان الجزع العلوي** او **قضبان الوتر العلوي** اما محاورها (الوسطى) فتسمى **بالجزع العلوي او الوتر العلوي** وتشكل القضبان السفلية للجزع ما يسمى **بقضبان الجزع السفلي** او **قضبان الوتر السفلي** اما محاورها (الوسطى) فتسمى **بالجزع السفلي** او **الوتر السفلي** تقع ما بين قضبان الجزع (العلوي والسفلي) **قضبان الحشوة** التي تتألف من قضبان قطرية وقضبان شاقولية (شكل 161-2).يطلق على نقاط اتصال القضبان (قضيبان او اكثر) إسم **عقد** الجائز الشبكي . يبين الشكل (161-2) مثالا لتركيب شبكي بسيط والاسماء التي تطلق عادة على اجزائه المختلفة .



شكل 161-2

لقد ظهرت العقد (نقاط الاتصال) في الرسم على شكل دوائر لتؤكد حقيقة الاتصـال المفصلي عندها ، ولن يلتزم دائماً بهذه الطريقة عند رسم الشبكيات في الاشكال التالية . ومع ان اعضاء التركيب الشبكي تتكون عادة من مقاطع عرضية مركبة من الفولاذ مثلا ، إلا انــه سيطلق على كل منها اسم **قضيب** لسهولة التسمية . اذا وقعت كافة قضبان الجائز الشبـــكي في مستوي واحد عندئذ يقال عنه انه **جائز شبكي مستوي** اما اذا لم تقـع كافة القضبان في نفس المستوي عند ذلك يقال عنه انه **جائز شبكي فراغي** (شكل 2-162) .



شكل 2-162

تشتمل الجيزان الشبكية على انواع كثيرة يفرق بينها :

آ ـ **حسب اشكال الجزع(الوتر) الى ما يلي :**

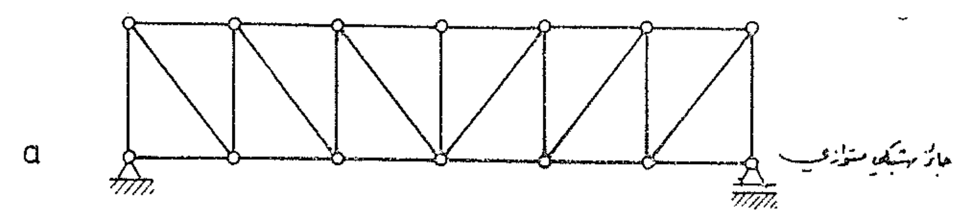
جائز شبكي متوازي (شكل 2-163 a) : اذا كان الجزع (الوتر) العلوي والجزع السفلي متوازيين . **جائز شبكي مثلثي** (شكل 2-163 c) : اذا وقعت عقد احد الجزعين على اضلاع مثلث . **جائز شبكي على شكل قطع مكافىء** (شكل 2-163 b) : اذا وقعت عقد احــــد الجزعين على محيط قطع مكافىء (اذا وقعت ، على سبيل المثال ، عقد الجزع العلوي على محيط قطع مكافىء ووقعت عقد الجزع السفلي على مستقيم) .

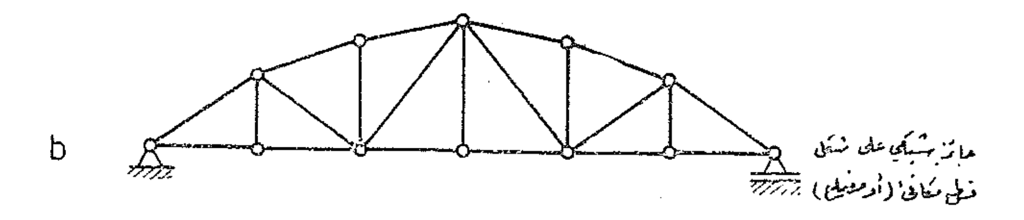
ب ـ **او حسب اشكال تركيب القضبان القطرية الى :**

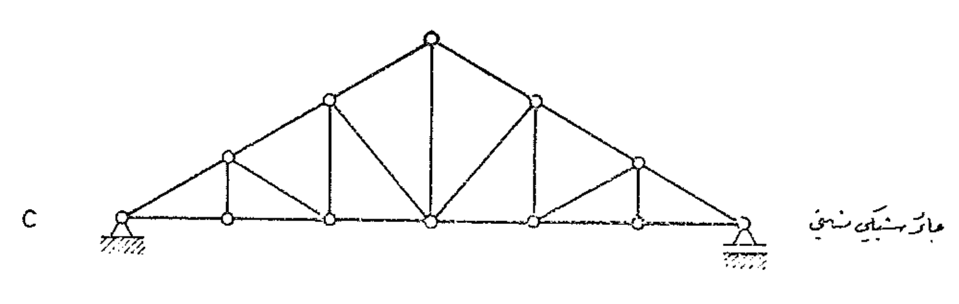
جائز شبكي مثلثي بدون قضبان شاقولية : (شكل 2-164 a) .

جائز شبكي **مثلثي بقضبان شاقولية** (شكل 2-164b,c).

الجيزان الشبكية حسب شكل الجزع







شكل 2-163

جائز شبكي على **شكل حرف** K (شكل 2-164d) .

جائز شبكي **معيني** (شكل 2-164 e) . كما ان هناك انواع اخرى (شكل 2.165g,b) .

ج ـ او حسب نوع الاستناد الى :

جائز شبكي ذو استناد بسيط (شكل 2-165a) .

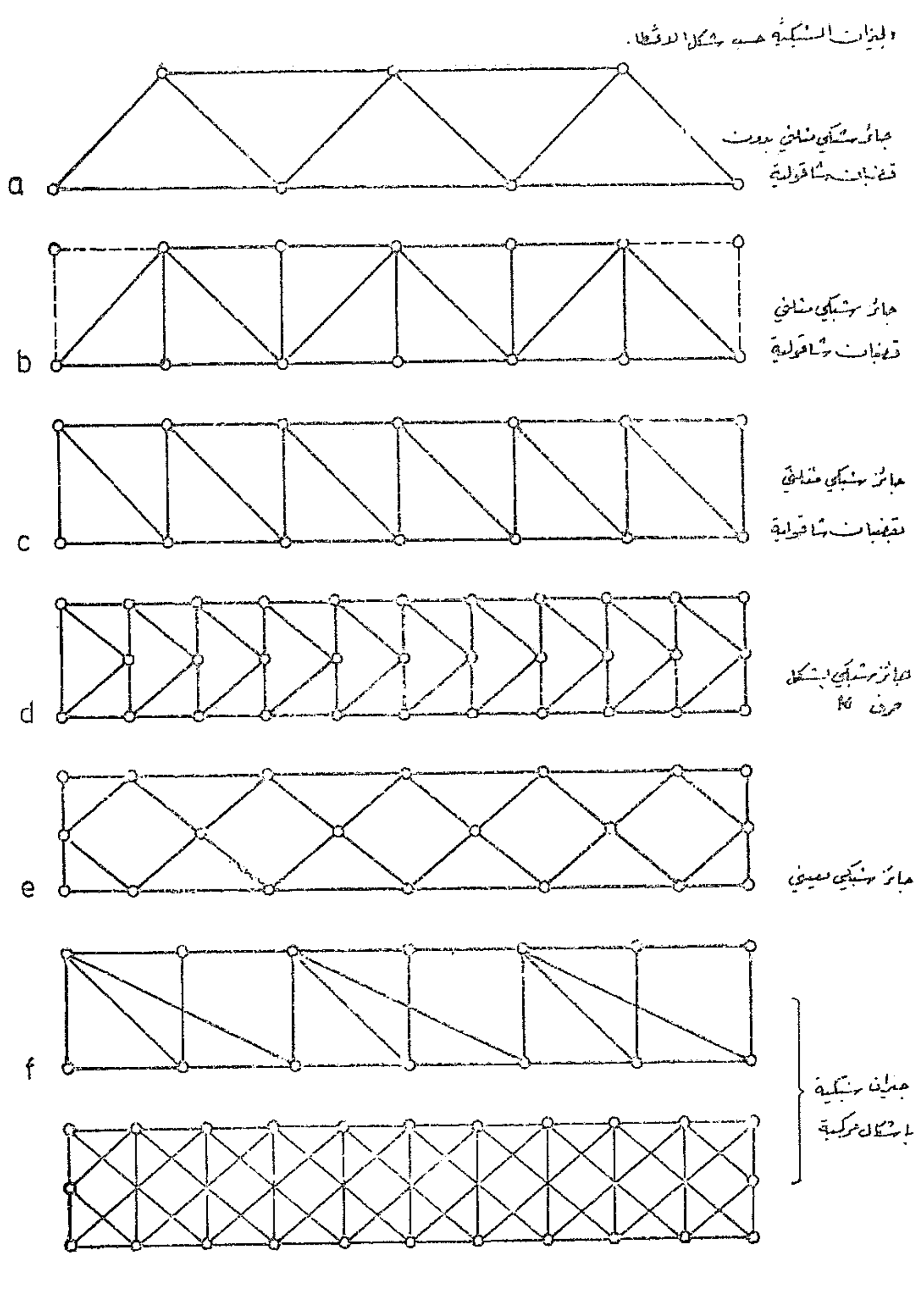
جائز شبكي **بارز** (شكل 2-165 b) .

جائز شبكي **بيروز واحد** (بظفر واحد) (شكل 2-165 c) .

جائز شبكي **بيروزين** (بظفرين) (شكل 2-165 d) .

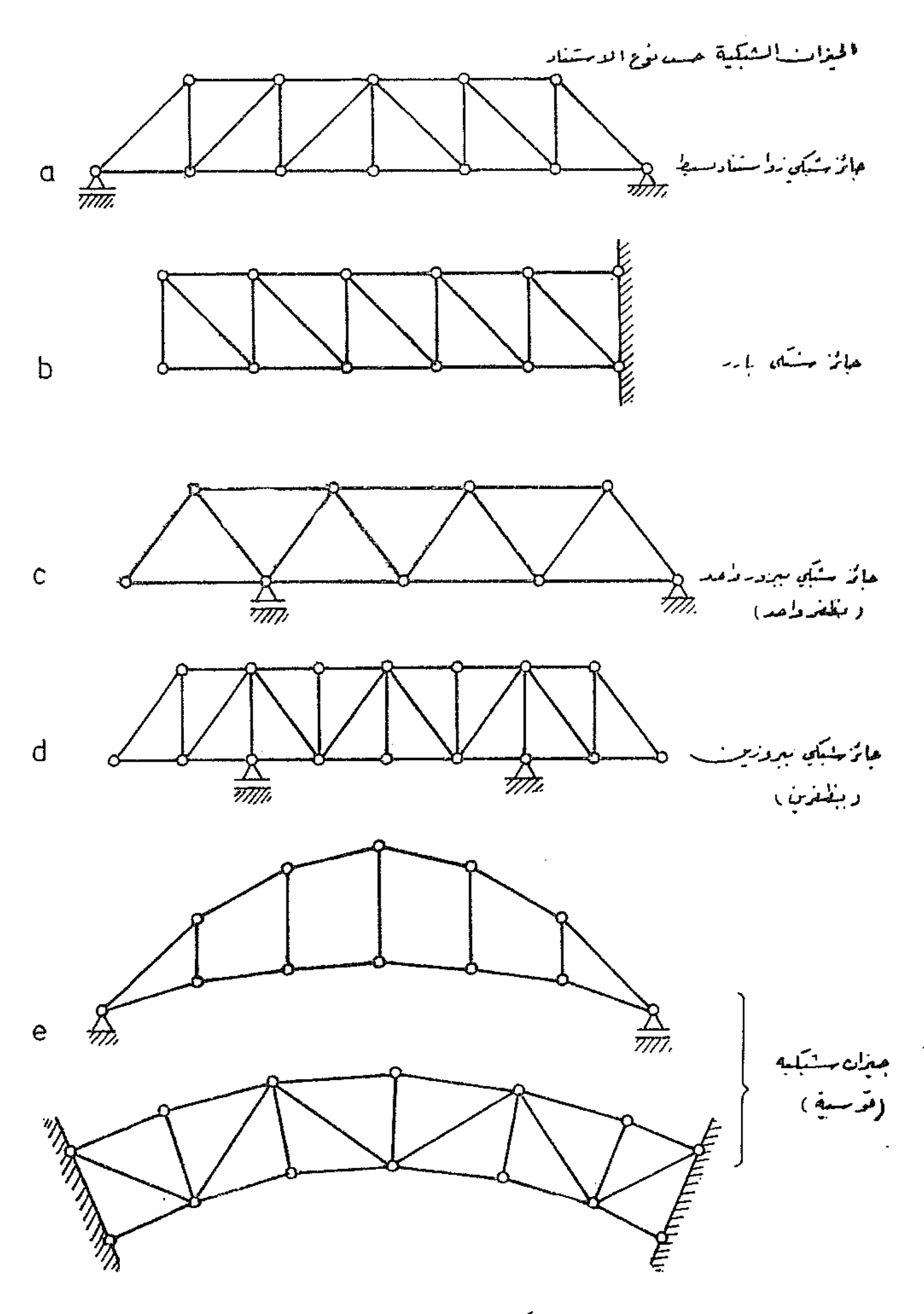
جائز شبكي **قوسي** (شكل 2-165e) .

وهناك امكانيات تقسيم اخرى للجيزان الشبكية .



الجوائز الشبكية حسب شكل الأقطار.
جائز شبكي مثلثي بدون
قضبان شاقولية
a
جائز شبكي مثلثي
قضبان شاقولية
b
جائز شبكي مثلثي
بقضبان شاقولية
c
جائز شبكي بشكل
حرف K
d
جائز شبكي معيني
e
f
جوائز شبكية
بأشكال مركبة

شكل 2-164


الجيزان الشبكية حسب نوع الاستناد
a
جائز شبكي ذو استناد بسيط
b
c
جائز شبكي ببروز واحد
(بظفر واحد)
d
جائز شبكي ببروزين
(بظفرين)
e
جيزان شبكية
(قوسية)

شكل 2-165

تستعمل الجيزان الشبكية في مجالات متعددة اهمهافي الجسور وفي الروافع وفي الابراج(الكهربائية وابراج المراقبة) وفي السقالات وفي اغراض اخرى كثيرة . يجب ان تتحقق في الجيزان الشبكية (والتي يقصد فيها الجيزان الشبكية المثالية) المدروسة الفرضيات التالية :

١ ـ إن محاور القضبان هي مستقيمة (يفهم تحت كلمة محور القضيب انه الخط الواصل بين جميع مراكز ثقل المقاطع العرضية للقضيب) .

٢ ـ يتم ارتباط القضبان ببعضها مركزياً ، اي ان محاور قضبان العقدة الواحدة تلتقي في نقطة واحدة ، والتي تسمى بنقطة الدوران .

٣ ـ تتصل القضبان مع بعضها في العقد اتصالا مفصلياً عديم الاحتكاك (مثالياً) بحيث لا توجد فيها أية مقاومة على الاطلاق لدوران هذه القضبان وبالتالي لا توجد فيها أية عزوم .

٤ ـ تؤثر الحمولات التي تتعرض لها الشبكيات في العقد فقط وهي تتألف من حمولات وحيدة . وبذلك لا توجد أية حمولات خارجية تؤثر على القضبان مباشرة ، اي بين العقد . نتيجة للفرضين ٣ و ٤ ولان جميع قضبان الجيزان الشبكية مستقيمة بنتج ما يلي : **تتعرض قضبان الجيزان الشبكية لقوى ناظمية دون أن تتولد فيها أية قوى عرضية او عزوم انعطاف .**

وتكون هذه القوى الناظمية اما قوى ضغط او شد وتبعاً لذلك فان هذه القضبان هي اما ان تكون قضبان ضغط او قضبان شد وتسمى القوى التي تحسب بهذه الطريقة **بالقوى الاساسية** (بقوى القضبان الاساسية) . ومما لا شك فيه ان الفرضين الاساسيين المذكورين (٣و٤) لا يمكن تحقيقها في الطبيعة تحقيقاً كاملا ، اذ ان قضبان الجيزان الشبكية الفعلية تتعرض ولاشك لحمولات موزعة فيما بين اطرافها عند المفاصل ومن هذه الحمولات الوزن الذاتي لهذه القضبان ، كما انها ترتبط بعضها ببعض عند اطرافها ارتباطاً وثيقاً عن طريق مسامير البراشيم او عن طريق اللحام (إذا لا يمكن في الجيزان الشبكية الفعلية التكلم عن المفاصل عديمة الاحتكاك) وهذا كله من شأنه أن يولد عزوم انعطاف وقوى عرضية في قضبان الجيزان الشبكية بالاضافة الى القوى الناظمية ، بل ان من شأنه ايضاً ان يغير قيم القوى الناظمية التي حسبت على اساس الفرضين السابقين ولكن هذا التغيير على كل حال هو مما يمكن تجاهل قيمته في التصميمات المبدئية . وتسمى الاجهادات الاضافية ، التي تعبر عن شدة توزيع القوى الداخلية في قضبان الجيزان الشبكية ، المتولدة عن الاخلال بالفرضين الأساسيين وما يتبع ذلك من قوى عرضية وعزوم إنعطاف **بالاجهادات الثانوية** ويكتفى عادة عند تصميم الجيزان الشبكية بحساب القوى الاساسية ويراعى خفض الاجهادات المسموح بها في التصميم بما يكفي لمواجهة الاجهادات الثانوية الاضافية . فمثلا يقوم المهندسون في انشاءات الابنية العالية باهمالها ، اما في انشاءات الجسور

فتؤخذ بعين الاعتبار . على كل حال ليس حساب الاجهادات الثانوية بالأمر السهل وإنما هو طريق معقد وصعب . لازالة الاخلال بالشرط الرابع الناتج عن تأثيرالوزن الذاتي لقضبان الجائز الشبكي ، يستعاض عادة عن الوزن الذاتي بقوى وحيدة تكافئه وتؤثر في عقدالجائز الشبكي .

أما بالنسبة للحمولات الناتجة عن وزن تكسية (تغطية) الجائز الشبكي ووزن المواد العازلة في السقوف وكذلك وزن الثلوج والرياح فيمكن تحويل تأثيرها الى عقد الجائز الشبكي بواسطة تصميم مناسب .

ان الشرط الثاني الذي يفترض ربط القضبان ربطاً مركزياً يتحقق مثلا في الجيزان الشبكية المعدنية المبرشمة بشكل غير دقيق . اما الشرط الاول الذي يشترط في محاور القضبان ان تكون مستقيمة فيتحقق في الجائز الشبكي الفعلي تحقيقاً شبه دقيق . تسمى الجيزان الشبكية التي تتحقق فيها الفرضيات السابقة وخاصة الفرضان الاساسيان (٣و٤) بالجيزان **الشبكية المثالية** سيقتصر في هذا الكتاب على النوع المثالي من الجيزان الشبكية وعلى طرائق تحديد القوى في اجزائه المختلفة فقط .

٢ ـ ١٤ ـ ٢ العلاقة التي تربط بين عدد القضبان وعدد العقد :

لكي يكون التركيب الشبكي مقرراً ستاتيكياً وفي نفس الوقت متماسكا غير قابل للتصدع في اي جزء من اجزائه ، ينبغي ان تتحقق فيه علاقة ما بين عدد القضبان وعدد العقد. ومن الممكن متابعة التركيب الشبكي باحدى الصورتين التاليتين :

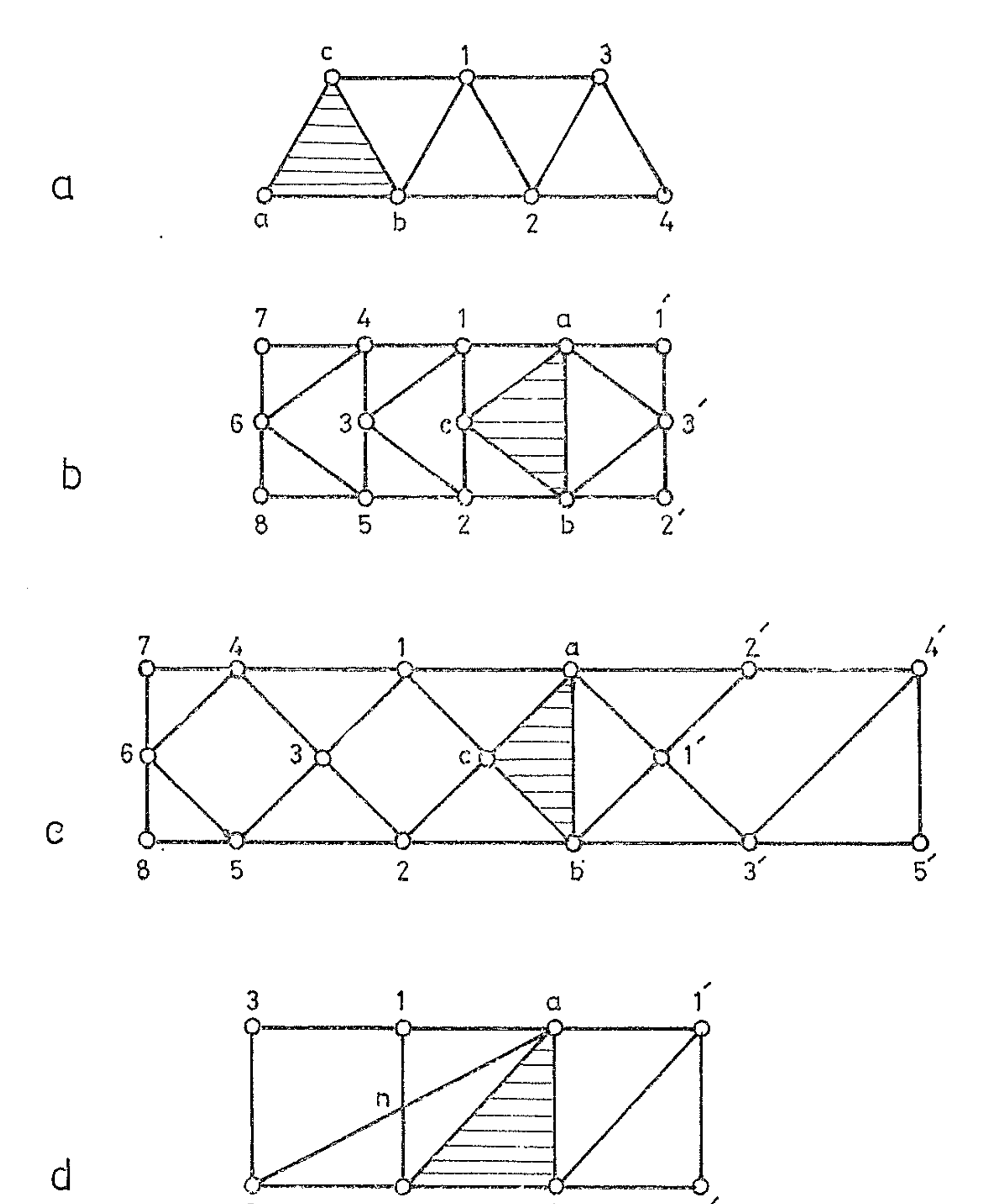
آ ـ **الصورة الاولى** : (شكل 2-166) :

في هذا النوع من الجيزان الشبكية يبدأ التركيب بمثلث abc مكون من ثلاثة قضبان وثلاث عقد ثم يتابع التركيب بحيث يزداد عدد القضبان بمعدل قضيبين جديدين لكل عقدة اضافية ، وقد رقمت العقد في جميع الشبكيات الموضحة في الشكل (2-166) حسب ترتيب تكوينها بالنسبة لمثلث البدء abc ومن الممكن في هذه الحالة ان تحدد العلاقة بين عدد القضبان والعقد هكذا :

بفرض أن عدد العقد الجديدة بالاضافة الى مثلث البدء abc هو x وأن عدد جميع العقد في التركيب الشبكي هو K وعدد القضبان هو S فيكون :

$$K = 3 + x \qquad (a)$$

$$S = 3 + 2x \qquad (b)$$


a
c
1
3
a
b
2
4
b
7
4
1
a
1´
6
3
c
3´
8
5
2
b
2´
c
7
4
1
a
2´
4´
6
3
c
1´
8
5
2
b
3´
5´
d
3
1
a
1´
n
2
c
b
2´

شکل 2-166

وبحذف x من المعادلتين ينتج :

$$S = 2K - 3 \qquad (1)$$

(بالامكان الحصول بسهولة على نفس النتيجة وذلك بالاستعانة بالتفكير التالي :

يحتاج للحصول على العقد الثلاثة الاولى الى ثلاثة قضبان وللحصول على كل عقدة اضافيـة يحتاج لقضيبين جديدين . بذلك يجب ان يكون عدد القضبان S منقوصاً منه الثلاثة الاولى مســاوياً لضعف عدد العقد منقوصاً منها العقد الثــلاثة الاولى ، اي $S - 3 = 2(K - 3)$) . والتركيب الشبكي في هذه الحالة يكون انشاءاً متماسكاً قادراً على ان يتحمــــل ما يؤثر عليه من قوى خارجية ويلزم ان يستند استناداً كافياً كأي انشاء عادي . ومن الممكن ان يتم الاستناد باحدى الطريقتين التاليتين :

١ ـ مسندين مفصليين أحدهما يسمح بالحركة الانتقالية والثاني لايسمح بالانتقال وتكون هـذه المساند عند اثنتين من العقد .

٢ ـ ثلاثة مساند نوسية على شكل قضبان ثلاثة تتصل بثلاث من العقد ويشـترط فيها ان لاتكون متوازية او متلاقية في نقطة واحدة .

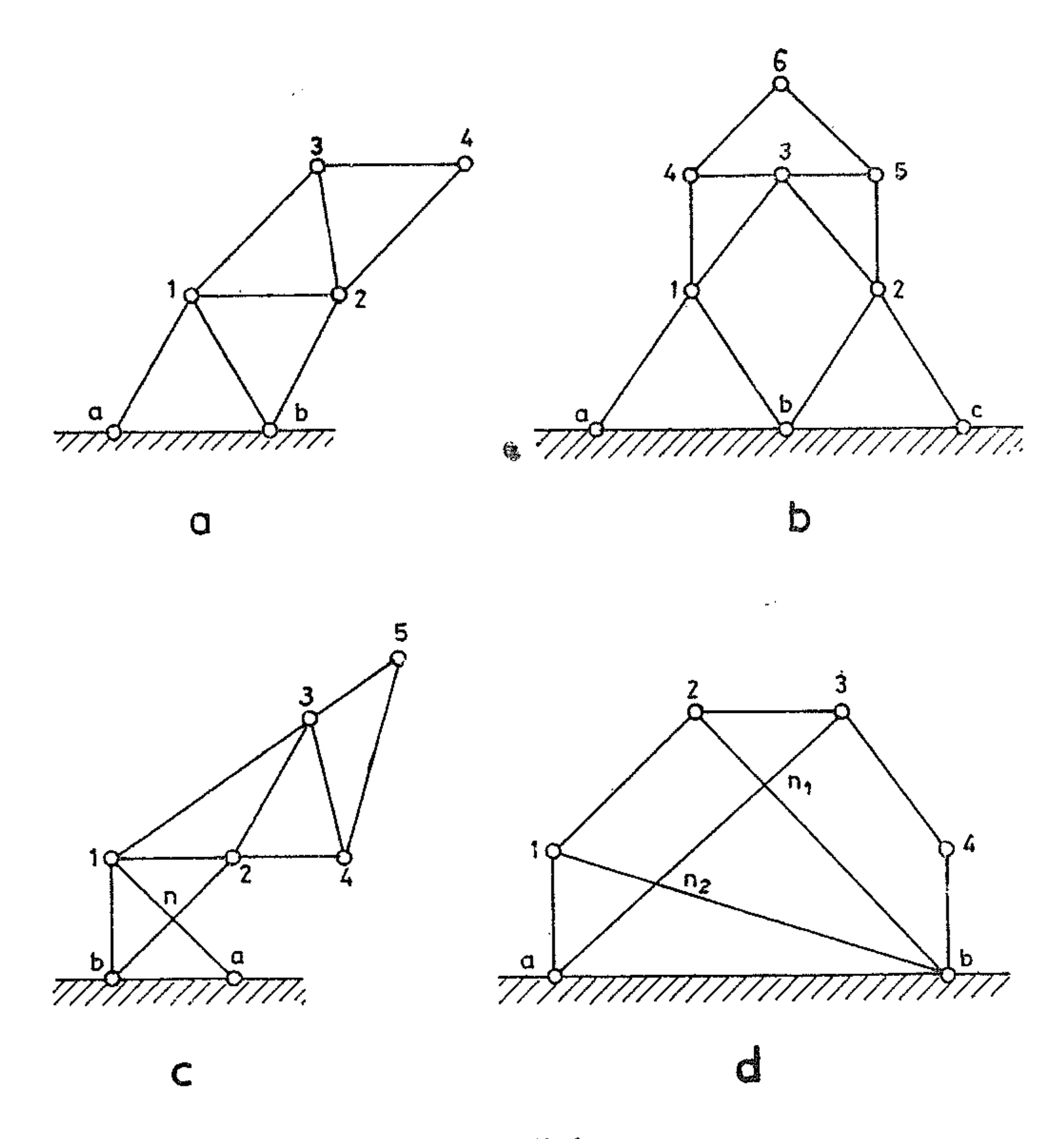
ب ـ **الصورة الثانية** (شكل 2-167) :

وفي هذا النوع يبدأ التركيب الشبكي من مسندين مفصليين a , b ثم ينمو بحيث يضاف قضيبان لكل عقدة وبذلك تصبح العلاقة بين القضبان S وعدد العقد K هي :

$$S = 2K \qquad (2)$$

ويلاحظ عند تطبيق هذه العلاقة ان المساند المفصلية a , b لاتدخل في عدد العقد K ، ومن الممكن ان يبدأ التركيب الشبكي من اكثر من مسندين مفصـليين كما في التركيب الثالث من الشكل (2-167b) ، حيث توجد ثلاثة مساند مفصلية هي a , b , c . وقد رقمت العقد في الشكل بحسب ترتب ظهورها بالنسبة لمساند الابتداء في a , b , c . والتركيب الشبكي المكون بهذه الطريقة هو انشاء متماسك وكامل الاستناد بحيث لايحتاج الى اية مساند اضافيه كما هــو الحال في النوع السابق . ومن المفيد ملاحظة ما يلي :

١ ـ ان العلاقة (1) او (2) التي تربط بين عدد القضبان والعقد في التركيب الشبـكي هي



شكل 2-167

علاقة لازمة او ضرورية لكي يكون التركيب مقرراً ستاتيكياً ولكنها غير كافية وحدها . اذ ان من الممكن ان يستبدل احد القضبان بقضيب اخر وتظل بذلك العلاقة (1) او (2) محققة ولكن التركيب يصبح غير مقرر ستاتيكياً في بعض اجزائه ومتصدعاً في جزء آخر. مثال ذلك اذا استعيض عن القضيب ′4 -- ′3 في الشكل (2-166 c) بقضيب ′3 - ′2 يصل بين العقدتين ′2 , ′3 فيصبح الجزء ′2 ′3 ab غير مقرر ستاتيكياً بينما يصبح الجزء ′4 ′5 ′3 ′2 متحركاً (متصدعا) . كذلك اذا استبدل القضيب 4 - 3 فى الشكل (2-167 b) بقضيب اخر 2—a بذلك يصبح الجزء ab 12 غير مقرر ستاتيكيا بينما يصبح الجزء 5123 متحركا(متصدعاً)

ولذلك فان تتبع تكوين التركيب الشبكي باحدى الصورتين السابقتين هو الشرط اللازم والكافي لضمان ان يكون هذا التركيب مقرراً ستاتيكياً وغير قابل للحركة (غير قابل للتصدع) في نفس الوقت .

٢ ـ اذا زاد عدد القضبان S عما تتطلبه العلاقة (1) او (2) حسب نوع التركيب كان معنى هذا ان التركيب الشبكي غير مقرر ستاتيكيا بدرجة الزيادة في S اما اذا نقص عدد القضبان عن ذلك فمعناه ان التركيب الشبكي متحرك (متصدع) في جزء او اكثر من اجزائه بحسب النقصان في S .

٣ ـ ان نقاط تلاقي القضبان (n) في الشكلين (166-2) و (167-2) حيث لا تظهر دوائر لاتمثل عقد . ومن المفروض نظريا ان القضبان عند هذه النقاط ليست متصلة بعضها ببعض .

٢ ـ ١٤ ـ ٣ تحديد نوعية الجيزان الشبكية من الناحية الستاتيكية باستخدام الشرط التعدادي

لقد تم حتى الآن ايجاد العلاقة بين عدد القضبان وعدد العقد في الجائز الشبكي المسنود على مسندين بسيطين احدهما متحرك والآخر ثابت او ما يكافؤهما والان سوف يتم ايجاد العلاقة التي تصلح لجميع انواع الجيزان الشبكية مهما كانت معقدة في بناءها الداخلي ومن أجل جميع انواع الاستناد .

في الجيزان الشبكية المستوية تتألف المجاهيل عادة من ردود افعال المساند وقوى القضبان أما المعاليم فهي المعادلات التي تنتج عن تطبيق شروط التوازن . فلو رمز لعدد ردود افعال المساند المستقلة بالحرف a ولعدد القضبان الذي يمثل في نفس الوقت عدد قوى القضبان بالحرف S ولعدد العقد بالحرف K لكان عدد شروط التوازن مساويا ضعف عدد العقد ، أي 2K (فلكل عقدة شرطا توازن هما $\Sigma H = 0$, $\Sigma V = 0$) .

للتمكن من تحديد نوعية الجائز من الناحية الستاتيكية ينبغي معرفة نتيجة العلاقة ، التي تستند على مبدأ توازن العقد في الجائز الشبكي ، والتي تمثل كما يلي :

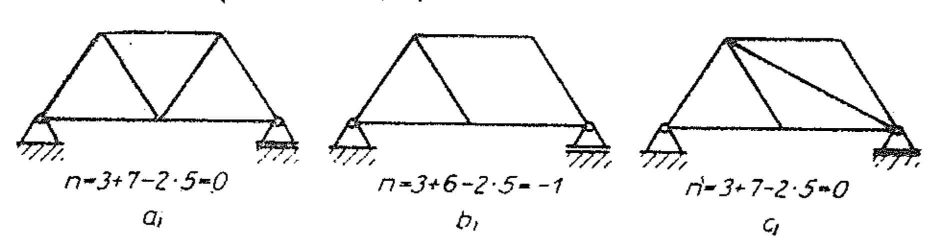
عدد المجاهيل ـ عدد المعاليم = n

ويمكن التعبير عن هذه المعادلة ، التي تسمى **بالشرط التعدادي للجيزان الشبكية المستوية** ، رياضياً كما يلي :

$$n = a + S - 2K \qquad (2.18)$$

اذا كانت نتيجة تطبيق المعادلة هي التالية :

n<0 فالجائز الشبكي متحرك (ولا يمكن استعماله) (شكل 2-168b) .

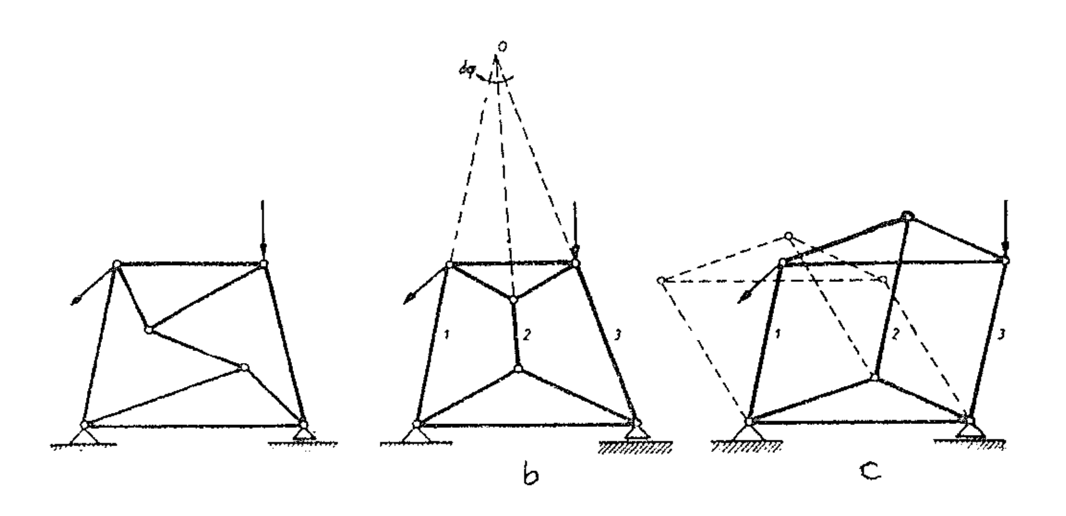


شكل 2-168

n=0 فالجائز مقرر ستاتيكيا (شروط التوازن وحدها تكفي لايجاد جميع المجاهيل الموجودة في الجائز الشبكي) (شكل 2-168 a,c) .

n>0 فالجائز غير مقرر ستاتيكياً (شروط التوازن وحدها لاتكفي لايجاد كافة المجاهيل الموجودة في الجائز الشبكي ولذلك ينبغي التفتيش عن عدد من المعادلات الاضافية يساوي عدد المعادلات الناقصة ليكون مجموعها مساويا لعدد المجاهيل) .

ان علاقة الشرط التعدادي (2.18) هي علاقة لازمة ولكنها غير كافة . ينبغي ان تكون نتيجة الشرط التعدادي ، لكل الجمل الانشائية القابلة للاستعمال هي n≧0 وإلا فالجملة لا يمكن استعمالها . اما الجمل التي تكون نتيجة الشرط التعدادي فيها n≧0 فهذا لايعني انها جمل يمكن استعمالها فهناك بعض الجمل الستاتيكية التي تقوم بانتقالات حركية ولا يستطيع الشرط التعدادي ان يحددها وهي غير قابلة للاستعمال (فالشرط التعدادي غير كافي)(شكل 2-169 b,c) .



شكل 2-169

علاوة على ما ذكر هناك جمل ذات انتقالات كبيرة ، تنتج عن تركيب خاطىء للمساند ولكنها حسب الشرط التعدادي مقررة ستاتيكياً .

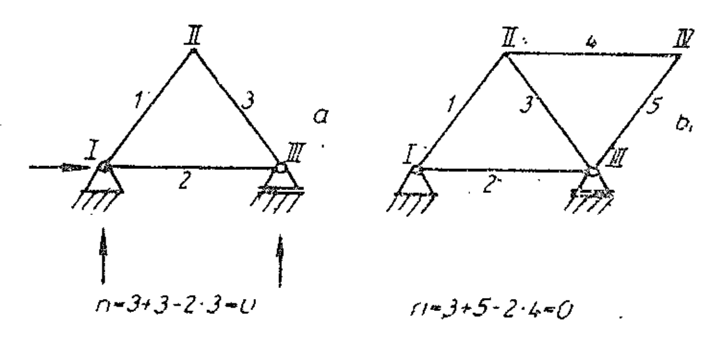
تسمى الحالات التي تكون فيها نتيجة الشرط التعدادي هي $n \geqq 0$ ولكنها في الحقيقة متحركة ، بالحالات الاستثنائية لاسكون (شكل 2-169 b,c) ، لذلك يلزم بعد تطبيق الشرط التعدادي والتأكد من أن $n \geqq 0$ ، القيام بدليل اخر يكون كاف للتأكد من كون الجملة غير متحركة، على سبيل المثال طريقة المخطط القطبي أو طريقة شكل F′ (انظر كتاب مقاومة المواد للصف الثاني كهرباء للمؤلف) ، فمتى تم التأكد بالطريقة الحركية ان الجملة غير متحركة فان n تكون فعلا درجة غير مقرر ستاتيكياً (درجة عدم التقرير الستاتيكي) للجائز . أما الجمل الستاتيكية التي يثبت بطريقة الشرط التعدادي أو بالطريقة الحركية انها متحركة فلا داعي للقيام بحساب سكونها لانها ، كما هي ، جمل غير قابلة للاستعمال . فالجمل الستاتيكية لانشاء ينبغي ان تكون مستقرة بعد التحميل وإلا لفقدت وظيفتها التي صممت من اجلها .

٣ ـ ١٤ ـ ٤ قواعد لتشكيل الجيزان الشبكية ، الجيزان الشبكية الاستثنائية :

يمكن بالاستعانة بالقواعد التالية ، الحصول على الجيزان الشبكية المقررة حركيا أو ستاتيكياً :

١ ـ المثلث هو الشكل الاساسي للجائز الشبكي (شكل 2-170 a). اذا الحقت بعقدتين (على سبيل المثال II , III) عقدة ثالثة (العقدة III) وذلك بواسطة قضيبين عندئذ لا يتغير التقرير الستاتيكي (شكل 2-170 b) (يصلح هذا أيضاً عندما يكون الشكل الذي ينطلق منه هو اي جائز مستقر) . بالاستعانة بما ذكر يستطاع توسيع الجائز المقرر ستاتيكياً بشكل كيفي .

ملاحظة : عندما تقع عقدة الوصل الجديدة (على سبيل المثال العقدة VI المشار اليها في

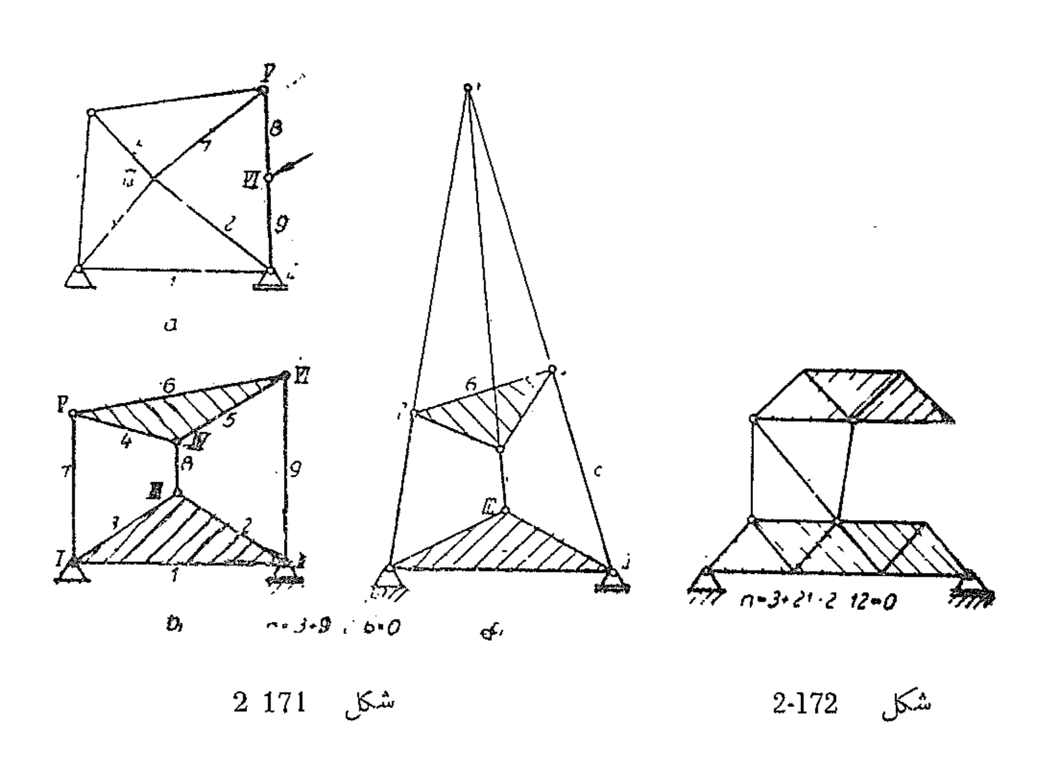


شكل 2-170

الشكل 2-171 a) على الخط الواصل بين العقدتين القديمتين فان التركيب الشبكي ، هو على العموم وبسبب الحركات اللانهائية الصغر وبسبب كون قوى القضبان كبيرة جداً ، غير صالح للاستعمالات العملية . تسمى الجيزان الشبكية التي لا يعطي فيها الشرط التعدادي نتيجة صحيحة، بالجيزان الشبكية الاستثنائية (Ausnahmefachwerke) .

٢ ـ اذا اريد الوصل بين قرصين صلبين ، بواسطة قضبان ، عندئذ تلزم لذلك ثلاثة قضبان (شكل 2-172) .

ملاحظة : يتم الحصول على الجائز الشبكي الاستثنائي عندما تكون القضبان الثلاثة متوازية أو عندما تتلاقى خطوط امتدادها في نقطة واحدة (شكل 2-171 b,c) . بذلك تستطيع المثلثات القضيبية العليا الدوران بزاوية صغيرة حول « **القطب** » P (فمن اجل الشكل 2-171 b يقع القطب في اللانهاية) .



شكل 2 171

شكل 2-172

٣ ـ بنزع قضيب ما من جائز شبكي مقرر ستاتيكياً ، فان الجائز المذكور يتحول لجائز متحرك (شكل 2-168) . يعود هذا الجائز لاستقراره عندما يستبدل القضيب بقضيب آخر يربط بين عقدتين ما منه.

ملاحظة : لا يجوز ان يقع القضيب البديل (Der Ersatzstab) فوق قضيب آخر موجود ليربط

بين نفس العقد . كما لا يجوز ايضاً ان يوضع القضيب البديل في المكان الذي يؤدي لتشكيل جائز شبكي استثنائي أو الى تشكيل جائز شبكي غير مقرر ستاتيكياً .

٢ ـ ١٤ ـ ٥ الجمل الشبكية البسيطة المستوية

α ـ ايجاد قوى قضبان الجائز الشبكي

لايجاد قوى القضبان في الجائز الشبكي هناك طريقان ، الطريق الاول تحليلي والطريق الثـــاني تخطيطي ـ اما افضلية استعمال احد الطريقين فسوف يتم ايضاحه على مثال مشترك يستعمـل فيه كلا الطريقان .

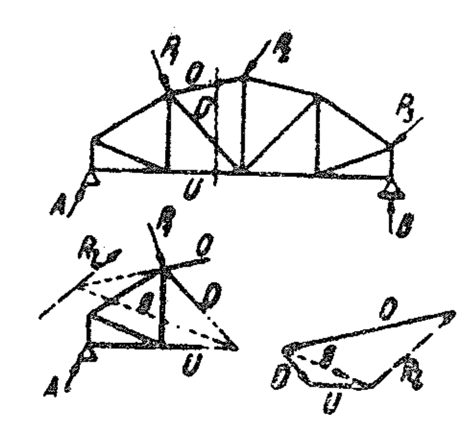
α ـ ١ ايجاد قوى القضبان تحليلياً :

قبل الابتداء بايجاد قوى القضبان ينبغي كالعادة تعيين ردود افعال المساند (باستثناء بعض الحالات) وهذا يتم ، كما في الجائز البسيط ، اما تحليلياً بواسطة تطبيق شروط توازن الجسـم الصاب او تخطيطاً بالطرائق المعتادة التي استخدمت في الفقرة (٢ـ٢ II) . لذا سوف يعتـــبر هنا ان ردود افعال المساند معلومة . اما الطرائق التحليلية لايجاد قوى القضبان في الجائزالشبكي فكثيرة وسيقتصر على ذكر اهمها واكثرها شيوعا فقط .

α ـ ١ ـ ١ طرائق القطع :

أ ـ طريقة قطع ريتر (طريقة ريتر)

سوف ينطلق لشرح هذه الطريقة من مثال بسيط وسيبتدأ بحساب قوة القضيب القطري D من الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-173) وذلك نتيجة لتأثير الحمـولة المعطـاة هناك . ليقطع الجائز الشبكي بواسطة القطع s . . s فيمر علاوة على القضيب القطري بقضيبان آخران ما تزال قوتاها مجهولة ، هذان القضيبان هما قضيب الجزع (الوتر) العلوي O وقضيب الجـزع (الوتر) السفلي U . بما ان الجائز ككل موجود في حالة توازن لذلك ينبغي ان تتحقق حالة التوازن ايضاً بالنسبة لكل جزء من اجزاءه المقطوعة . بأخذ الجزء الايسر مثلا يرى انه علاوة على تأثير القوى P_2 , P_1 , A عليه ، هناك قوى القضبان المقطوعة الثلاثة والتي ستعطى نفس رمز قضبانها اي U , O , D .



شكل 2-173

ليفترض في البداية ان كافة قوى القضبان هي قوى شادة اي انها تخرج من مكان القطع . فاذا كانت منها قوة أو عدة قوى ، هي في الحقيقة قوى ضاغطة لكانت نتيجة الحساب سالبة (مسبوقة باشارة سالبة) ، هذا يعني ان القيمة السالبة الناتجة هي قيمة القوة الضاغطة .

بعد ذلك لتطبق شروط التوازن على كافة القوى المؤثره على الجزء المعتبر (هنا مثلا الجزء الايسر) . بأخذ شرط توازن العزوم $\Sigma M_i = 0$ من بين شروط التوازن وباختيار النقطة r التي تنشأ عن تقاطع امتداد حاملي القوتين U , O (القوى الموجودة في القطع الذي اجري لحساب القوة D) كنقطة للنسب ، بذلك يتم التوصل للمعادلة التالية :

$$A\,p_A - P_1\,p_1 - P_2\,p_2 - D\,p_D - 0$$

منها يتم تعيين القوة المطلوبة :

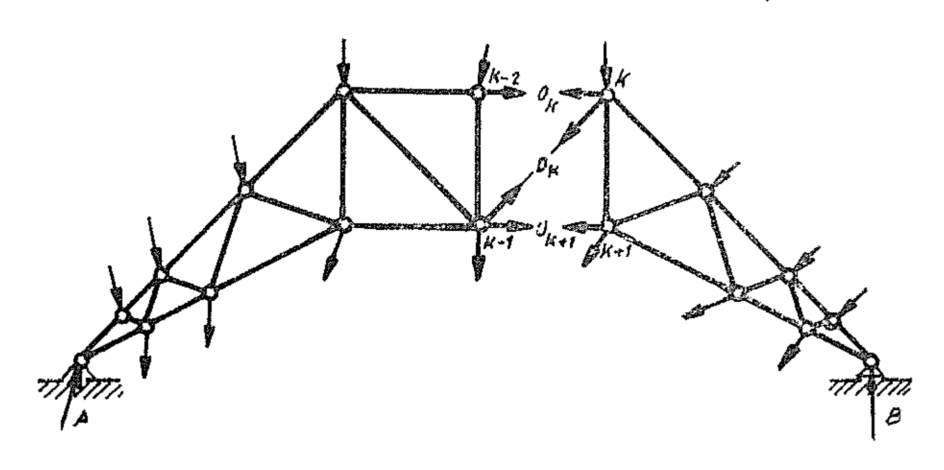
$$D = \frac{1}{p_D}(A\,.\,p_A - P_1\,p_1 - P_2\,p_2)$$

بالامكان الحصول على المسافات p_2 , p_1 , p_D , p_A إما تحليلياً أو بالقياس من رسم تخطيطي دقيق . تسمى هذه الطريقة **بطريقة قطع ريتر** أما النقطة r فتسمى **بنقطة ريتر** .
لايجاد قوى القضبان O , U تحددنقاط ريترجديدة مناسبة (في المثال المدروس النقاط r′ , r″).

نواقص طريقة ريتر :

لا يمكن استخدام طريقة ريتر لايجاد قوة قضيب (مثلا القضيب D_k) عندما تكون القضبان المقطوعة الاخرى متوازية (القضيب O_k والقضيب U_{k+1}) (شكل 2-174) فبسبب التوازي

تقع نقطة ريتر في اللانهاية وحتى يتم ، في هذه الحالة ، الحصول على معادلة واحدة تحتوي على قوة القضيب المطلوب حسابها ، يطبق شرط توازن القوى بالاتجاه العمودي على اتجـاه القضيبين المتوازيين وذلك على احد الجزيئين المقطوعين من الجائز الشبكي (هنا على الجزء الأيسر) . بسبب التوازن ينبغي أن تكون شروط توازن القـوى بأي اتجـاه كان ايضاً محققـة (مثـــلا $\Sigma V=0$, $\Sigma H=0$) .



شكل 2-174

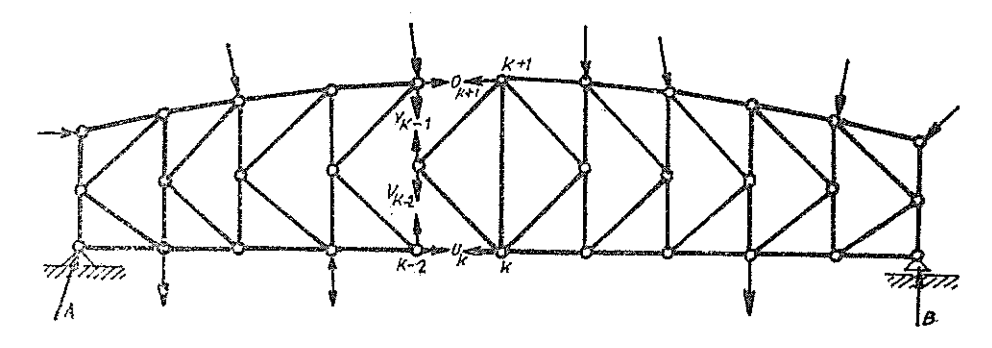
تلخيص طريقة ريتر :

يفصل الجائز بواسطة قطع يمر بالقضيب المطلوب حساب قوته ثم يطبق شـرط توازن العزوم بالنسبة لنقطة تمر منها حوامل جميع قضبان القطع ماعدا القضيب الذي يراد حسـاب قـوته ، تسمى هذه النقطة بنقطة ريتر k ، اي $\Sigma M_k=0$. وتستخدم هذه الطريقة في القطوع التي تتلاقى فيها جميـع القضبان ما عدا واحد منها في نقطة واحدة .

لايجاد قوة قضيب ما ينبغي ان لا تكون بقية قضبان القطع متوازية وإلا لوقعت نقطة ريتر في اللانهاية .وفي هذه الحالة ، وفي حالة عدم تجاوز عدد القضبان ذات القوى المجهولة عن اثنين يطبق شرطي توازن القوى ، على سبيل المثال $\Sigma H=0$, $\Sigma V=0$.

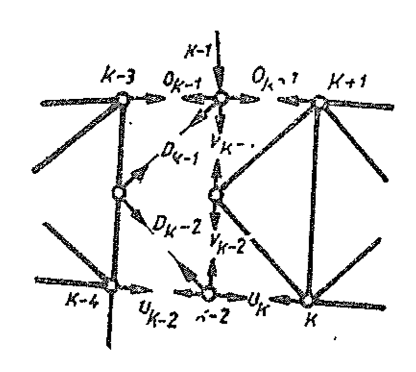
حالات خاصة :

من اجل الجائز الشبكي الذي يشبه حرف K والممثل في الشكل (2-175) لا يستطاع بأية حال اجراء قطع يمر بثلاثة قضبان فقط . لكن بالامكان تعيين القوى بواسطة القطوع المشار اليهـا في الشكل (2-175) والشكل (2-176) . اثناء تطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة للنقطـة $k-1$ تظهر قوة قضيب الجزع (الوتر) السفلي U_k فقط واثناء تطبيق شرط توازن العزوم بالنسبـة



شكل 2-175

للنقطة $k-2$ تظهر قوة قضيب الجزء (الوتر) العلوي O_{k+2} فقط ، بحيث يمكن حساب كل من القوتين مستقلة عن الاخرى . لايجاد قوى القضبان القطرية D_{k-1} و D_{k-2} وقوى القضبان الشاقولية V_{k-1} و V_{k-2} تفصل العقد $k-1$ و $k-2$ عن الجائز الشبكي بواسطة قطع مدور حسب الشكل (2-176) . عندئذ يعطي شـرط توازن القوى بالاتجاه الافقي ، القوى D_{k-1} و D_{k-2} كما يعطي شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي ، القوى V_{k-1} و V_{k-2} .



شكل 2-176

ب ـ طريقة القطع المدور (وتسمى ايضاً بطريقة العقد) :

في الجائز الشبكي المتوازن يجب ان تكون كل عقدة مقتطعة من عقده متوازنة ايضاً . تحليلياً يعني هذا ان تحقق مجموعة القوى المؤثرة على العقدة المتقطعة (القوى الخارجيـة والداخليـة) شرط التوازن . لتقطع عقدة من عقد الجائز الشبكي ولتطبق على القوى المؤثرة عليها والموجودة فيها (القوى الخارجية والداخلية) شروط توازن مجموعة القوى المستوية المركزية ، بذلك يتم التوصل الى مجموعة من المعادلات كل المجاهيل المطلوبة . بالطبع يجب ان يجرى القطع المـــدور

الاول على عقدة تحوي قضيبين فقط وذلك للتمكن ، بواسطة شرطي توازن القوى الموجوده في متناول اليد ، من ايجاد قوى القضبان المجهولة في العقدة . بعد ذلك ينتقل الى عقدة ثانيةتحتوي على ثلاثة قضبان احدها هو القضيب الذي تم حساب قوته ، اي ان عدد قوى القضبان التي ما تزال مجهولة يجب ان لا يزيد على اثنين ، وبنفس الطريقة ينتقل الى عقدة اخرى شريطة ان لا يزيد عدد قوى القضبان المجهولة فيها عن اثنين . اما تسلسل إختيار العقد فهو اختياري على ان يتحقق الشرط السابق الذكر . لكن في اغلب الحالات يرى ان الشرط السابق هو الذي يحدد العقدة التي يلزم اقتطاعها وتطبيق شروط التوازن عليها .

ج ـ الطريقة المشتركة :

حين استخدام الطريق التحليلي لحساب قوى القضبان في جائز شبكي لا توجد أية قيود تقر على اتباع طريقة واحدة فقط ، بل بالامكان استخدام كل الطرق السابقة لحل جائز شبكي واحد وذلك للحصول على المطلوب بسرعة وبسهولة . فمثلا لحل مسألة واحدة يمكن تطبيق طريقة قطع ريتر (وذلك بايجاد نقطة ريتر او بتطبيق شرطي توازن القوى) لايجاد قوى بعض القضبان ومن ثم تطبق طريقة القطع المدور (طريقة العقد) لايجاد ما تبقى من قوى القضبان .

حالات بسيطة :

في كثير من الجيزان الشبكية (التركيبات الشبكية) البسيطة يستطاع غالباً دون الحاجة لحساب مطول ، معرفة كثير من قوى القضبان فيها . فبدراسة الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-177) مثلا ، يرى ان قطعاً مدوراً حول العقدة غير المحملة 2 يشير فوراً الى ان قوى القضبان D_0, V_0 معدومة اي ان $V_0 = 0$ و $D_0 = 0$. عادة تسمى القضبان التي تنعدم فيها القوى **بقضبان الصفر** .

باقتطاع العقدة 3 بواسطة قطع مدور ثم تطبيق شرطي توازن القوى عليها ، فان الشرط الاول يعطي :

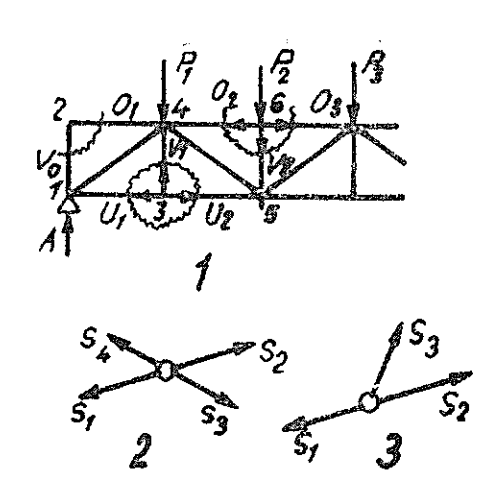
$$\Sigma V = 0 \ : \ V_1 = 0$$

أما الشرط الثاني للتوازن فيعطي :

$$\Sigma H = 0 \ : \ U_1 = U_2$$

بنفس الطريقة يتم التوصل من القطع المدور المجرى حول العقدة 6 الى ان $V_2 = -P_2$ أي انها مساوية للقيمة السالبة لحمولة العقدة وكذلك ايضاً يتم التوصل الى ان $O_1 = O_2$.

في العقدة غير المحملة ذات القضبان الاربعة (رباعية القضبان) كما في الشكل (2-177 b) يري ان



شكل 2-177

$S_1 = S_2$ و $S_3 = S_4$.اما في العقدة غير المحملة ذات القضبان الثلاثة كما في الشكل (2-177 c) فيرى ان $S_3 = 0$ و $S_1 = S_2$. توفر مراعاة هذه الاعتبارات البسيطة والاعتبارات التالية كثيراً من الزمن:

١ – تنعدم القوى في قضيبين لا يقعان على استقامة واحدة ويتلاقيان في عقدة غير محملة (كلا القضيبين هما قضيبا صفر) (شكل 2-178) وذلك لان شرط توازن القوى بالاتجاه x يعطي:

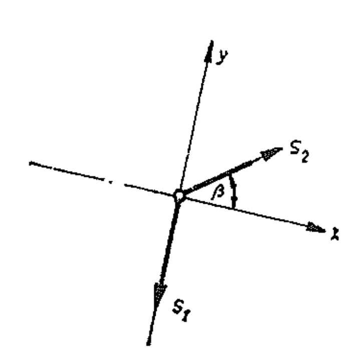
$$\sum_{\nu=1} P_{x\nu} = 6 \quad : \quad S_2 \cdot \cos\beta = 0$$

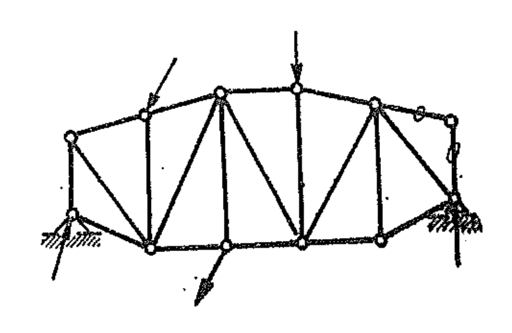
من حقيقة كون :

$$S_2 = 0$$

ينتج ان :

$$S_1 = 0$$





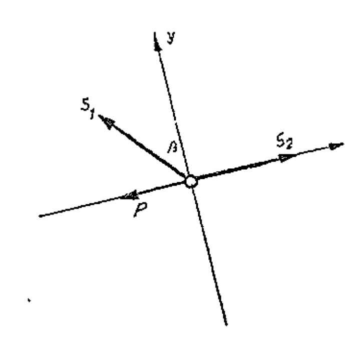
شكل 2-178

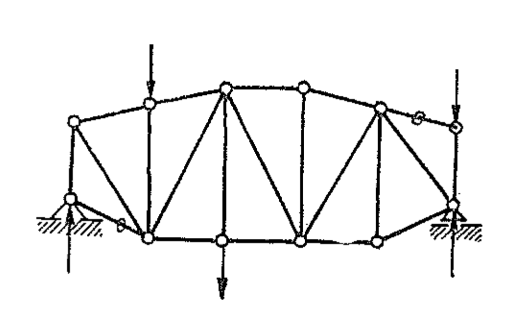
٢ ـ من أجل عقدة يتلاقى فيها قضيبان شبكيان لا يقعان على استقامة واحدة وتؤثر فيها قوة العقدة P التي ينطبق حاملها على امتداد أحد القضبان (شكل 2-179) يتم التوصل ، من شرطي توازن القوى بالاتجاه x والاتجاه y ، الى العلاقات التالية :

$$S_1 \cos \beta = 0 \ , \ S_2 - P - S_1 \sin \beta = 0$$

والتي يتم بواسطتها تعيين قوى القضبان :

$$S_1 = 0 \ ; \ S_2 = P$$

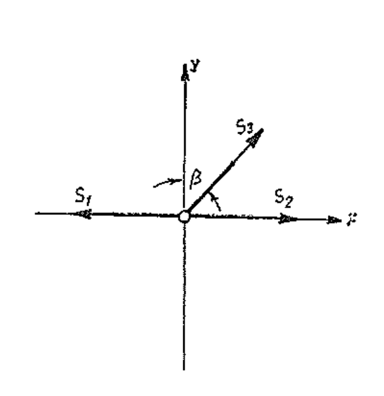


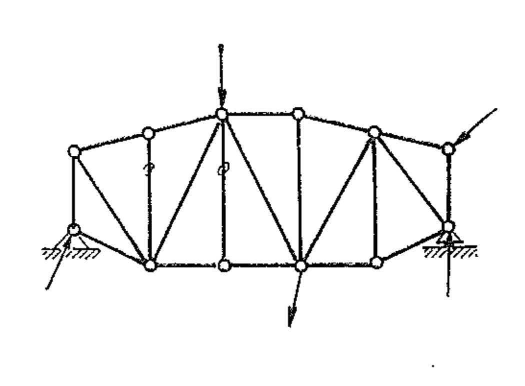


شكل 2-179

٣ ـ من اجل عقدة غير محملة وتتلاقى فيها ثلاثة قضبان ، من بينها قضيبان تقع على استقامة واحدة (شكل 2-180) فان شرطي توازن القوى تأخذ الشكل التالي :

$$S_3 \cos \beta = 0 \ ; \ -S_1 + S_2 + S_3 \sin \beta = 0$$





شكل 2-180

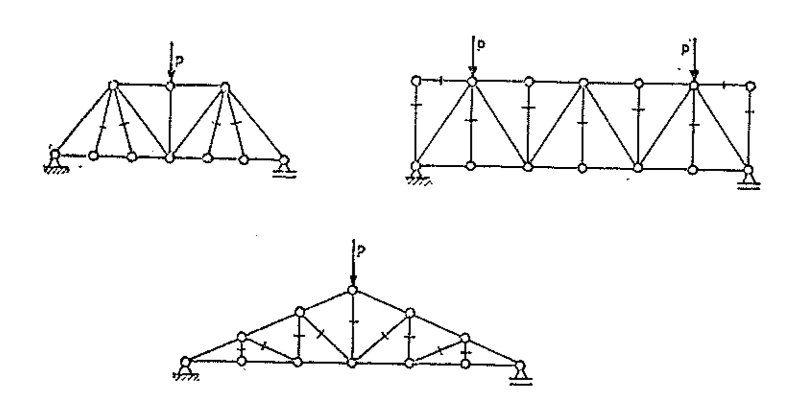
من هاتين العلاقتين يرى ان :

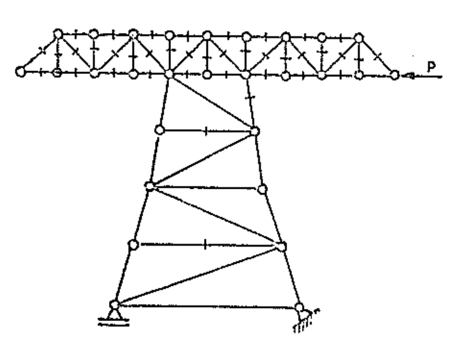
$$S_3 = 0 \quad ; \; S_1 = S_2$$

α ـ ١ ـ ٢ أمثلة :

مثال 86 :

المطلوب : تحديد قضبان الصفر للجيزان الشبكية الممثلة في الشكل (2-181) .





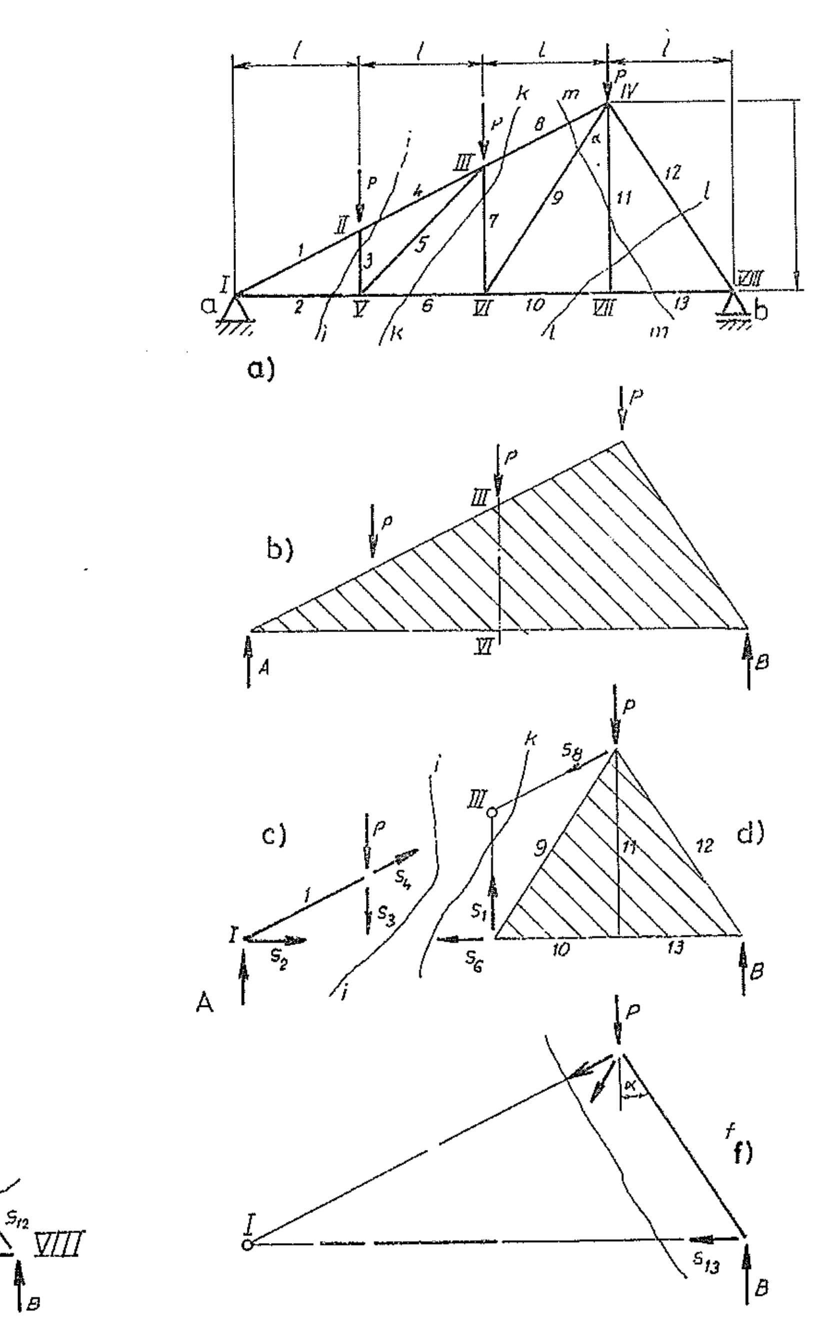
شكل 2-181

الحل :

باتباع الاعتبارات البسيطة المشار اليها في الفقره (٢ ـ ١٤ ـ ٥) يتبين ان كافة القضبان المعلمة بخط في وسطها هي قضبان صفر (قضبان تنعدم فيها القوة) .

مثال 87 :

المطلوب : حساب قوى القضبان S_2 , S_3 , S_6 , S_9 , S_{10} , S_{13} في الجـــائز الشبكي الممثل في الشكل (2-182) .



شكل 2-182

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند :

في البداية سوف يعتبر الجائز الشبكي قرصاً (شكل 2-182 b) ثم تطبق عليه شروطالتوازن:

$$\Sigma V = 0 : A - 3P + B = 0$$

بما ان القوى المؤثرة على الجائز متناظرة بالنسبة لمحور العقد III – VI ، لذلك ينبغي ان تكون ردود افعال المساند ايضاً متناظرة بالنسبة لنفس المحور ، وهذا يعني ان :

$$A = B$$

من المعادلتين السابقتين ينتج ان :

$$A = B = \frac{3}{2} P$$

٢ ـ قوى القضبان

سوف نستخدم طريقة القطع لايجاد قوى القضبان المطلوبة .

قطع ريتر i—i (الاشكال 2-182 a,c) :

$$\Sigma M_{II} = 0 : -Al + \frac{1}{2} S_2 l = 0 \quad : S_2 = 3P$$

$$\Sigma M_I = 0 : -Pl - S_3 l = 0 \quad : S_3 = -P$$

قطع ريتر k—k (الاشكال 2-182 a,d) :

$$\Sigma M_{III} = 0 : -S_6 l - Pl + 2Bl = 0 \quad : S_6 = 2P$$

قطع ريتر $l-l$ (الاشكال 2-182 a,e) :

$$\Sigma M_{IV} = 0 : -\frac{3}{2} S_{10} l + Bl = 0 : S_{10} = P$$

$$\Sigma M_{VIII} = 0 : -S_{11} l = 0 : S_{11} = 0$$

قطع ريتر m – m (الاشكال 2-182 a,f) :

$$\Sigma M_I = 0 : \frac{3}{2} S_{9H} l - 3Pl - 3S_{9V} l + 4Bl = 0$$

حيث ان :

$$\sin \alpha = \frac{S_{9H}}{S_9} = \frac{l}{\frac{1}{2}\sqrt{13}\ l}$$

$$\cos\alpha = \frac{S_{9v}}{S_9} = \frac{\frac{3}{2}\; l}{\frac{1}{2}\sqrt{13}\; l}$$

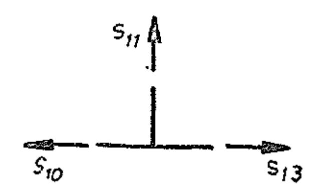
(للمقارنة الشكل 2-122) .

$$S_9 = \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

$$\Sigma M_{IV} = 0 : -\frac{3}{2} S_{13}\, l + B\, l = 0 : S_{13} = P$$

القضيب 11 هو قضيب صفر ، لقد كان بالامكان معرفة ذلك دون اجراء أية حسابات وذلك كما يـــلي : باقتطاع العقدة VII من الجائز الشبكي (شكل 2-182a,c) بواسطة قطع مدور (شكل 2-183) ثم تطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي عليها ينتج ان :

$$S_{11} = 0$$



شكل 2-183

مثال 88 :

المعطى : P , l (شكل 2-184) .

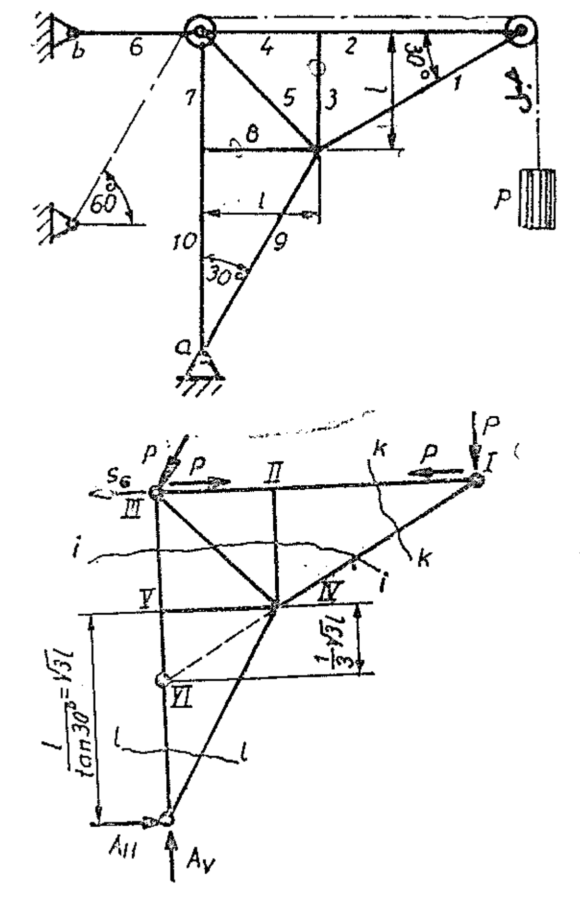
المطـــلوب :

ايجاد ردود افعال المساند وقـوى القضبان في الرافعة الشبكية الممثـــلة في الشكل (2-184) (تهمل انصاف اقطار البكرات ويهمل الاحتكاك في الحبال) .

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجائز الشبكي ككل ؛ والذي يعتبر جسماً صلباً (شكل 2-184) يتم الحصول على المعادلات التالية :



شكل 2-184

$$\Sigma V = 0 : A_v - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, P - P = 0$$

$$\Sigma H = 0 : A_H - S_6 - \frac{1}{2} P + P - P = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : \left(S_6 + \frac{1}{2} P \right)\left(1 + \sqrt{3}\right) l - P(1+\sqrt{3})l = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم تعيين ردود أفعال المساند :

$$A_H = P ; \quad A_v = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) P ; S_6 = \frac{1}{2} P$$

٢ ـ قوى القضبان :

قضبـان الصفر :

بتطبيق شروط التوازن على العقد II , V المقتطعة بقطع مدور ، ينتج :

$$S_3 = S_8 = 0$$

كما ينتج أيضاً ان :

$$S_2 = S_4 \; ; S_7 = S_{10}$$

قطع ريتر i—i :

$$\Sigma_{IV} = 0 \; : \sqrt{3}\, A_H\, l - A_v\, l - S_7\, l = 0$$

$$\Sigma M_{III} = 0 : A_H(1+\sqrt{3})\, l + \frac{1}{2} S_1\, l + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, S_1\, l = 0$$

$$\Sigma M_{VI} = 0 : \frac{2}{3}\sqrt{3}\, A_H\, l + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, S_5\, l + \frac{1}{2}\sqrt{2} S_5 \frac{1}{3}\sqrt{3}\, l = 0$$

بحل مجموعة المعادلات السابقة ينتج :

$$S_7 = -(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})\, P$$

$$S_1 = -2\, P$$

$$S_5 = -\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)\, P$$

قطع ريتر k-k :

$$\Sigma M_{IV} = 0 \quad : \quad P\, l - \sqrt{3}\, P\, l + S_2\, l = 0 \quad : \quad S_2 = (\sqrt{3} - 1)\, P$$

قطع ريتر $l-l$:

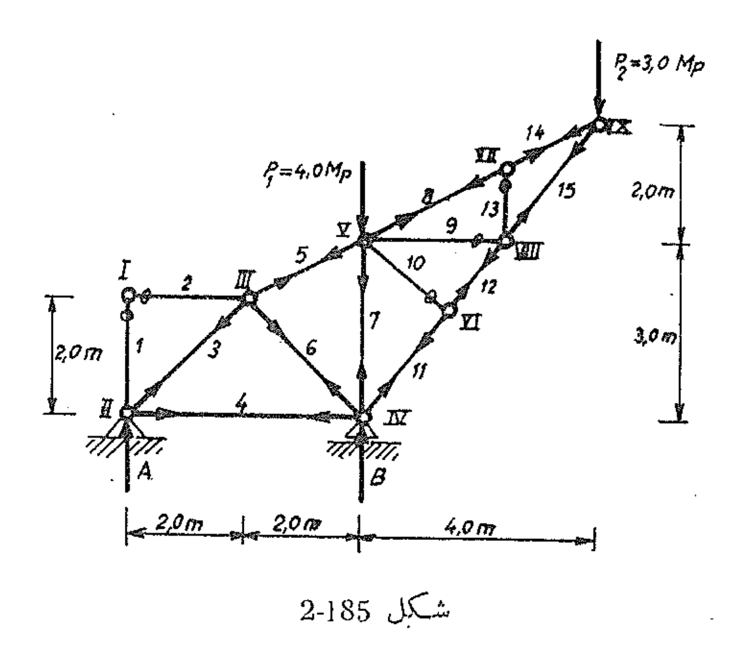
$$\Sigma M_V = 0 : \; \sqrt{3} A_H\, l + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, S_9\, l = 0 \; : \; S_9 = -2\, P$$

مثـال 89 :

المطلوب : حساب قوى قضبان الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2.185).

الحـل :

قبل القيام بأية قطوع لتعيين قوى القضبان،يثبت لأول نظرة بأن القضبان 1 , 2 , 13 , 9 , 10 هي قضبان صفر .



شكل 185-2

من حقيقة كون :

$$S_{13} = S_9 = S_{10} = 0$$

ينتج أن :

$$S_{14} = S_8$$

وأن

$$S_{15} = S_{12} = S_{11}$$

لوقوع حامل القوة p_1 على اتجاه القضيب S_7 فان :

$$S_8 = S_5$$

١ ــ ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجسم ككل يتم التوصل للعلاقات التالية :

$$\Sigma M_b = 0 \quad : \quad 4A + 4P_2 = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \quad : -4B + 4P_1 + 8P_2 = 0$$

بحلها يتم تعيين ردود افعال المساند :

$$A = -3{,}0 \text{ Mp} \quad ; \quad B = 10{,}0 \text{ Mp}$$

بتطبيق شرط توازن القوى الشاقولية (شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي) :

$$\Sigma V = 0 \;:\; A+B-P_1-P_2 = 0$$

يتم تدقيق النتائج السابقة والتأكد من صحة ردود أفعال المساند المحسوبة .

٢ - قوى القضبان

العقدة II :

بتطبيق شروط توازن القوى على العقدة II المقتطعة (بقطع مدور) يتم التوصل المعادلات التالية:

$$\Sigma H = 0 : S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_4 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + A = 0$$

بحلها يتم تعيين قوى القضبان التالية :

$$S_3 = 3{,}0\,\sqrt{2}\ \text{Mp} \;;\; S_4 = -\,3{,}0\ \text{Mp}$$

العقدة III :

باجراء قطع مدور على العقدة III وتطبيق شروط توازن القوى عليها يتم التوصل الى المعادلات الآتية :

$$\Sigma H = 0 : S_5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + (S_6 - S_3)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - (S_6 + S_3)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم تعيين قوى القضبان التالية :

$$S_5 = 2{,}0\ \sqrt{5}\ \text{Mp} = S_8 = S_{14}$$

و

$$S_6 = -\,1{,}0\,\sqrt{2}\,\text{Mp}$$

العقدة IV :

بما أن

$$S_7 = -P_1 = -4,0 \text{ Mp}$$

فان شرط توازن القـوى بالاتجاه الافقي المطبق على قوى العقـــدة IV المقتطـعة (بقطع مدور) يعطي :

$$\Sigma H = 0 \;:\; -S_4 - S_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{11} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 0$$

من هذه المعادلة ينتج :

$$S_{11} = -1,0\sqrt{41} \text{ Mp} = S_{12} = S_{15}$$

أما الشرط الثاني لتوازن القوى بالاتجاه الشاقولي فهو :

$$\Sigma V = 0 : S_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_7 + S_{11} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} + B = 0$$

العقدة IX :

بتطبيق شروط التوازن على العقدة IX المقتطعة من الجائز الشبكي بواسطة قطع مدور يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 \;:\; S_{14} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + S_{15} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 0$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; S_{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + S_{14} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} + P_2 = 0$$

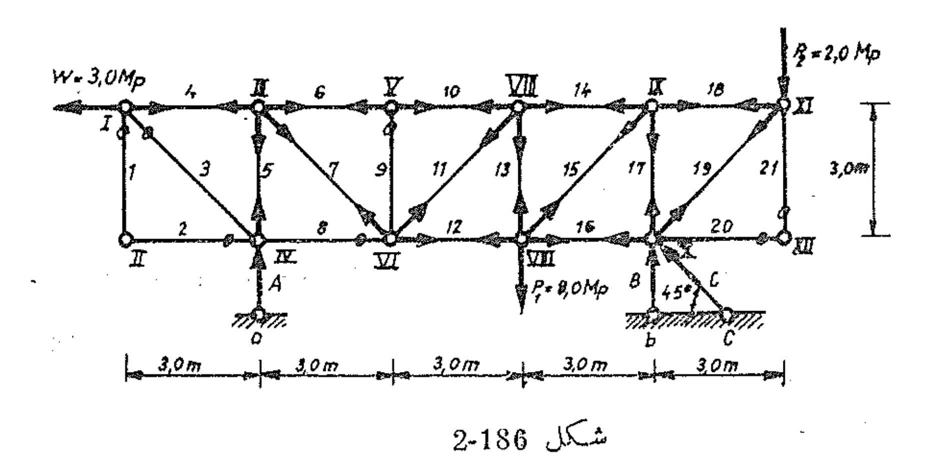
والتي تعتبر تدقيقاً للنتائج المحسوبة .

مثـــال 90 :

المطلوب : حساب قوى القضبان في الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-186) .

الحـــــل :

بالقاء النظرة الاولى على الجائز الشبكي يتبين أن القضبان 1 , 2 , 3 , 8 , 9 , 20 , 21 هي قضبان صفر .



شكل 2-186

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجائز الشبكي ككل يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\Sigma M_b = 0 \; : \; -A \, . \, 9{,}0 + W \, . \, 3{,}0 + P_1 \, . \, 3{,}0 - P_2 \, . \, 3{,}0 = 0$$

$$\Sigma H = 0 \; : \; - W - C \, . \, \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; + A - P_1 - P_2 + B + C \, . \, \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

بحل مجموعة المعادلات السابقة يتم تعيين ردود افعال المساند :

$$A = 3{,}0 \text{ Mp} \quad ; \quad B = 10{,}0 \text{ Mp} \quad ; \quad C = -3{,}0 \; \sqrt{2} \text{ Mp}$$

قوى الفضبان :

العقدة IV :

باجراء قطع مدور على العقدة IV وبتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي عليها ، ينتج :

$$\Sigma V = 0 \; : \; S_5 = - A = - 3{,}0 \text{ Mp}$$

العقدة I :

بتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الافقي على العقدة I المقتطعة (بقطع مدور) ينتج :

$$\Sigma H = 0 \; : \; S_4 = W = 3{,}0 \text{ Mp}$$

باجراء قطع ريتر يمر بالقضبان 6 , 7 , 8 وبعد تطبيق شروط التوازن على الجزء الايسر المقطوع من الجائز الشبكي ينتج :

$$\Sigma V_{IV} = 0 \; : \; W \,.\, 3{,}0 - A \,.\, 3{,}0 - S_6 \,.\, 3{,}0 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; A - S_7 \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

بحل مجموعة المعادلات السابقة يتم تعيين قوى القضبان التالية :

$$S_6 = 0 = S_{10} \quad ; \quad S_7 = 3{,}0 \sqrt{2} \text{ Mp}$$

باجراء قطع ريتر يمر بالقضبان 10 , 11 , 12 وتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر يتم التوصل لمجموعة المعادلات التالية :

$$\Sigma M_{VII} = 0 \; : \; A \,.\, 6{,}0 - S_{12} \,.\, 3{,}0 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; A + S_{11} \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

وبحلها يتم تعيين قوى القضبان الآتية :

$$S_{12} = 6{,}0 \quad ; \quad S_{11} = -3{,}0 \sqrt{2} \text{ Mp}$$

باجراء قطع ريتر يمر بالقضبان 12 , 13 , 14 وتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر من الجائز يتم التوصل للمعادلة الآتية :

$$\Sigma V = 0 \; : \; A - S_{13} = 0$$

من هذه المعادلة يتم تعيين قوة القضيب :

$$S_{13} = 3{,}0 \text{ Mp}$$

وباجراء قطع ريتر يمر بالقضبان 14 , 15 , 16 وتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر من الجائز الشبكي ، يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$\Sigma M_{VIII} = 0 \; : \; -W \,.\, 3{,}0 + A \,.\, 6{,}0 + S_{14} \,.\, 3{,}0 = 0$$

$$\Sigma M_{XI} = 0 \; : \; +A \,.\, 9{,}0 - P_1 \,.\, 3{,}0 - S_{16} \,.\, 3{,}0 = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; +A - P_1 + S_{15} \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

والتي تعطي بعد الحل ، قوى القضبان التالية :

$$S_{14} = -3{,}0 \text{ Mp} \quad ; \quad S_{16} = 1{,}0 \text{ Mp} \quad ; \quad S_{15} = 5{,}0\sqrt{2} \text{ Mp}$$

بقطع القضبان 16 , 17 , 18 بواسـطة قطع ريتر وبتطبيق شروط التـوازن على القطع الايسر ينتج :

$$\Sigma V = 0 \; : \; +A - P_I - S_{17} = 0$$

$$\Sigma M_X = 0 \; : \; W \,.\, 3{,}0 + A \,.\, 9{,}0 - P_I \,.\, 3{,}0 + S_{18} \,.\, 3{,}0 = 0$$

بحل مجموعة المعادلات السابقة يتم تعيين قوى القضبان التالية :

$$S_{17} = -5{,}0 \text{ Mp} \quad ; \quad S_{18} = 2{,}0 \text{ Mp}$$

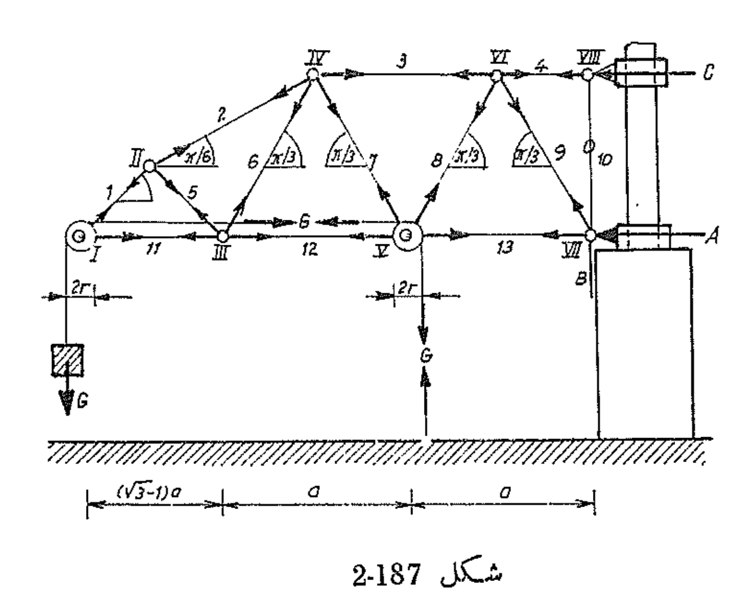
العقدة XI :

وأخيراً وباجراء قطع مدور على العقدة XI يتم تعيين قوة القضيب المجهولة الاخيرة :

$$S_{19} = -2{,}0\sqrt{2} \text{ Mp}$$

مثـال 91 :

المطلوب : حساب قوى قضبان الرافعة الشبكية الممثلة في الشكل (187-2) .



شكل 187-2

الحـــل :

ان قوة الحبل في كل مكان منه هي G .

١ ـ ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الرافعة ككل يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\Sigma V = 0 : B - 2G = 0$$

$$\Sigma M_{VII} = 0 : C \frac{\sqrt{3}}{2} a + G \left[r + \left(\sqrt{3} - 1\right) a + 2a + a - r \right] = 0$$

$$\Sigma H = 0 : C + A = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم تعيين ردود أفعال المساند :

$$B = 2G \quad ; \quad A = - C = 4{,}309\, G$$

٢ ـ قوى القضبان :

ان القضيب 10 هو قضيب صفر .

العقدة I :

باجراء قطع مدور على العقده I وتطبيق شروط التوازن على القوىالمؤثرة عليها والقوىوالموجودة في القضبان المتلاقية فيها يتم التوصل لمجموعة المعادلات التالية :

$$\Sigma V = 0 \ : \ S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - G = 0$$

$$\Sigma H = 0 : \ S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{11} + G = 0$$

بحلها يتم تعيين قوى القضبان التالية :

$$S_1 = 1.414\, G \quad ; \quad S_{11} = - 2\, G$$

باجراء قطع ريتر يمر بالقضبان 2 , 5 , 11 وتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر ينتج :

$$\Sigma V = 0 : G - S_2 . 0,5 + S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma H = 0 : G + S_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{11} = 0$$

بحل المعادلتين يتم التوصل لقوى القضبان :

$$S_2 = 1,464 \, G \quad , \quad S_5 = - 0,379 \, G$$

العقدة III :

بتطبيق شروط التوازن على العقدة III المقتطعة من الجائز الشبكي ينتج :

$$\Sigma V = 0 : S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_6 \frac{3}{2} = 0$$

من هذه المعادلة يتم تعيين قوة القضيب :

$$S_6 = 0,309 \, G$$

اما البقية الباقية من قوى القضبان فيتم الحصول عليها بواسطة قطع ريتر الذي يمر بالقضبان 3 , 7 , 12 :

$$\Sigma M_{IV} = 0 : S_{12} \frac{a}{2} \sqrt{3} + G \left[r + (\sqrt{3} - 1) a + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} a - r \right] = 0$$

$$\Sigma M_{V} = 0 : S_3 \frac{a}{2} \sqrt{3} - G \left[r + (\sqrt{3} - 1) a + a - r \right] = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_7 \frac{\sqrt{3}}{2} + G = 0$$

بحل مجموعة المعادلات ينتج :

$$S_{12} = - 2,423 \, G \quad ; \quad S_3 = 2 \, G \quad ; \quad S_7 = - 1,155 \, G$$

وكذلك بواسطة القطع الذي يمر بالقضبان 3 , 8 , 13 :

$$\Sigma M_{VI} = 0 \; : \; S_{13}\,\frac{a}{2}\sqrt{3} + G\left[r\,(\sqrt{3}-1)\,a + \frac{3}{2}\,a + \frac{a}{2} - r\right] = 0$$

$$\Sigma V \;\; = 0 \; : \; S_8\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\,G \qquad\qquad = 0$$

بحل هاتين المعادلتين يتم تعيين قوى القضبان :

$$S_{13} = -\,3{,}155\,G \quad ; \quad S_8 = 2{,}309\,G$$

وأخيراً وبسهولة وبالاستعانة بالعقدة VIII وتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الافقي عليها وكذلك بالعقدة VII وتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي عليها ، يتم التوصل للمعادلات التالية :

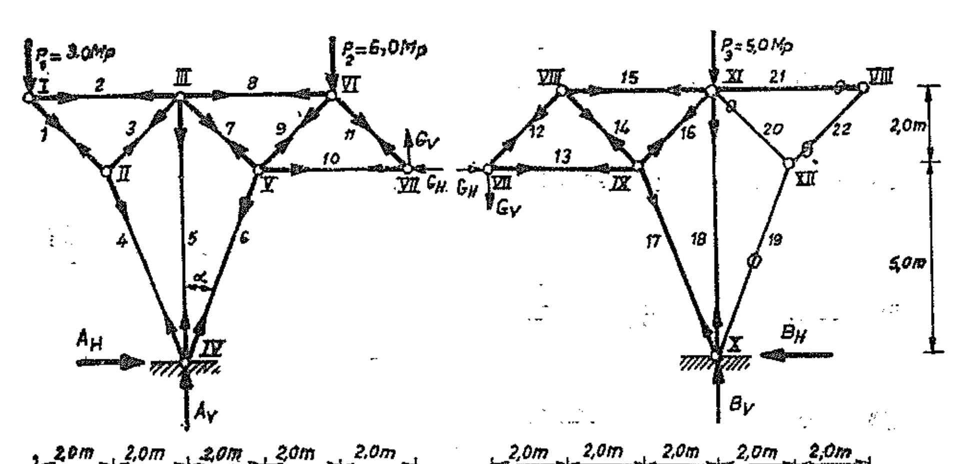
$$S_4 + C = 0 \quad ; \quad S_9\,\frac{\sqrt{3}}{2} + B = 0$$

بحل هاتين المعادلتين ينتج :

$$S_4 = -\,C = 4{,}309\,G \quad ; \quad S_9 = -\,2{,}309\,G$$

مثال 92 :

المطلوب : حساب قوى قضبان الجائز الشبكي ثلاثي المفصل (شكل 2-188) .



شكل 2-188

الحـل :

١ - ردود أفعال المساند وقوى المفصل :

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ينتج :

$$\Sigma M_X = 0 \;:\; A_v = 8{,}0 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_{IV} = 0 \;:\; B_v = 6{,}0 \text{ Mp}$$

وبتطبيق شروط التوازن على الجملة بعد قطعها عنـد نقطة التمفصل g (العقدة VII) الى شطرين ينتج :

$$M_{gr} = 0 \;;\; B_H = 1{,}2 \text{ Mp}$$

$$M_{gl} = 0 \;:\; A_H = 1{,}2 \text{ Mp}$$

وبتطبيق شروط التوازن على الشطر الايمن او الشطر الايسر ينتج :

$$\Sigma H = 0 \;:\; G_H = 1{,}2 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 \;;\; G_v = 1{,}0 \text{ Mp}$$

القرص الشبكي الايسر :

قطع مدور حول العقدة I :

$$\Sigma H = 0 \;;\; S_2 + S_1 \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma V = 0 \;;\; P_1 + S_1 \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_2 = 3{,}0 \text{ Mp} \;;\; S_1 = -3{,}0\,\sqrt{2} \text{ Mp}$$

قطع مدور حول العقدة II :

$$\Sigma H = 0 \;:\; (S_1 - S_3)\,\frac{\sqrt{2}}{2} - S_4 \,.\, \frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\Sigma V = 0 \;:\; (S_1 + S_3)\,\frac{\sqrt{2}}{2} - S_4 \,.\, \frac{5}{\sqrt{29}} = 0$$

$$S_3 = -\frac{9{,}0\,\sqrt{2}}{2} \text{ Mp} \quad , \quad S_4 = -\frac{6{,}0\,\sqrt{29}}{7} \text{ Mp}$$

قطع مدور حول العقدة IV :

$$\Sigma H = 0 \; : \; A_H + (S_6 - S_4)\,\frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\Sigma V = 0 \; : \; A_v + (S_4 + S_6)\,\frac{5}{\sqrt{29}} + S_5 = 0$$

$$S_6 = -\frac{51,0}{35}\cdot\sqrt{29}\ \text{Mp} \quad ; \quad S_5 = \frac{25,0}{7}\ \text{Mp}$$

قطع مدور حول العقدة VII :

$$\Sigma H = 0 : \; S_{10} + S_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + G_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : \; S_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + G_v = 0$$

$$S_{10} = -\frac{1,0}{5}\ \text{Mp} \; ; \; S_{11} = -\,1,0\,\sqrt{2}\ \text{Mp}$$

قطع ريتر يمر بالقضبان 8 , 9 , 10 (الجزء الايمن) :

$$\Sigma M_V = 0 : -S_8 \cdot 2,0 - G_v \cdot 4,0 + P_2 \cdot 2,0 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : \; + S_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + P_2 - G_v = 0$$

$$S_8 = 4,0\ \text{Mp} \quad S_9 = -\,5,0\,\sqrt{2}\ \text{Mp}$$

قطع مدور حول العقدة V :

$$\Sigma V = 0 : -S_6 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} + (S_7 + S_9)\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_7 = -\frac{16,0}{7}\sqrt{2}\ \text{Mp}$$

أما شرط توازن القوى بالاتجاه الافقي :

$$\Sigma H=0: -S_6 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} + (S_9 - S_7)\frac{\sqrt{2}}{2} + S_{10} = 0$$

فيعتبر تدقيقاً للنتائج .

قطع مدور حول العقدة III : ان قوى القصبان التي يتضمنها شرطي التوازن:

$$\Sigma H=0 : -S_2 + S_8 + (S_7 - S_3)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma V=0 : +(S_3+S_7)\frac{\sqrt{2}}{2} + S_5 = 0$$

هي قيم معلومة ولذلك فهي تعتبر كتدقيق على صحة النتائج .

القرص الشبكي الايمن:

بشكل فوري يستطاع التأكد من أن :

$$S_{19} = S_{20} = S_{21} = S_{22} = 0$$

قطع مدور حول العقدة VII :

$$\Sigma H = 0 : G_H + S_{13} + S_{12}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : -G_v + S_{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_{12} = 1{,}0\ \sqrt{2}\ Mp \ : S_{13} = -\frac{11{,}0}{5} Mp$$

قطع ريتر يمر بالقضبان 13 , 14 , 15 (الجزء الايسر) :

$$\Sigma V = 0 : G_v + S_{14}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma M_{IX} = 0 : S_{15} \cdot 2{,}0 - G_v \cdot 4{,}0 = 0$$

$$S_{14} = -1{,}0\ \sqrt{2}\ Mp \ ; S_{15} = 2{,}0\ Mp$$

قطع مدور حول العقدة XI :

$$\Sigma H = 0 : S_{15} + S_{16} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_{18} + S_{16} \frac{\sqrt{2}}{2} + P_3 = 0$$

$$S_{16} = -2{,}0 \sqrt{2} \text{ Mp} ; S_{18} = -3{,}0 \text{ Mp}$$

قطع مدور حول العقدة IX :

$$\Sigma V = 0 : (S_{14} + S_{16}) \frac{\sqrt{2}}{2} - S_{17} \frac{5}{\sqrt{25}} = 0$$

$$S_{17} = -\frac{3}{5} \sqrt{29} \text{ Mp}$$

أما الشرط الثاني لتوازن القوى :

$$\Sigma H = 0 : -S_{13} + (S_{16} - S_{14}) \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{17} \frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

فيعتبر كتدقيق على صحة النتائج .

قطع مدور حول العقدة X :

يعتبر شرط التوازن :

$$\Sigma H = 0 : S_{17} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} + H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_{17} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} + S_{18} + B = 0$$

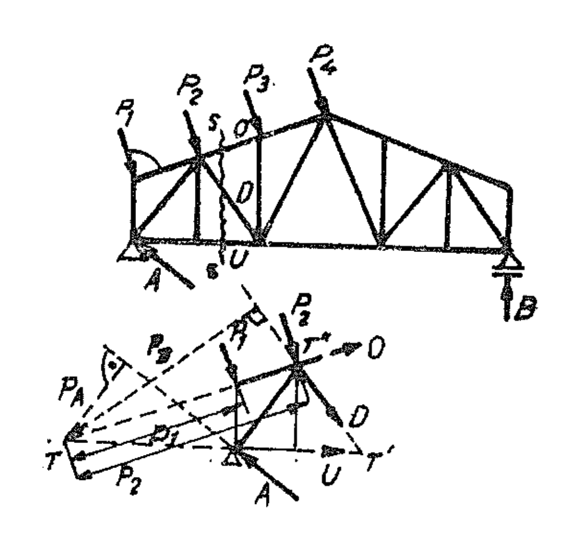
كتدقيق على صحة القوى المحسوبة .

α ـ ٢ إيجاد قوى القضبان تخطيطياً

α ـ ٢ ـ ١ طريقة كولمان

يتم إيجاد ردود أفعال مساند الجائز الشبكي بنفس الطريقة التي تم فيها ايجاد ردود أفعال مساند الجائز البسيط وذلك اما بطريقة تحليلية او بطريقة تخطيطية . لهذا السبب يمكن اعتبارهـا قيماً معلومة . لايجاد قوة القضيب D من الجائز الشبكي المبين في الشكل (2-189) والمحمل بحمـولة ما ، يقطع الجائز الشبكي في مكان ما بحيث يكون القضيب D (المطلوب حساب قوته) من بين القضبان المقطوعة شريطة أن لا يزيد عـــدد القضبان المقطوعة ، عدا القضيب D ، على اثنين .

ليؤخذ من الجائز الشبكي المقطوع ، الجزء الايسر مثلا ، ثم اجمع القوى الخارجيـة المؤثرة



شكل 2-189

عليه (هنا القوى A_v و P_1) فيتم تعيين المحصلة R_l . بما ان الجائز الشبكي قبـل القطع كان متوازناً ، لذلك ينبغي ان يكون كل جزء من اجزاءه بعـــد القطع متوازناً أيضاً ، اي يجب ان تحقق قوى القضبان المقطوعة O , D , U مع محصـلة القوى الخارجيـة R_l شروط التوازن ، اما قيم قوى القضبان الثلاثة هذه فيتم الحصول عليها بأن يفتش على ثـلاثة قوى ، حواملها هي محاور القضبان الثلاثة المقطوعة وتحقق مع المحصلة R_l حالة التوازن (لقـد أصبحت المسألة الآن هي تحقيق حالة التوازن بين المحصـلة R_l وبين ثلاثة قوى مجهـولة القيمة وذات حوامل معلومة) .

لقد تم في الفقرة ١ - ٣ - ٢ §(أ) معالجة هذه المشكلة وحسبه ينبغي اتباع الخطوات التالية:
يمدد ، في مخطط المكان ، حامل القـــوة O وحامل المحصلة R_l حتى يتقاطعا مع بعض ثم توصل نقطة التقاطع هذه مع نقطة تقاطع حاملي القوتين O , U بذلك يتم الحصــول على المستقيم g .

تحقق ، في مخطط المكان ، شروط التوازن بين محصلة القوى الخارجية R_l وبين قوتين حواملها O , g . بعد الحصول على تلك القوى يستعاض عن القوة ذات الحامل g (المسماة بالقـــوة المساعدة لكولمان) بقوتين حواملها U , D تكافئها . اما جهة دوران الاسهم ، في مضـلع القوى ، فيجب ان تكون مستمرة ، أن اي يغلق المضلع ويكون دوران الاسهم متتالياً . بذلك يكون قد تم الحصول على قوة القضيب D ومعها ايضا القوتان U , O .

نتجه القوة O الى داخل القضيب المقطوع (داخلة فيه) لذا فهي قوة ضاغطة اما القوى D , U فتتجه الى خارج القضيب المقطوع (خارجة منه) لذا فهي قوى شادة . ان لطريقة الانشـاء هذه . على القطع المدروس ، ثلاثة امكانيات للتطبيـق (الاولى : تقـاطع القوى U , D ثم O , R والثانية : D , O ثم U , R والثالثة : تقاطع القوى U , O ثم D , R) كلهـا تؤدي لنفس النتيجة . تسمى هذه الطريقة باسم مكتشفها العالم كولمان وهي قليلة القيمة بالنسبة للطريقة التي ستليها (طريق ماكسويل - كريمونا) وتستعمل فقط عندما تكون امكانية الحصول على محصلة القوى الخارجية في الجزء المقطوع من الجائز الشبكي فورية .

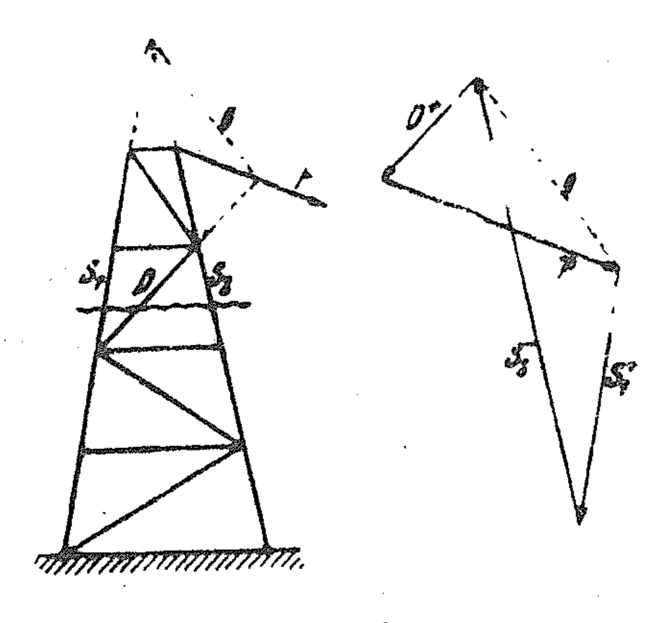
مثـال 93 :

حمل الجـائز الشبكي المرسوم في الشكل (2-190) والذي يمثـــل جدار عمـود كهربـائي (عمود نقل قدرة) بحمولة وحيدة P (لتكن هذه القوة هي على سبيـل المثـال قوة شد حبل فولاذي) .

المطلوب : حساب قوى القضبان S_1 , S_2 , D الناتجة عن تلك الحمولة .

الحـل :

باستخدام طريقة كولمان يتم بسرعة الحصول على قوى القضبان المطلوبة . باقتطاع الجائز الشبكي بواسطة قطع يمر بالقضبان المطلوب حساب القوى فيها وهي S_1 , S_2 , D وبحيث ينفصل الجزء العلوي عن بقية الجائز الشبكي ، يتبين وجوب كون القوى P , S_1 , S_2 , D التي تؤثر على الجزء العلوي المقطوع ، متوازنة .



شكل 2-190

بتمديد حاملي القوتين S_1 , S_2 حتى يتقاطعا ثم بوصل نقطة التقاطع هذه مع نقطة تقاطع حامل القوة P مع حامل القوة D (يتم الحصول على المستقيم g) . بعد ذلك لتحقق ، في مضلع القوى ، حالة التوازن بين القوة P وبين قوتين تقع على الحوامل D , g ثم لتحلل بعد ذلك القوة التي يتم الحصول عليها على الحامل g الى مركبتين على الحوامل S_1 , S_2 . ينبغي ان يكون اتجاه دوران مضلع القوى مستمراً ويحدده اتجاه القوة الخارجية P .

تتجه القوى S_1 , D الى خارج القضيب المقطوع لذا فهي قوى شادة أما S_2 فتتجه الى داخل القضيب المقطوع ، لذا فهي قوة ضاغطة .

بنفس الطريقه يمكن أيضاً تعيين قوى القضبان المتبقية في حالة الرغبة في معرفتها . (ان الجائز الشبكي المعطى هو جائز مقرر ستاتيكياً ، مسنده الايسر ثابت اما مسنده الايمن فهو مسند نوسي) .

α - ٢ - ٢ طريقة مخطط ماكسويل - كريمونا (اوطريقةمعكوس مخطط القوى)

غالباً ما يتم ايجاد قوى القضبان في جائز شبكي بطرق تخطيطية وذلك بالاستعانة بعدةمضلعات للقوى او ايضاً بواسطة مضلع واحد للقوى فقط .

بطريقة مخطط القوى (وباستعمال مضلعات القوى) ، وبعد أن يتم ايجاد ردود افعال المساند

وقوى التمفصل . يصار لايجاد قوى القضبان بأن تحقق القوى المؤثرة (القوى الخارجية والقوى الداخلية) على العقدة الواحدة شروط التوازن .

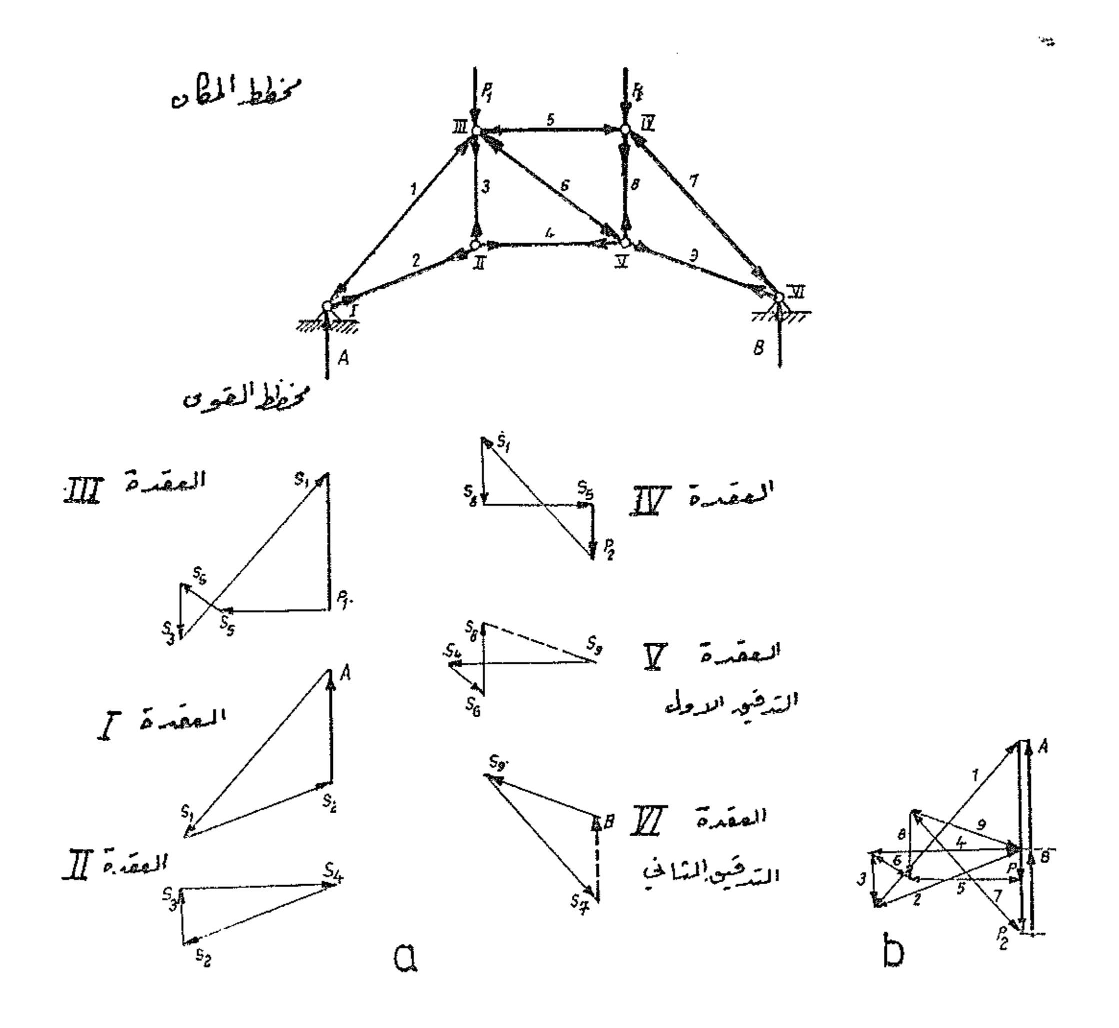
في الجائز الشبكي المتوازن ينبغي ان تكون كل عقدة مقتطعة من عقده متوازنة ايضاً .تخطيطياً يعني هذا ان مضلع قوى كل عقدة (القوى الخارجية وقوى القضبان) يجب ان يكون مغلقاً (اذاً يتشكل لكل عقدة مضلع مغلق للقوى) . يمكن استخدام هذا الشرط لايجاد قـــوى قضبان العقدة في حالة كون المجهول منها لا يزيد على اثنين (وذلك لان هذا الشرط التخطيطي انما يضم شرطي توازن مجموعة القوى المستوية المركزية وهما $\Sigma H=0$, $\Sigma V=0$)• بعد ان يتم تعيين اتجاهات قوى القضبان الذي يتم ضمن مخططات القوى ، سوف تنقل هذه الاتجاهات الى مخطط المكان ، حيث تمثل قوة الشد بسهم يخرج من العقدة (يشد العقدة) أما قوة الضغط فتمثل بسهم يدخل الى العقدة (يضغط العقدة) .

لشرح هذه الطريقة سوف تتم دراسة الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2.191 a) دراسة شبه مفصلة وللقيام بذلك سوف يبتدأ بتعيين قوى القضبان في العقدة I ، حيث ينبغي ان تتحقق حالة التوازن بين قوة رد الفعل A وبين القوى S_1 , S_2 التي علمت حواملها (بمعرفة اتجـاه قضبانها) . بعد رسم مضلع القوى المغلق التابع لها يتبين ان القضيب 1 هـو قضيب مضغوط أما القضيب 2 فهو قضيب مشدود .

اما في العقدة II فان قوة القضيب S_2 معلومة وينبغي ان تتحقق حالة التوازن بينها وبين قوى القضبان S_3 , S_4 .

بعد ذلك وبالاستعانة بالقوى الخارجية وبقوى القضبان S_3 , S_4 التي اصبحت الان معـــلومة وبعد تحقيق التوازن على العقدة III يتم إيجاد قوى القضبان الضاغطة S_5 , S_6 . بتحقيق حالة التوازن بين القوة المعلومة S_5 والقوة الخارجية P_3 وبين بقية قوى قضبان العقدة IV يـــتم تعيين القوة الضاغطة S_7 والقوة الشادة S_8 .

يعطي تحقيق التوازن على العقدة V قوة القضيب S_9 كما انه يعطي في نفس الوقت أول تدقيق للحل التخطيطي . ينبغي ان تحدد قوى القضبان المعلومة S_4 , S_6 , S_8 حامل القوة S_9 ،في مخطط القوى وذلك بحيث ينطبق هذا الحامل على اتجاه القضيب S_9 . وأخيراً وعلى العقـــدة VI يمكن القيام بالتدقيق الثاني والثالث الذي يتم الحصول عليه اثناء تعيين قوى القضبان على شكل خطوات وذلك لان القوة التي تنتج عن القوى S_9 , S_7 ينبغي ان تكون هي قـوة رد الفعل B . فمثلا ينبغي ان تكون القيمة وكذلك الاتجاه صحيحين .



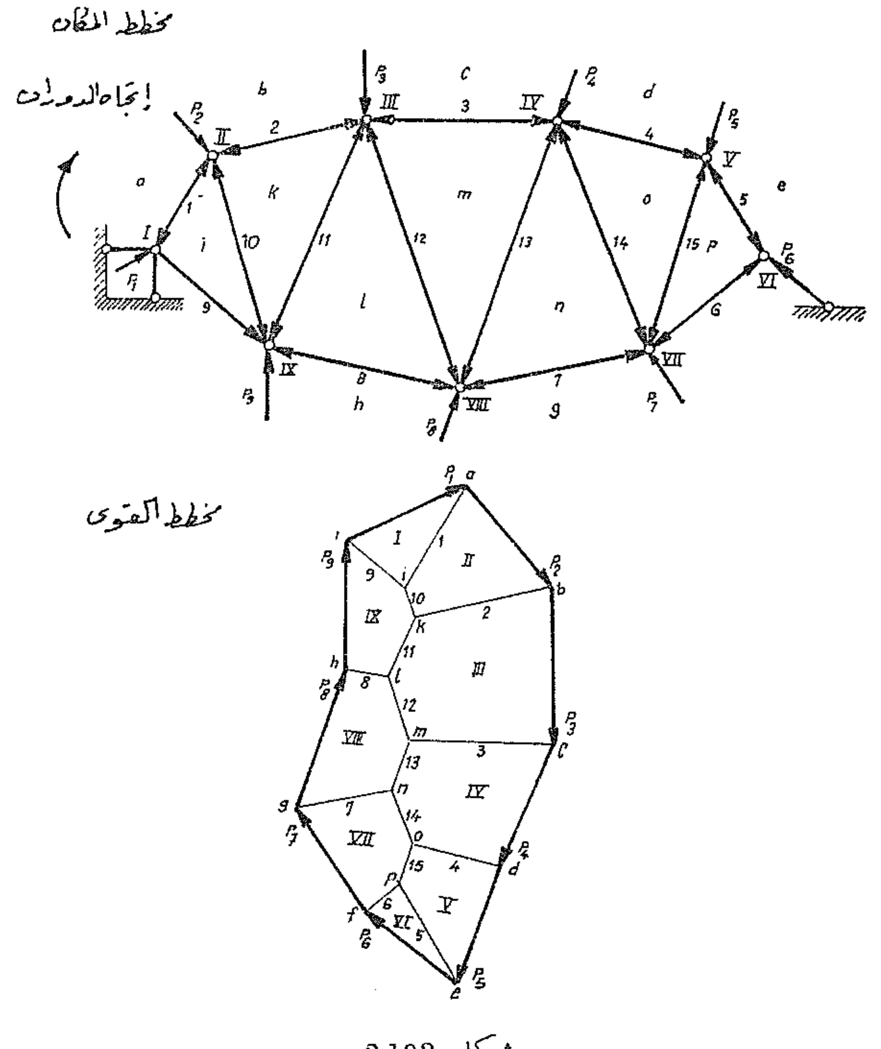
شكل 2-191

ان مساوىء هذه الطريقة (طريقة مضلعات القوى) هي وجوب نقل قوى القضبان التي يتم تعيينها (قيمة ومنحاً واتجاهاً) بالطريقة التخطيطية الى مضلعات قوى أخرى وما يترتب عن ذلك من عدم الدقة الكافية لاعطاء القوة بعد النقل قيمتها الصحيحة . لهذا السبب ولتفادي عدم الدقة الكافية ، يفضل توحيد مضلعات القوى مع بعضها بحيث تظهر القوة الواحدة مرة واحدة فقط وبذلك ينتج عنها مضلعاً متحداً للقوى . اما هذا فيتطلب ترتيبا قانونياً محكماً لمضلعات القوى الافرادية التي تم في الشكل (1-191a) ، اخذها بعين الاعتبار . لقد حوى الشكل (2-191 b) كافة مضلعات القوى الافرادية في مضلع واحد ، فالقوة الواحدة وردالفعل الواحد تظهر فيه مرة واحدة فقط . تعود امكانية تعيين كافة قوى القضبان ضمن مخطط واحد للقوى الى العلاقة العكسية القائمة بين مخطط المكان ومخطط القوى . يسمى مخطط القوى المعكوس (العكسي)، نسبة للعالمين ماكسويل(MAXWELL) وكريمونا (CREMONA)**بمخطط ماكسويل ـ كريمونا** . يلزم اثناء انشاء مخطط ماكسويل ـ كريمونا مراعاة القواعد التالية :

١ ـ ترسم الحمولة المعطاة وردود افعال المساند وقوى التمفصل التي تشكل فيا بينها حالةالتوازن في مضلع القوى بنفس التسلسل الذي ينتج عن الدوران حول جزعي (وتري) الجائزالشبكي باتجاه عقارب الساعة او بعكس اتجاه عقارب الساعة . يفضل عادة أخذ اتجاه عقارب الساعة. ينبغي ان تكون عقد الجائز الشبكي الداخلية غير محملة .

٢ ـ تضاف كافة القوى التي تؤثر على العقدة الواحدة من الجائز الشبكي ، في مخطط المكان ، الى مضلع القوى بنفس التسلسل الذي يتم الحصول عليه بالدوران حول العقدة باتجاه عقارب الساعة أو بعكسها . لا يجوز اثناء التقدم من عقدة الى عقدة اخرى تبديل اتجاه الدوران فيها كما ينبغي ان يتطابق مع اتجاه الدوران الذي تم اختياره في القاعدة 1 السابقة .

لقد تم ، من اجل الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-192) رسم مخطط ماكسويل-كريمونا



شكل 2-192

لتسهيل تثبيت العلاقات بين مخطط المكان ومخطط القوى سوف يرمز للرؤوس (للزوايا) الخارجية التي تحدها حوامل القوى P_v وقضبان الجزع (الوتر) بالأحرف b , a -- , i كما سوف يرمز للرؤوس (للزوايا) الداخلية للجائز الشبكي بالاحرف j , k , -- , p . يقابل كل قضيب في مخطط المكان مستقيماً في مخطط القوى وبالعكس . ويقابل كل عقدة في مخطط المكان (والتي سترقم باعداد رومانية) مضلعاً مغلقاً في مخطط القوى وبالعكس . كما يقابل كل زاوية داخلية (رأس داخلي) وكل زاوية خارجية (رأس خارجي) (والتي سترقم باحرف لاتينيه) في مخطط المكان ، نقطة في مضلع القوى وبالعكس . تسمى العلاقات المتبادلة هذه التي تربط بين مخطط المكان ومخطط القوى **بالعلاقات العكسية** (reziproke Beziehungen) . بمقارنة الزوايا (الرؤوس) الداخلية والخارجية التي تصادف اثناء الدوران حول عقد الجائز الشبكي باتجاه الدوران المفروض مع النقاط التي تقابلها في مخطط القوى ، يستطاع اعطاء اشارة قوة القضيب ايضاً . فعلى سبيل المثال ان الانتقال من الزاوية الخارجية b الى الزاوية الخارجية c اثناء الدوران حول العقدة III ، يحدد ، في مخطط القوى ، القوة P_3 التي تؤثر على العقدة المذكورة (والتي تتجه الى العقدة). كما ان النقاط c , m ، في مخطط القوى ، والتي تقابل كل من الزاوية الخارجية c والزاوية الداخلية m تحدد قوة القضيب S_3 التي هي قوة ضاغطة . كما وان النقاط التي تقابل الزاوية الداخلية m , l في مخطط القوى ، هي التي تعطي قوة الضغط S_{12} والخ . بعد الانتهاء من انشاء مخطط ماكسويل ـ كريمونا يلجأ لكتابة النتائج النهائية (لقوى القضبان) دفعة واحدة ضمن جدول كالتالي :

v	1	2	3	4	5	6	7	8
Sv [Mp]								

للتطبيق العملي لمخطط ماكسويل ـ كريمونا ينبغي مراعاة الخطوط الرئيسية التالية :

١ ـ يرسم الجائز الشبكي ، بعد اختيار مناسب لمقياس الأطوال (ينبغي ان لا يكون المقياس المختار صغيراً جداً) . بعد ذلك ترقم العقد بأعداد رومانية (هكذا I , II و ... الخ) وترقم القضبان بأعداد عربية (هكذا 1 و 2 و ... والخ) .

٢ ـ تعين ردود أفعال المساند وقوى التمفصل تحليلياً أو تخطيطياً .

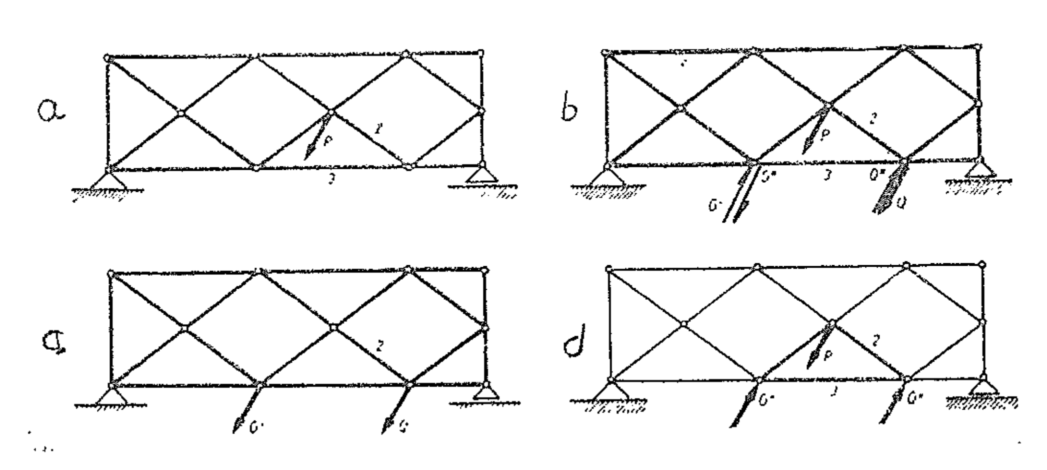
٣ ـ يرسم ، بعد اختيار مناسب لمقياس القوى ، مضلع قوى مغلق للقوى الخارجية (وحمولات العقد وردود افعال المساند) وذلك بأخذ القوى بالتسلسل الذي يتم الحصول عليه بالدوران حول الجائز الشبكي باتجاه عقارب الساعة المختار .

٤ ـ يبتدأ مخطط ماكسويل ـ كريمونا بعقدة ثنائية القضبان (عقدة يلتقي فيها قضيبان فقط) ويرسم للقوى التي تؤثر عليها والموجودة فيها (حمولات العقد وقوى القضبان) مضلعاً مغلقاً للقوى.

ترسم القوى المذكورة بالتسلسل الذي يتم الحصـول عليـه بالدوران حول العقدة باتجاه عقارب الساعة المختار (اتجاه الدوران المختار)

٥ ـ يفضل ، قبل الابتداء برسم مخطط ماكسويل ـ كريمونا ، تعيين قضبـان الصفر الموجودة في الجائز الشبكي .

لا يستطاع رسم مخطط ماكسويل ـ كريمونا الا عنـدما تؤثر الحمولة وردود افعال المساند على عقد الجزع (الوتر) . أما اذا صدف وكانت هناك عقد داخليـــة محملة (شكل 2-193 a) فبالامكان بالرغـم من ذلك تعيين قوى القضبـــان وذلك بالاستعانـــة بترتيب الحمـــولات (Belastungsumordnung) وعلى مرحلتين . للتمكن من القيـام بذلك يلزم اضافـة مجموعتين توازنتين هما (G'' , G') و (Q'' , Q') تطبق على عقـدتـين من عقد الجزع (الوتر) وبحيث تشكل مجموعة القوى (Q'' , G'' , P) فيما بينها مجموعة توازنية (شكل 2-193 b) . من اجـل الجائز الشبكي المحمـل بالقوى Q',G' فان مخطـط ماكـ ويـل ـ كريمونا (شكل 2-193 c) يعطي قوه القضيب S'ν . بعد ذلك يصار لرسم مخطط اخـر من اجـل المجموعـة التوازنيـة (Q'', G'', P) (شكل 2-193 d). بما ان هـذه الحمولة متوازنة فيما بينها لذلك لا تتشكل في الجائز الشبكي ردود افعـال مسـاند كما لا تظهـر قـوى الا في القضبـان 1 , 2 , 3 فقط وهي S''ν .



شكل 2-193

أما قوى القضبان النهائية فيتم التوصل اليها باستخدام مبدأ التنضد (مبدأ جمع الاثار) وذلك كما يـلي :

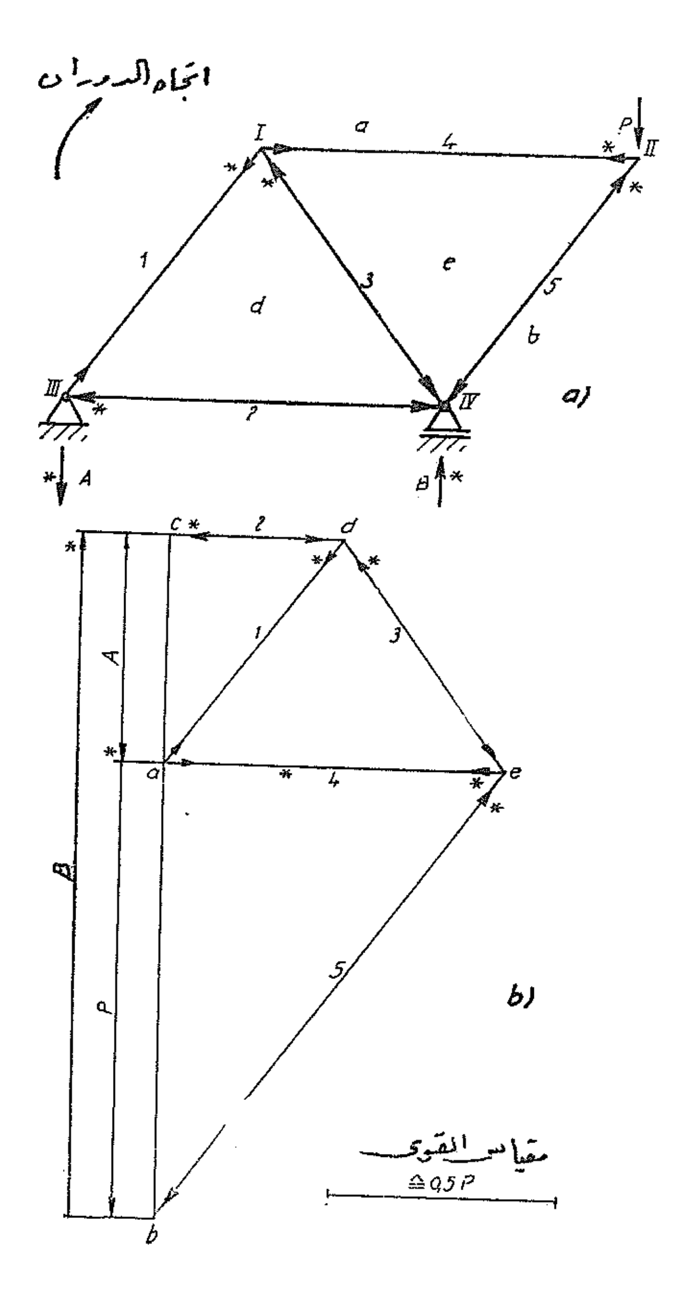
$$S_\nu = S'_\nu + S''_\nu \quad ; \quad \nu = 1,2,3$$

$$S_\nu = S'_\nu \quad ; \quad \nu \neq 1,2,3$$

مثال 94 :

المعطى : P وكافة ابعاد الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-194) .

المطلوب : إيجاد ردود افعال المساند وقوى القضبان .



شكل 2-194

الحل :

باختيار تسلسل العقد التالي II , I , III و IV أو II , I , IV , III يستطاع إيجاد قوى قضبان الجائز الشبكي .

ترسم القوة P بمقياس القوى (شكل 2-194) ثم ترسم بعدها قوى القضبان S_5 , S_4 بنفس التسلسل (وبعد اخذ اتجاه الدوران بعين الاعتبار) لتشكل مضلعاً مغلقاً للقوى . بما ان قوى العقدة II وهي P , S_5 , S_4 موجودة في حالة توازن لذلك ينبغي ان تأخذ في مضلع القوى نفس إتجاهها الفعلي . لقد أشير للاتجاه الفعلي للقوى بـ ★ (فعلى سبيل المثال إن المسافة 5 ، في مضلع القوى ، تشير الى القضيب 5 في مخطط المكان . لاتصال النهاية اليمنى للقضيب 5 بالعقدة II فلقد تم رسم ★ في مخطط القوى جانب رأس السهم التابع للقوة 5 وعلى النهاية العليا اليمينية) . تنقل اتجاهات الاسهم الى مخطط المكان . حسب مبدأ الفعل ورد الفعل ينبغي أن يعكس اتجاه قوى القضبان في النهاية الاخرى (I او IV) سواء في مخطط المكان أو في مضلع القوى (بذلك يتم الحصول على رؤوس الاسهم بدون ★) . وبهذه الطريقة يتم الحصول على الاصطلاحات التي تشير الى قوى الشد وقوى الضغط . بالامكان تتبع انشاء مخطط ماكسويل ـ كريمونا من خلال الشكل (2-19 4) .

النتائج :

$$S_1 = +\ 0{,}625\ P \quad ; \quad S_4 = +\ 0{,}750\ P \quad ; \quad A = 0{,}500\ P$$

$$S_2 = -\ 0{,}375\ P \quad ; \quad S_5 = -\ 1{,}250\ P \quad ; \quad B = 1{,}500\ P$$

$$S_3 = -\ 0{,}625\ P$$

التدقيق :

كما تم التنويه عنه سابقاً ، توجد هناك علاقة هندسية تربط بين الجملة الحاملة (والتي تعتبر حوامل القوى جزءاً منها) وبين مخطط القوى :

١ ـ يقابل كل خط في الجائز خطاً في مخطط القوى والعكس صحيح .

٢ ـ يقابل كل عقدة في الجائز الشبكي مضلعاً في مخطط القوى وبالعكس فكل زاوية في مخطط القوى يقابلها مضلع في الجائز . تنطبق هذه القاعدة ايضاً على زوايا مضلع القوى التي تلتقي فيها قوتان خارجيتان وقوة قضيب واحدة او عدة قوى .

يتألف المضلع في مخطط المكان من حوامل القوى الخارجية ومن محاور القضبان الواقعة بينها . يمكن اعتبار المضلع مغلقاً وذلك بتمديد القوى الخارجية حتى تتلاقى .

يدعى كل شكلين تربط بينهما تلك العلاقات الهندسية بالاشكال المعكوسة . تقابل ، في الشكل

(2-194) نقاط الزوايا a , b , c , d , e في مخطط القوى ، المضلعات a , b , c , d , e في مخطط المكان . يمكن في هذه الحالة اعتبار كل ما ذكر تدقيقاً .

مثال 95 :

المطلوب : ايجاد قوى القضبان في الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-185) .

الحل :

لا يستطاع تطبيق إنشاء مخطط ماكسويل ـ كريمونا على الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-195a) الا بعد ايجاد مسبق لقوة قضيب وعلى سبيل المثال بطريقة القطع . وللقيام بذلك يلزم ايجاد ردود افعال المساند . بتطبيق شروط التوازن على الشكل(2-195 b) يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\Sigma V = 0 : \ -A_v + B \qquad = 0$$

$$\Sigma H = 0 : \ -A_H + 2P + P \qquad = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : \ -4Pl - 3Pl + 4B_v l = 0$$

التي تعطي بعد حلها ردود أفعال المساند :

$$A_H = 3P \quad ; \quad A_v = \frac{7}{4} P \quad ; \quad B = \frac{7}{4} P$$

بدراسة الجزء الأيمن من الشكل (2-195a) المقطوع بواسطة القطع i-i (شكل 2-195 c) ينتج :

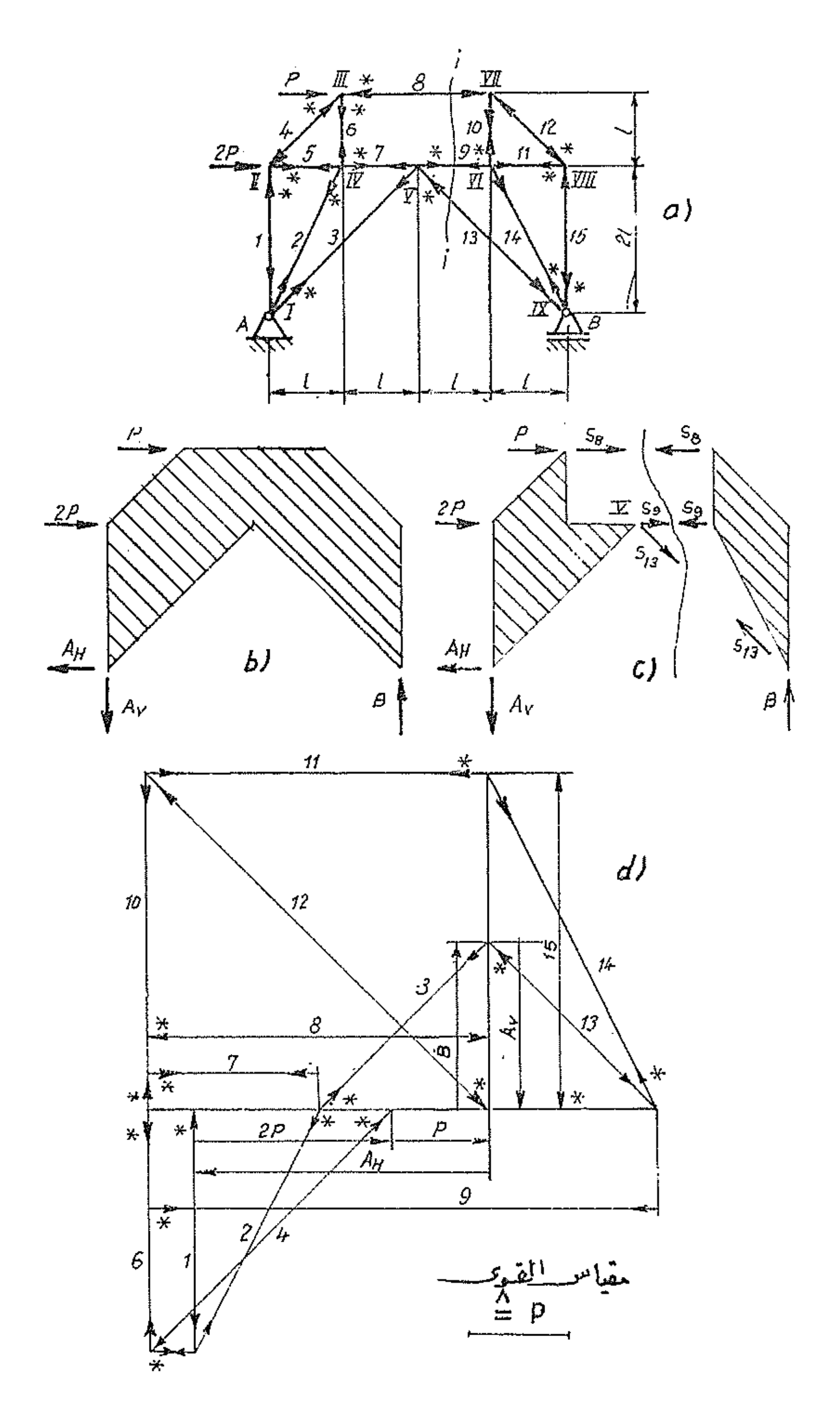
$$\Sigma M_v = 0 \ : \ S_8 l + 2Bl = 0$$

بحلها يتم تعيين القوة :

$$S_8 = -\frac{7}{2} P$$

باستخدام طريقة مخطط ماكسويل ـ كريمونا يستطاع الآن ، على سبيل المثال ، الابتداء بالعقدة III : مضلع القوى P , *8 , *6 , *4 (شكل 2-195 d) .

وبعد ذلك متابعة الانشاء على العقد التالية :



شكل 2-195

II : مضلع القوى $2P$, 4 , *5 , *1 .

IV : مضلع القوى 5 , 6 , *7 , *2 .

I : مضلع القوى A_v , A_H , 1 , 2 , *3 .

V : مضلع القوى 3 , 7 , "9 , *13 .

IX : مضلع القوى B , 13 , *14 , *15 .

VIII : مضلع القوى 15 , *11 , *12 .

VI : مضلع القوى 11 , 9,14 , *10 .

VII : مضلع القوى 12 , 10 , 8 .

النتائج :

$S_1 = -2{,}500\ P$; $S_5 = +0{,}500\ P$; $S_{10} = +3{,}500\ P$; $S_{14} = +3{,}913\ P$

$S_2 = +2{,}795\ P$; $S_6 = +2{,}500\ P$; $S_{11} = +3{,}500\ P$; $S_{15} = -3{,}500\ P$

$S_3 = +2{,}475\ P$; $S_7 = +1{,}750\ P$; $S_{12} = -4{,}950\ P$

$S_4 = -3{,}536\ P$; $S_9 = +5{,}250\ P$; $S_{13} = -2{,}475\ P$

مثال 96 :

المطلوب : إيجاد قوى القضبان للجائز الشبكي المرسوم في الشكل (2-196) والذي يمثل سقفاً لسطح (Dachbinder) .

الحل :

قبل الابتداء بتعيين قوى القضبان ينبغي إيجاد ردود أفعال المساند .

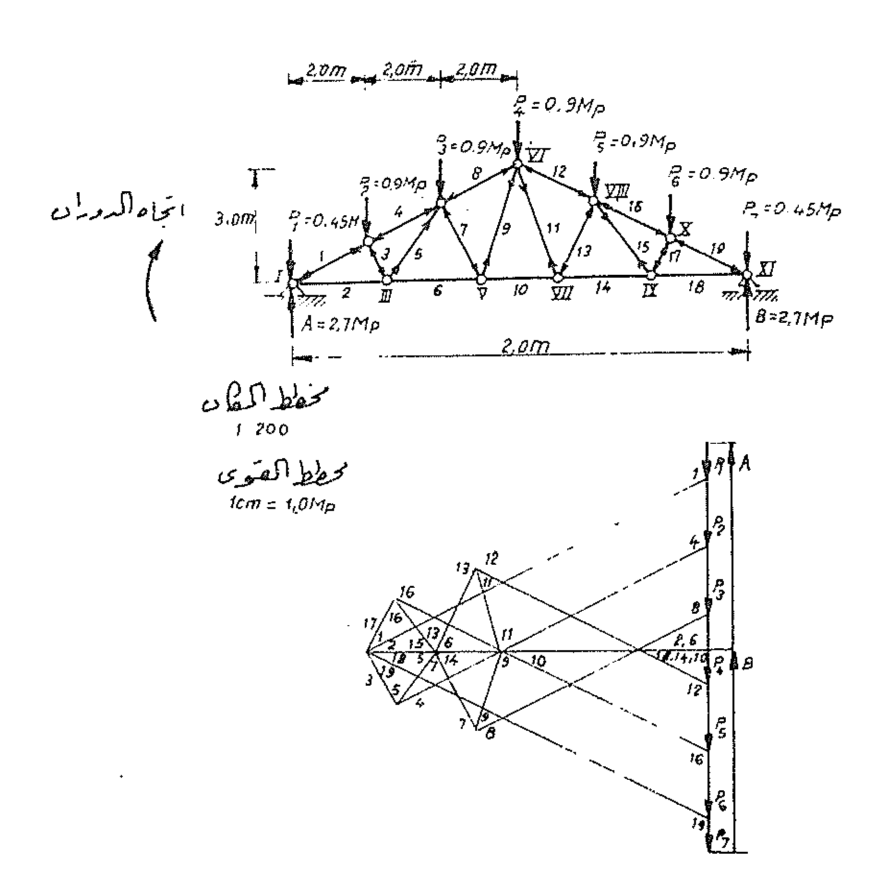
١ - ردود افعال المساند :

بسبب تناظر الشكل الهندسي والحمولي فان ردود افعال المساند تبلغ :

$A = B = 2{,}7\ Mp$

٢ - قوى القضبان :

يبتدأ برسم مضلع قوى مغلـق لحمولات العقـد الخارجية وردود افعال المساند . بعـد ذلك يبدأ بانشاء مخطط ماكسويل - كريمونا إنطلاقاً من العقـدة 1 ثم يتابع الحل ، حسب الخطة المشار اليها في الجدول التالي :



ν	1,19	2,18	3,17	4,16	5,15	6,14	7,13	8,12	9,11	10
S_ν[Mp]	-5,040	4,500	-0805	-4 630	0,900	3,600	-1,210	-3420	1,140	2,700

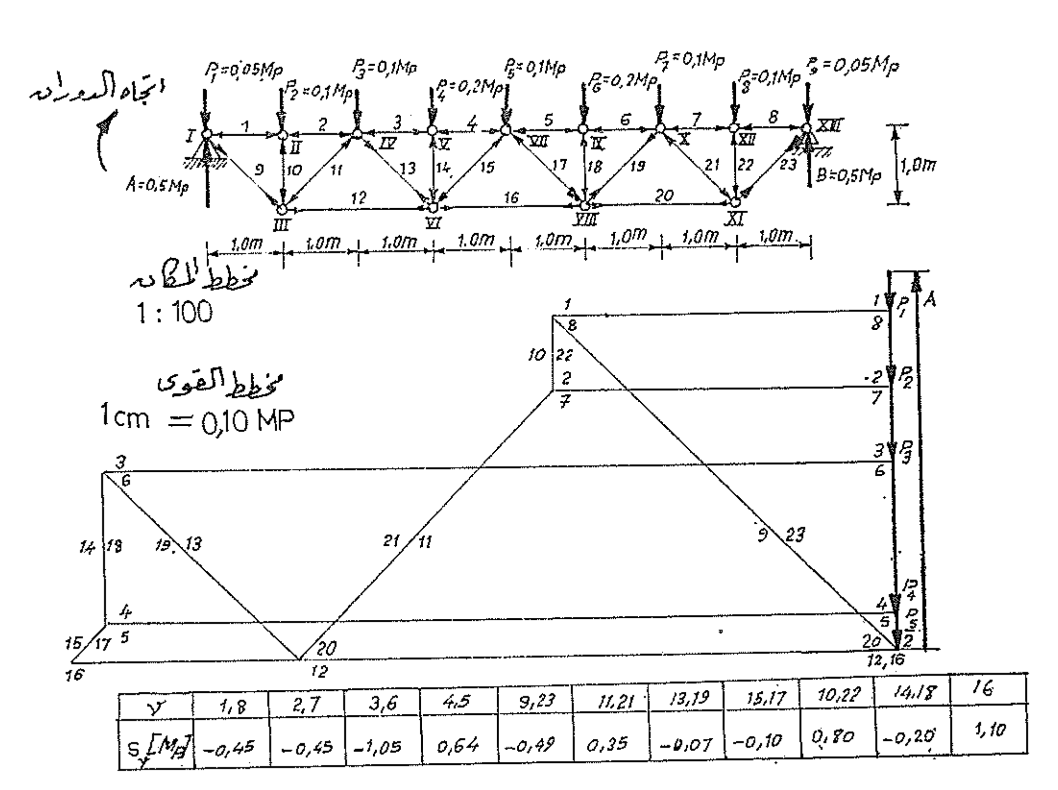
شكل 2-196

العقدة	القوى المعلومة	القوى المجهولة
I	P_1 , A	S_2 , S_1
II	P_2 , S_1	S_3 , S_4
III	S_3 , S_2	S_6 , S_5
IV	P_3, S_4 , S_5	S_7 . S_8
V	S_7 , S_6	S_{10}, S_9
VI	P_4, S_8 , S_9	S_{11}, S_{12}
VII	S_{11} , S_{10}	S_{14}, S_{13}
VIII	P_5, S_{12} , S_{13}	S_{15}, S_{16}
IX	S_{15}, S_{14}	S_{18}, S_{17}
X	P_6, S_{16}, S_{17}	S_{19} (التدقيق الاول)
XI	S_7, S_{19}, S_{18}, B	- (التدقيق الثاني والثالث)

بعد أخذ مقياس القوى المختار بعين الاعتبار يستطاع التوصل لقيم قوى القضبان .

مثال 97 :

المطلوب : تعيين قوى القضبان في الجائز الشبكي المـــرسوم في الشكل (2-197) والذي يمثل رافعة .



ν	1,8	2,7	3,6	4,5	9,23	11,21	13,19	15,17	10,22	14,18	16
S_ν [Mp]	-0,45	-0,45	-1,05	0,64	-0,49	0,35	-0,07	-0,10	0,80	-0,20	1,10

شكل 2-197

الحل :

١ – ردود افعال المساند :

بسبب التناظر في الشكل والحمولة فان ردود أفعال المساند تبلغ :

$$A = B = 0,5 \text{ Mp}$$

٢ – قوى القضبان :

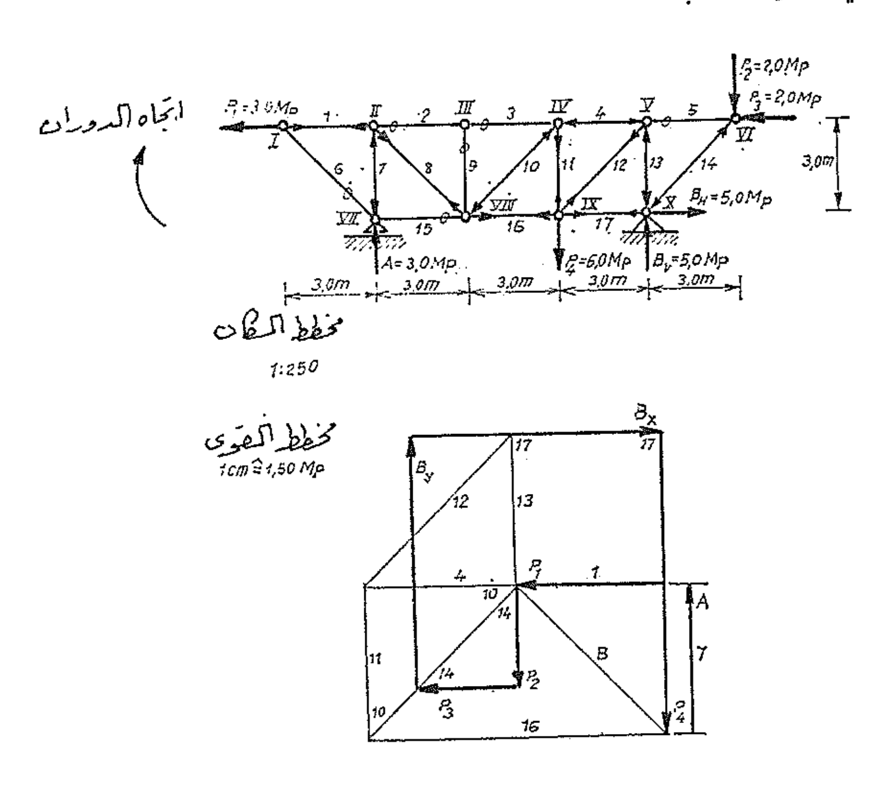
بسبب التناظر الهندسي للجائز الشبكي والتناظر الحمولي يستطاع أثناءرسم مخطط القوى الاكتفاء بالجزء الايسر من الرافعة وذلك عندما تنصف الحمولة P_5 .

يبتدأ مخطط ماكسويل ـ كريمونا بالعقدة I ثم تعقبها بقية العقد ويراعى أثناء رسم المخـطط ، اتجـاه الدوران المشار اليه في مخطط المكان . بأخذ مقياس القوى بعين الاعتبار يتم التوصل لقوى القضبان المدونة في الجدول .

مثال 98 :

حمل الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-198) بالقوى $P_1 = 3,0 Mp$ و $P_2 = 2,0 Mp$ و $P_2 = 2,0 Mp$ و $P_4 = 6,0 Mp$.

المطلوب : ايجاد قوى القضبان .



ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_ν[Mp]	3,0	0,0	0,0	-3,0	0,0	0,0	-3,0	4,24	0,0	-4,24

11	12	13	14	15	16	17
3,0	-4,24	-3,0	-2,83	0,0	6,0	3,0

شكل 2-198

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ينتج :

$$\Sigma M_X = 0 : A_v = 3{,}0\ Mp$$

$$\Sigma V = 0 : B_v = 5{,}0\ Mp$$

$$\Sigma H = 0 : B_H = 5{,}0\ Mp$$

٢ ـ قوى القضبان :

بشكل فوري وسريع يستطاع التوصل الى ان القضبان 5 , 6 , 9 , 15 هي قضبان صفر. بسبب كون $S_6 = 0$ فان $S_7 = -A$ وبسبب كون $S_9 = 0$ ينتج ان $S_2 = S_3$ وكذلك ينتج من حقيقة كون $S_5 = 0$ أن $S_{12} = -2\sqrt{2}\ Mp$. سوف يبتدأ رسم مخطط ماكسويل ـ كريمونا بالعقدة II وبذلك يتم التوصل ، من أجل الحمولة المعطاة ، إلى ان $S_2 = S_3 = 0$ وبذلك يستطاع متابعة رسم المخطط .

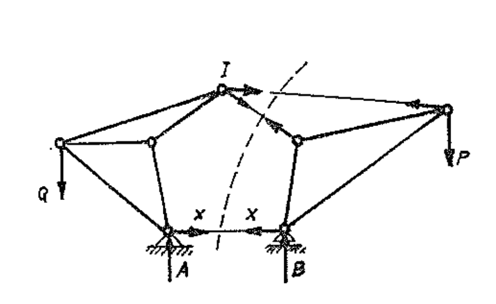
٢ ـ ١٤ ـ ٦ الجيزان الشبكية المعقدة ـ طريقة هنبرغ

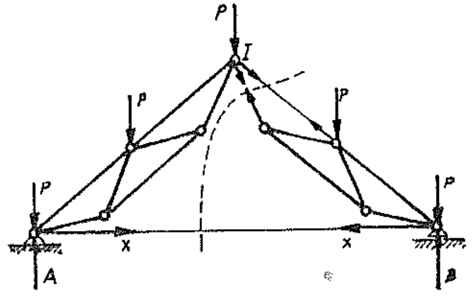
لقد تم حتى الان التعرض للتركيبات الشبكية البسيطة وهناك بعض الجيزان الشبكية المستوية التي تلتقي في كل عقدها ثلاثة قضبان او اكثر والتي تسمي **بالجيزان الشبكية المعقدة المستوية** (ebenen nichteinfachen Fachwerken) . يصعب في هذه الجيزان استخدام طرائق تعيين قوى القضبان المتبعة فى الفقرات السابقة .

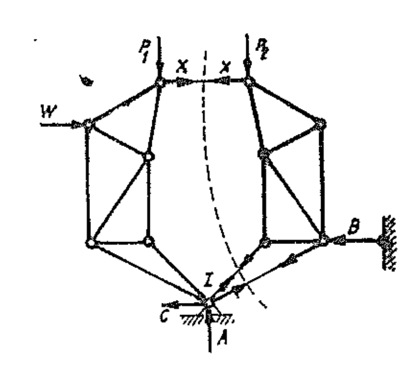
لكن هناك قليل من هذه الجيزان يستطاع التغلب على صعوبة إيجاد قوى القضبان فيها باستخدام قطع مناسب (قطع مدور أو قطع ريتر) يمر بأكثر من ثلاثة قضبان وبشكل يستطاع فيه ايجاد قوة احدى هذه القضبان مستقلة عن بقية قوى القضبان وبالاستعانة بشروط التوازن فقط . لقد تم في الاشكال (2-199 a) حتى (2-199 d) و (2-200) عرض بعض هذه المضلعات الرئيسية (الجيزان الشبكية الرئيسية) كما قد أشير فيها الى القطوع المناسبة .

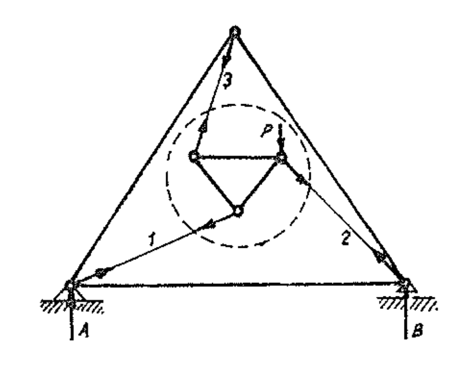
فمن أجل المضلعات الرئيسية الممثلة في الاشكال (2-199 a) حتى (2-199 c) يسهل ، بعد اجراء القطوع المشار اليها هناك ، تعيين قوة القضيب X بتطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة للعقدة I .

وفي حالة الجائز الشبكي المعقد الممثل في الشكل (2-199 d) يصار الى اجراء قطع مدور حول المثلث المحمل وبعد ذلك ، ولتعيين قوى القضبان 1 , 2 , 3 ، تستخدم طريقة كولمان التخطيطية وبذلك يصبح ايجاد ما تبقى من قوى القضبان ممكناً .









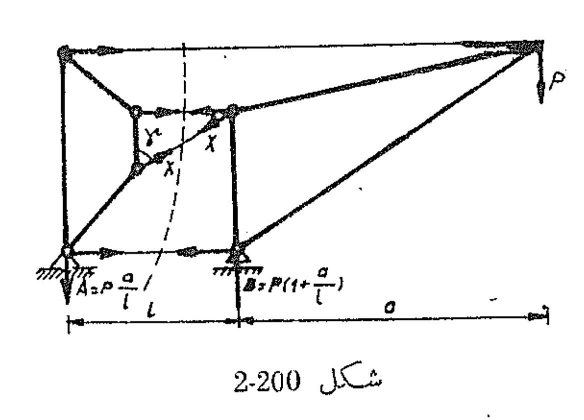
شكل 2-199

اما من اجل المضلع الممثل في الشكل (2-200) فيتم تعيين قوى القضبان المجهولة بتطبيق شروط توازن القوى الشاقولية على القطع الايسر وذلك كما يلي :

$$X \cos \gamma - A = 0$$

اما ما تبقى من قوى القضبان فيسهل ايجادها باستخدام طريقة مضلعات القوى .

اما البقية الباقية من الجيزان الشبكية فتفشل من اجلها كافة الطرائق السابقة لتعيين قوى القضبان

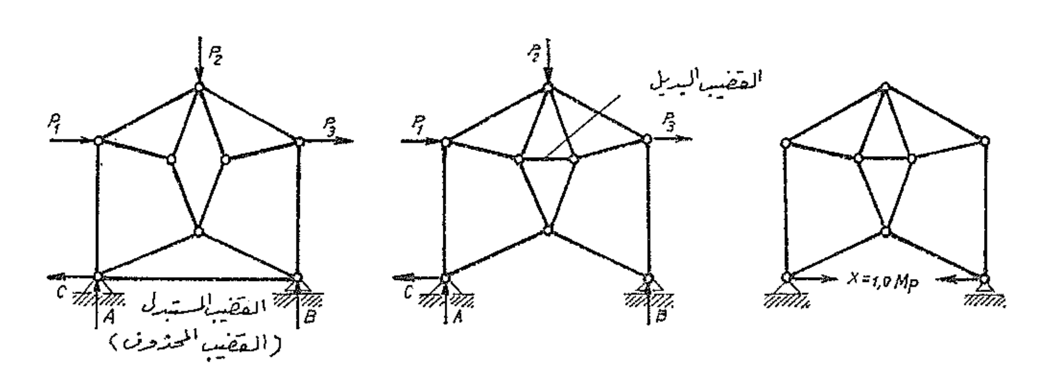


شكل 2-200

وعندئذ ينبغي اللجوء للطريقة التي قام العالم هنيبرغ (HENNEBERG) باكتشافها والتي تسمى بطريقة تبديل القضيب (Stabtauschverfahren)أوطريقة القضيب البديل (Ersatzstabverfahren).

يمكن تلخيص هذه الطريقة فيما يلي :

١ ـ يعدل شكل التركيب الشبكي بحيث يحول من تركيب معقد الى تركيب بسيط وذلك بحذف أحد قضبانه (الذي يسمى بالقضيب المبدل او القضيب المستعاض) واضافـــة قضيب آخر (والذي يسمى بالقضيب البديل او القضيب الاضـافي) في موضع مناسب بين عقدتين (شكل 2-201 a). وقد يلزم (في بعض الحالات) حذف أكثر من قضيب واحد وإضافة نفس العدد من القضبان في مواضع أخرى . يشترط في الجملة المعدلة ، التي يتم الحصول عليها بحذف قضيب واضافه قضيب آخر في موضع ثاني ، ان لاتكون متحركة (انظر كتاب مقاومة المواد للصف الثاني كهرباء للمؤلف) .



شكل 2-201

٢ ـ تحسب القوى الداخلية في التركيب الشبكي المعدل (التركيب الشبكي البسيط) نتيجة للحمولات الخارجية وذلك بأي من الطرق العادية السابقة (شكل 2-201 b) وسيرمز لهـذه القوى بالرمز S_{iL} وللقوة الناتجه في القضيب الاضافي أهمية خاصة ولهذا سيرمز لها بالحرفS^*_L .

٣ ـ يتخيل ان القضيب المحذوف (القضيب المستبدل) قد حلت مكانه قوة شد تجذب كلا من العقدتين عند طرفيه وان هذه القوة تساوي 1 ميغا بونداً (شكل 2-201 c) . ثم تعـــين القوى الداخلية في قضبان التركيب المعدل نتيجة لهاتين القوتين المتساويتين والمتعاكستين والمؤثرتين على العقدتين . وسيرمز للقوى الداخلية في هذه الحالة بالرمز S_{i1} وللقوة المتولدة في القضيب الاضافي بالرمز S^*_1 .

٤ ـ بفرض ان القيمة الحقيقية للقوة الداخلية في القضيب المحذوف (القضيب المستبدل) هي X ميغا بونداً ، فمعنى هذا هو انه لو اثر على التركيب الشبكي المعدل عند نقطتي انصال (عقدتي) هذا القضيب بقوتين متساويتين ومتعاكستين وتساوي كل منها X ميغا بونداً ، فان قوى قضبان الجائز الشبكي المعدل تصبح XS_{i1} وان القوة في القضيب البديل (القضيب الاضافي) هي XS_1^* .

اذا اثرت الان على الجائز المعدل كلا الحمولتين ، حمولات العقد P_v وقوة القضيب المحذوف X دفعة واحدة فان قوة القضيب البديل (ألقضيب الاضافي) تأخذ القيمة التالية :

$$S^* = S_L^* + X S_1^*$$

في الحقيقة ان القضيب البديل (القضيب الاضافي) هو قضيب وهمي وليس له وجود في الجائز الشبكي المعقد الاصلي ، لذلك فهو لا يستطيع ان يتحمل اية قوة ، اي ينبغي ان تكون القوة فيه معدومة ويعبر عن ذلك كما يلي :

$$S^* = S_L^* + X S_1^* = 0 \qquad (2\text{-}19)$$

من هذه المعادلة يتم تعيين المجهول المطلوب العائد للجائز الشبكي المعقد الاصلي وذلك كما يلي :

$$X = -\frac{S_L^*}{S_1^*} \qquad (2\text{-}20)$$

المفهوم الميكانيكي للطريقة : لو أثر على التركيب الشبكي المعدل عند نقطتي اتصال القضيب المستبدل (القضيب المحذوف) بقوتين متساويتين ومتعاكستين وتساوي كلا منها X ميغا بونداً بحيث تصبح القوة الداخلية في القضيب الاضافي (القضبب البديل) هي XS_1^* ميغا بونداً فان هذه القوة يجب ان تساوي وتعاكس القوة S^*_L الناتجة عن الحمولات الخارجية وذلك حتى تنعدم القوة الداخلية في هذا القضيب الوهمي نتيجة للحمولات الخارجية والقوة الداخلية X ميغا بونداً .

٥ ـ يمكن حساب القوة S_i النهائية في أي قضيب من العلاقة التالية :

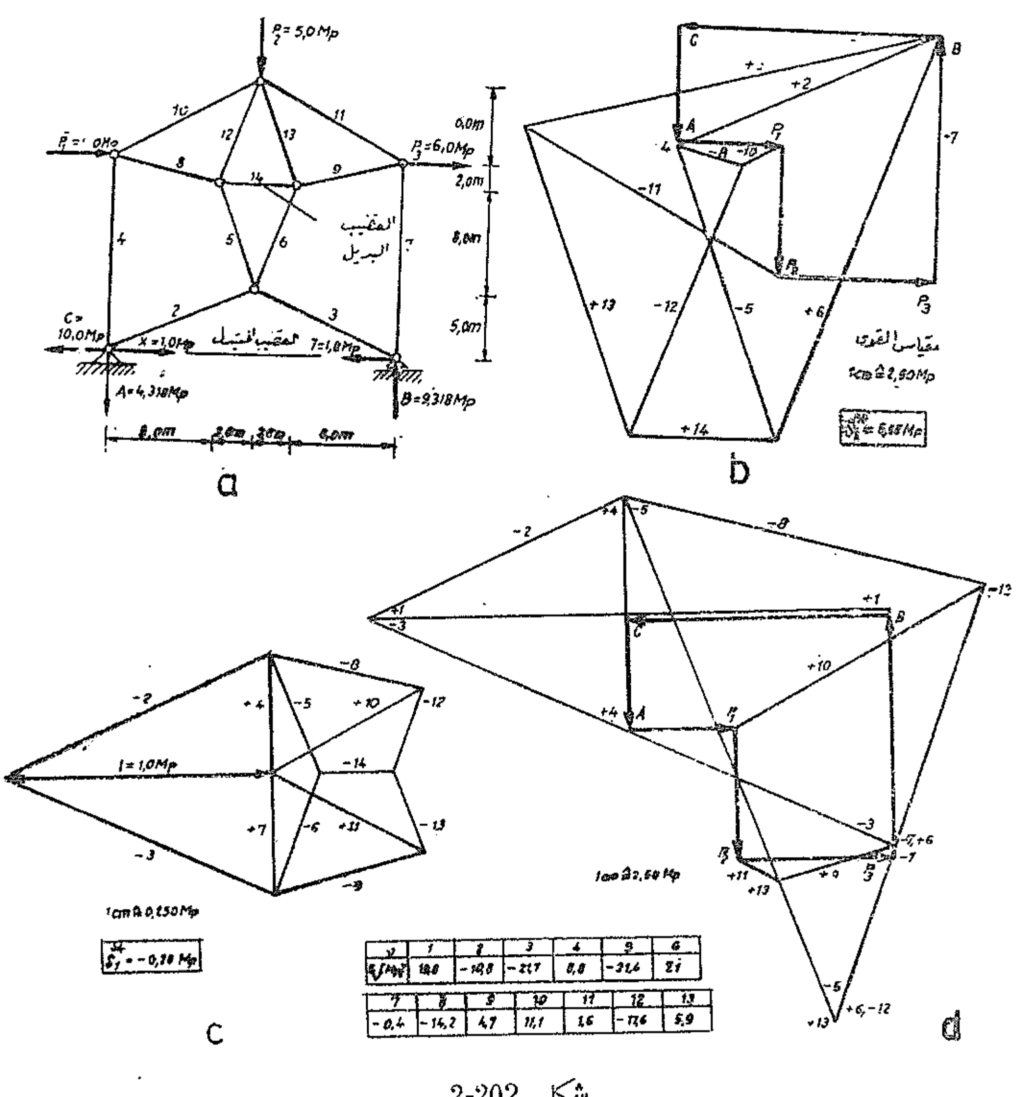
$$S_i = S_{iL} + X S_{i1} \qquad (2\text{-}21)$$

بالامكان ايضاً وبطريقة تخطيطية ايجاد القوى S_i . فبالاستعانة بقوة القضيب X التي اصبحت

الان معلومة يتم رسم مخطط ماكسويل ـ كريمونا النهائي الذي تتعين بواسطته قوى القضبان في الجائز الشبكي المعقد الاصلي . في هذه الحالة ، يكتفى عند ٢ و ٣ ايجاد S_L^* و S_1^* فقط . اذا صدف وكانت قوة القضيب البديل (القضيب الاضـــافي) هي $S_1^* = 0$ ، بذلك فان المجهول المطلوب حسب العلاقة (2-20) ، يساوي $X = \infty$. وهذا يؤدي لان تنمو جميع قوى القضبان الاخرى فوق كل الحدود وبذلك فان المضلع الرئيسي المعطى هو جائز شبكي استثنائي (Ausnahmefachwerk) .

مثال 99 :

المطلوب : ايجاد قوى القضبان في الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-202 a) .



ν	1	2	3	4	5	6
S_ν [Mp]	18,8	-10,8	-21,7	8,8	-31,6	21

7	8	9	10	11	12	13
-0,4	-14,2	4,7	11,1	1,6	-17,6	5,9

شكل 2-202

الحل :

ان الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-202 a) هو جائز شبكي معقد .

١ ـ ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجائز الشبكي كـكل يتم تعيين ردود افعال المساند :

$$A = 4{,}318 \text{ Mp} \quad , \quad B = 9{,}318 \text{ Mp} \quad , \quad C = 10{,}0 \text{ Mp}$$

٢ ـ قوى القضبان :

سوف يتم ايجاد قوى القضبان باستخدام طريقة هنيبرع (طريقة تبديل القضيب) : سوف يختار القضيب 1 قضيباً مستبدلا ويحذف من الجائز الشبكي ، بعد ذلك يضاف اليه القضيب البديل (القضيب الاضافي) وهو القضيب 14 .

لقد تم في الشكل (2-202 b) ومن اجل الحمولة A , C , P_1 , P_2 , P_3 , B رسم مخطط ماكسويل ـ كريمونا للجائز الشبكي المعدل .

لقد تم حتى الان في الفقرات السابقة نقل اتجاه قوى القضبان الى مخطط المكان ، أما هنا ، وفي هذه الفقرة ، فقد الحقت ، في مخطط القوى ، اشارة كل قوة الى جانب رقم القضيب .

من مخطط ماكسويل ـ كريمونا (شكل 2-202 c) يتم قياس قوة القضيب البديل (القضيب 14) والتي تبلغ في هذا المثال $S_L^*=5{,}55$ Mp . لقد تم في الشكل (2-202 c) ومن اجل قـــوة القضيب المستبدل $X= 1{,}0$ Mp واعتبارها هي الحمولة رسم مخطط ماكسويل ـ كريـونا . هنـا تبلغ قوة القضيب البديل (القضيب 14) $S_1^* = -0{,}28$ Mp . بتبديل هذه القيم في العلاقة (2-20) يتم تعيين المجهول المطلوب :

$$X = -\frac{S_L^*}{S_1^*} = -\frac{5.55}{-0{,}28} = 19{,}8$$

الذي يمثل قوة القضيب 1 الفعلية من الجائز الشبكي المعقد الاصلي .

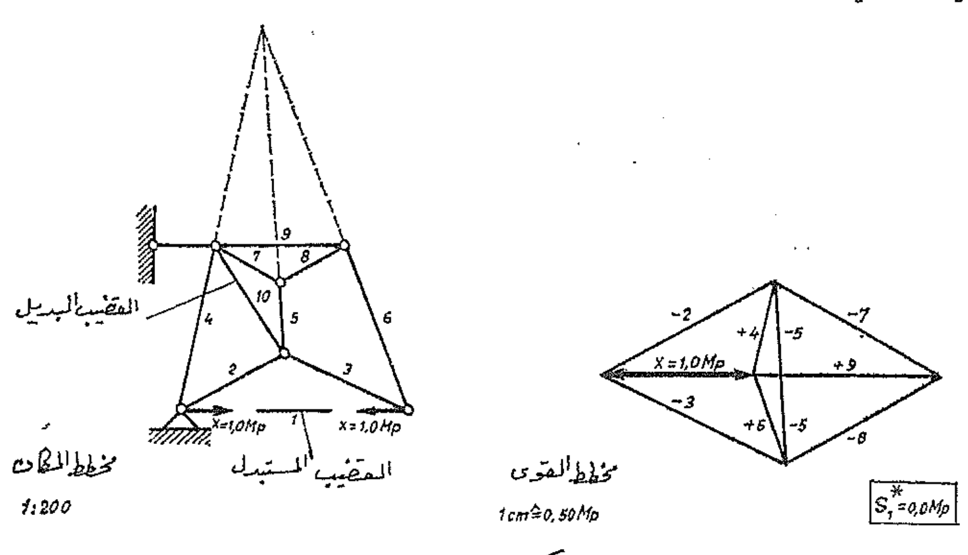
ولقد تم في الشكل (2-202 d) تمثيل مخطط ماكسويل ـ كريمونا للجائز الشبكي المعقد .

مثال 100 :

المطلوب : تعيين قوى قضبان الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-203) .

الحل :

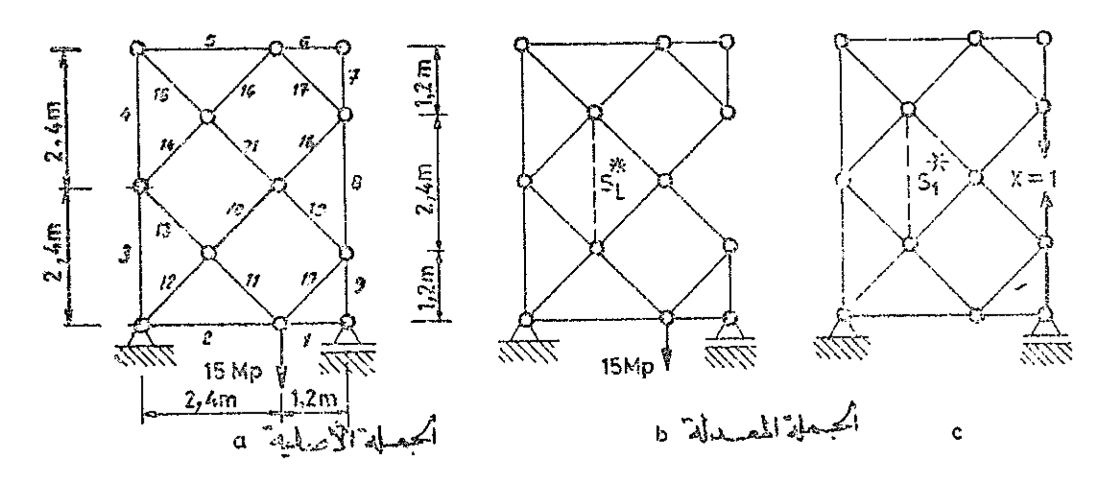
ان الجائز الشبكي المذكور هو جائز معقد وفي نفس الوقت ذو حركة صغيرة (جائز معقد وحرج) . اما الظاهرة الدالة على الحركة فهي تقاطع القضبان الثلاثة 4 , 5 , 6 في نقطة واحدة (انظر كتاب مقاومة المواد للصف الثاني كهرباء للمؤلف) . من اجل الجائز الشبكي المعدل والمحمل بالحمولة X=1,0 Mp فان القضيب البديل ايا كان موضعه هو قضيب صفر ، وبذلك فان انعدام القوة فيه $(S_1^*=0)$ يؤدي لان يأخذ المجهول X قيمة لانهائية لهذا السبب فان المضلع الرئيسي (الجائز الشبكي المعقد) ليس صلباً بل هو جائز شبكي استثنائي .



شكل 3 2-2

مثال 101 :

المطلوب : استخدام طريقة هنيبرغ لحل التركيب الشبكي الممثل في الشكل (2 201 a) .

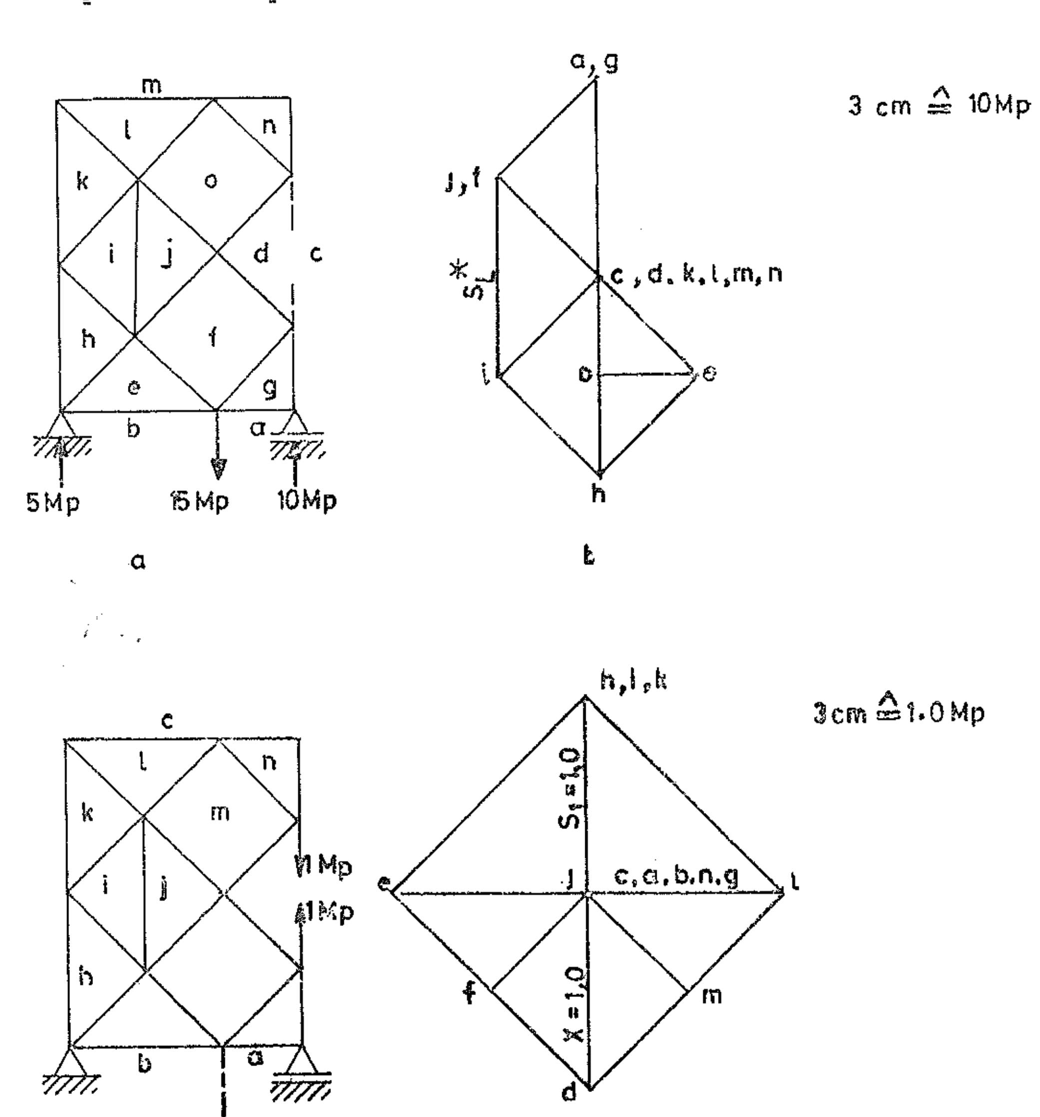


شكل 204-2

الحل :

١ – بحذف القضيب (c–d) واضافة القضيب (i – j) يتم الحصول على التركيب الشبكي المعدل الممثل في الشكل (2-204 d) والمبين ايضا في الشكل (2-204 c) . ويلاحظ ان هذا التركيب يصبح من النوع البسيط .

٢ – يبين الشكل (2-205 b) مضلع القوى (مخطط ماكسويل – كريمونا) للتركيب الشبكي المعدل الممثل في الشكل (2-205 a) تحت تأثير الحمولة الخارجية وهي 15 Mp ويعطي هذا



شكل 2-205

الشكل قيم القوى الداخلية (قوى القضبان) S_{iL} ومنـه يتبين ان القـوة الداخليـة في القضيب البديل (القضيب الاضافي) (i-j) هي :

$$S_L{}^* = S_{(i-j)L} = 10 \text{ Mp}$$

٣ ـ يؤثر على التركيب المعدل بقوة شد تساوي 1.0 Mp في مكان القضيب المستبدل (القضيب المحذوف) (c-d) كما في الشكل (2-205 c) . ويرسم مضلع القوى (مخطط ماكسويل ـ كريمونا) لهذا التحميل كما فى الشكل (2-205 d) . ويعطي هذا الشكل القيم S_{i1} للقوى الداخلية في القضبان ومنه يرى ان القوة الداخلية في القضيب البديـــل (القضيب الاضافي) (i-j) هي :

$$S_1{}^* = S_{(i-j)1} = -1{,}0 \text{ Mp}$$

٤ ـ تحسب القوة الداخلية في القضيب المستبدل (القضيب المحذوف) واللازمـة لكي تنعـدم القوة في القضيب البديل (القضيب الاضافي) (i-j) وذلك من العلاقة التالية :

$$X = -\frac{S_L{}^*}{S_1{}^*} = -\frac{10}{-1{,}0} = +10 \text{ Mp}$$

٥ ـ تحسب القوة النهائية في القضبان كما هـــو مبين بالجـــدول (2 205 e) كما يمكـن حسـابها برسم مضلـــع القـــوى (مخـطـط ـ ماكسويـل ـ كريمونا) النهـائي للتركيب الشبكي المعقد .

مثال 102 :

المطلوب : استخدام طريقة هنيبرغ لحل التركيب الشبكي المعقد الممثل في الشكل(2-206 e).

الحل :

١ ـ لقد تم في الشكل (2-206 b) استبدال التركيـب الشبكي المعقـد بتركيب شبكي بسيط وذلك بحذف القضيب I-VI والاستعاضة عنه بالقضيب III-V .

٢ ـ يرسم جزء من مضلع القوى (شكل 2-206 d) نتيجة للحمولة الخارجية وهي P=10 Mp عند c .ويتم منه ايجاد القوة $S_L{}^*$ في القضيب البديل(القضيب الاضافي،القضيب المستحدث) $\bar{V}$-III :

$$S_L{}^* = 8{,}6 \text{ Mp}$$

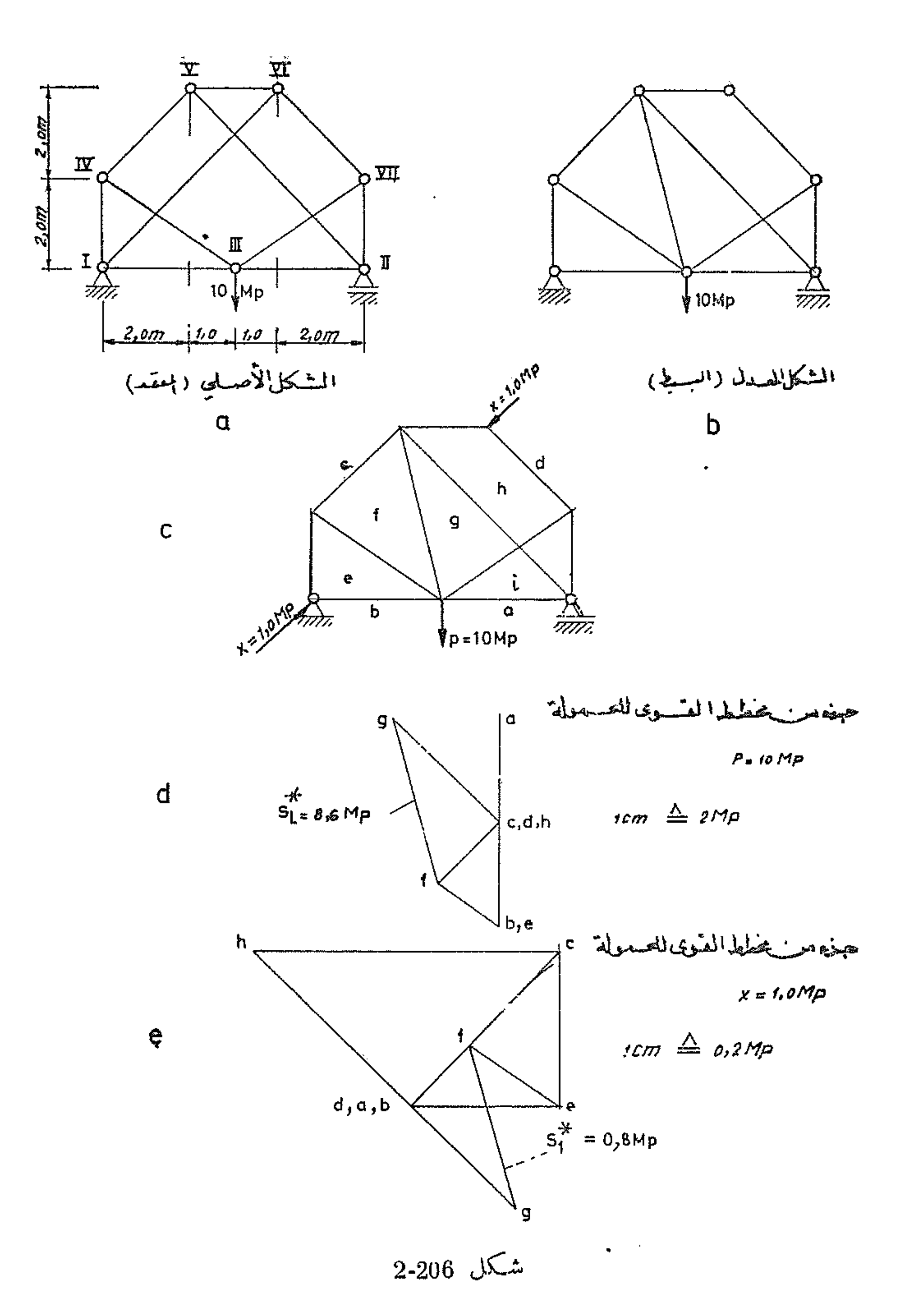
القضيب رقم	S_L	S_1	$S=S_L+10S_1$
a − g	0 , 0	0 , 0	0 , 0
b − e	− 5 , 0	1 , 0	5 , 0
c − b	− 10 , 0	1 , 0	0 , 0
c − k	0 , 0	1 , 0	10 , 0
c − l	0 , 0	1 , 0	10 , 0
c − n	0 , 0	0 , 0	0 , 0
c − d	0 , 0	1 , 0	10 , 0
c − g	10 , 0	0 , 0	− 10 , 0
g − f	$5\sqrt{2}$	$0,5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$
f − e	$10\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$
c − h	$5\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-5\sqrt{2}$
h − i	$5\sqrt{2}$	0 , 0	$5\sqrt{2}$
j − f	0 , 0	$-0,5\sqrt{2}$	$-5\sqrt{2}$
f − d	$-5\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$
d − m	0 , 0	$-0,5\sqrt{2}$	$-5\sqrt{2}$
m − j	$-5\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$
k − l	0 , 0	$-\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$
m − l	0 , 0	$-0,5\sqrt{2}$	$-5\sqrt{2}$
m − n	0 , 0	$0,5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$
i − k	$-5\sqrt{2}$	0 , 0	$-5\sqrt{2}$

الجدول 2-205 e

٣ - يرسم جزء من مضلع القوى (الشكل 2-206 e) نتيجة لقوة شد $X_1=1,0$ Mp تعمل محل القضيب المستبدل (القضيب المحذوف) VI − I ، ومنه يرى ان :

$$S_1^* = -8,0 \text{ Mp}$$

٤ ـ لذلك تكون القوة الداخلية في القضيب VI − I هي :



شكل 2-206

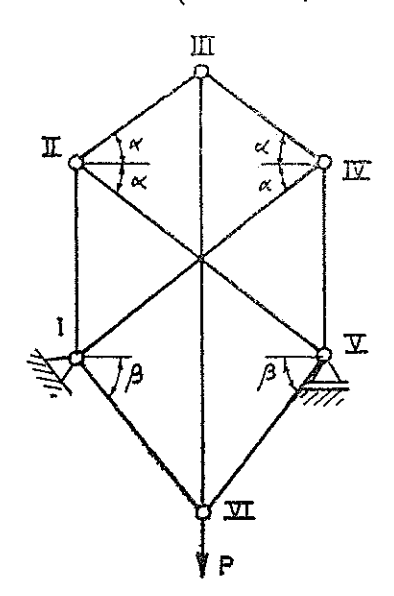
$$X = -\frac{8,6}{-8,0} = +1,070 \text{ Mp}$$

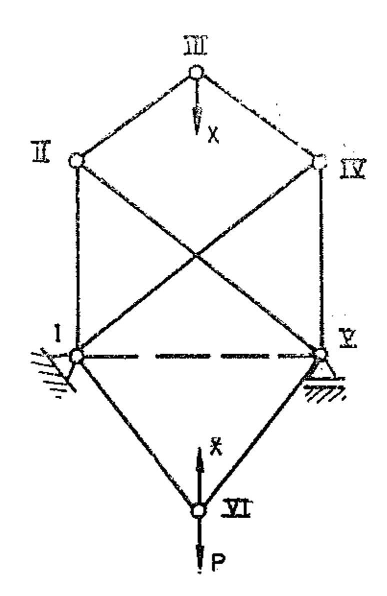
ومن السهل الان رسم مضلع القوى للتركيب الشبكي المعقد بعد معرفة القوة X .

مثال 103 :

المعطى $\sin \alpha = 0,6$ و $\sin \beta = 0,8$.

المطلوب : تعيين قوى القضبان في الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2_08a) .





شكل 2-208

الحل :

لا يحتوي الجائز الشبكي المدروس على اية عقدة ، يبلغ عدد قضبانها أقل من ثلاثة وهـذا يعني ان الجائز الشبكي هو جائـز معقـد ويمكن حـله باتبـاع طريقة هنيبرغ (طريقـة تبديل القضيب) .

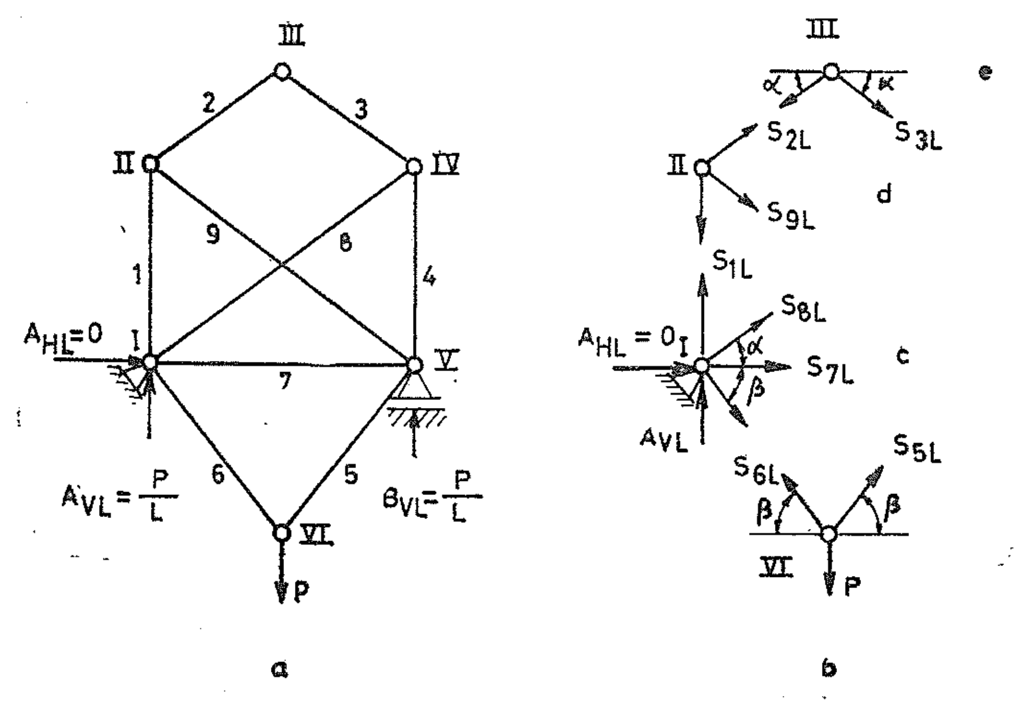
١ ـ يعدل الجائز الشبكي المعقد الى الصورة البسيطة (شكل 2-208 b) وذلـك بحذف القضيب VI – III والاستعاضة عنه بالقضيب V – I .

٢ ـ تعيين القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعدل(شكل 2-209 a) نتيجة للحمولة الخارجية P عند VI (ستستخدم هنا طريقة القطع المدور) .

ردود افعال المساند :

لاسباب التناظر ولانعدام القوى الافقية فان ردود افعال المساند تبلغ :

$$A_{HL} = 0 \quad ; \quad A_{VL} = 0 \quad ; \quad B_{VL} = \frac{P}{2}$$



شكل 2.209

قوي القضبان :

لأسباب التناظر يكفي إيجاد قوى القضبان في نصف الجملة فقط حيث ان :

$$S_{1L} = S_{4L} \;\; ; \;\; S_{2L} = S_{3L} \;\; ; \;\; S_{8L} = S_{9L} \;\; : \;\; S_{5L} = S_{6L}$$

العقدة VI (شكل 2.209 b) .

بتطبيق شرطي توازن القوى ينتج :

$$\Sigma H = 0 : \quad S_{6L} \cos\beta - S_{5L} \cos\beta = 0$$

$$S_{6L} = S_{5L}$$

$$\Sigma V = 0 : \quad S_{6L} \sin\beta + S_{5L} \sin\beta = 0$$

$$S_{6L} = \frac{P}{2 \sin\beta} = \frac{P}{1,6} = \frac{5}{8}\, P = S_{5L}$$

العقدة III (شكل 2.209 e) :

بتطبيق شروط توازن القوى على العقدة III ينتج :

$$\Sigma H = 0 : S_{2L} = S_{3L}$$

$$\Sigma V = 0 ; S_{2L} + S_{3L} = 0$$

من المعادلتين ينتج ان :

$$S_{2L} = S_{3L} = 0$$

العقدة II (شكل 2-209 d) :

بتطبيق شرطي توازن القوى على العقدة II ينتج :

$$\Sigma H = 0 : S_{9L} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_{1L} = 0$$

العقدة I (2-209 c) :

يعطي تطبيق شرطي توازن القوى على العقدة I المقتطعة من الجائز بواسطة قطع ودور العلاقات التالية :

$$\Sigma V = 0 : S_{8L} \sin\alpha - S_{6L} \sin\beta + \frac{P}{2} = 0$$

$$S_{8L} = \frac{1}{\sin\alpha} (S_{6L} \sin\beta - \frac{P}{2})$$

$$\Sigma H = 0 : S_{8L} \cos\alpha + S_{7L} + S_{6L} \cos\beta = 0$$

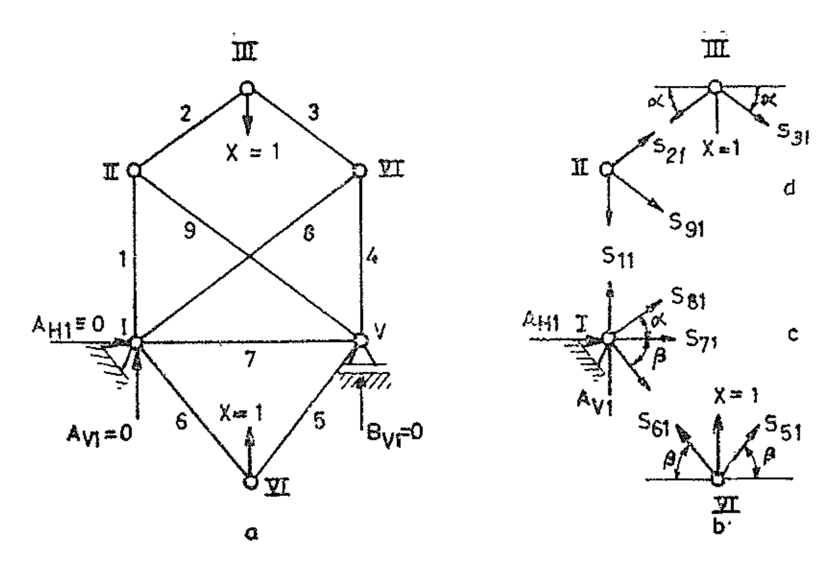
$$S_{7L} = - (S_{8L} \cos\alpha + S_{6L} \cos\beta) = -\frac{P}{2} \operatorname{ctg}\beta$$

من $\sin\beta = 0,8$ يرى ان $\beta = 53° \ 10'$ وان $\operatorname{ctg}\beta = 0,75$.

بالتبديل فى العلاقة الاخيرة ينتج :

$$S_{7L} = -\frac{3}{8} P$$

٣ ـ يؤثر على التركيب الشبكي المعدل بقوة خارجية تمثل قوة شد داخلي في القضيب المحذوف III–VI مقدارها 1,0 Mp (شكل 2-210 a) . بعد ذلك تعين القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعدل نتيجة لهذه الحمولة وذلك باستخدام طريقة القطع المدور التحليلية .



شكل 2-210

ردود افعال المساند :

للتناظر الهندسي للجملة ولتناظر الحمولة ولانعدام القوى الافقيـــة الخارجية فان ردود افعـــال المساند تبلغ :

$$A_{H1} = 0 \quad ; \quad A_{V1} = 0 \quad ; \quad B_{V1} = 0$$

(النتيجة متوقعة وذلك بسبب تشكيل القوى المؤثرة جملة توازنية).

قوى القضبان :

لاسباب التناظر الهندسي والحمولي يكتفى بحساب قوى القضبان في نصف الجملة فقط ، حيث ان :

$$S_{11} = S_{41} \quad ; \quad S_{21} = S_{31} \quad ; \quad S_{81} = S_{91} \quad ; \quad S_{61} = S_{51}$$

العقدة VI (شكل 2-210 b) :

بتطبيق شرطي توازن القوى على العقدة VI ، المقتطعة من الجائز الشبكي بواسطة قطع مدور ، ينتج :

$$\Sigma H = 0 : S_{61} = S_{51}$$

$$\Sigma V = 0 : S_{61} = -\frac{5}{8} P = S_{51}$$

العقدة III ‎(2-210 e)‎ :

بتطبيق شرطي توازن القوى على العقدة III بعد اقتطاعها من الجائز بواسطة قطع مدور ينتج :

$$\Sigma H = 0 : S_{2\,1} = S_{3\,1}$$

$$\Sigma V = 0 : (S_{2\,1} + S_{3\,1}) \sin\alpha + 1 = 0$$

$$S_{2\,1} = S_{3\,1} = -\frac{1}{2\sin\alpha} = -\frac{5}{6}\ \text{Mp}$$

العقدة II (شكل ‎2-210 d‎):

بتطبيق شرطي توازن القوى على العقدة II المقتطعة من الجائز بواسطة قطع مدور ينتج :

$$\Sigma H = 0 : S_{9\,1} = -S_{2\,1} = +\frac{5}{6}$$

$$\Sigma V = 0 : S_{1\,1} = (S_{2\,1} - S_{9\,1}) \sin\alpha = -1\ \text{Mp}$$

العقدة I (شكل ‎2-210 c‎):

يعطي تطبيق شرطي توازن القوى العلاقات التالية :

$$\Sigma V = 0 : S_{1\,1} + S_{8\,1} \sin\alpha - S_{6\,1} \sin\beta + A_{v\,1} = 0$$

$$S_{8\,1} = \frac{1}{\sin\alpha}(S_{6\,1}\sin\beta - S_{1\,1} - A_{v\,1}) = \frac{5}{6}\ \text{Mp}$$

$$\Sigma H = 0 : S_{8\,1}\cos\alpha + S_{6\,1}\cos\beta + S_{7\,1} + A_{H\,1} = 0$$

$$S_{7\,1} = -S_{8\,1}\cos\alpha - S_{6\,1}\cos\beta - A_{H\,1} = -\frac{1}{2}\text{ctg}\alpha + \frac{1}{2}\text{dg}\,\beta$$

بالاستعانة بالمعطيات التالية :

$$\sin\alpha = 0{,}6 : \alpha = 36^\circ\,50' \quad ; \quad \text{ctg}\,\alpha = 1{,}34$$

$$\sin\beta = 0{,}8 : \beta = 53^\circ\,10' \quad ; \quad \text{ctg}\,\beta = 0{,}75$$

بالتبديل في المعادلة الاخيرة ينتج :

$$S_{8\,1} = -\frac{7}{24}\ \text{Mp}$$

تكتب بعد حساب القوة X

قوى القضبان الفعلية في الجائز الاصلي	قوي القضبان نتيجة للحمولة X_1	قوى القضبان نتيجة للحمولة الفعلية P	قوى القضبان نتيجة للحمولة $X=1$	قضيب رقم
$S_{iL} + X_1 S_{i1}$	$X_1 S_{i1}$	S_{iL}	S_{i1}	
$+\frac{15}{14} P$	$-\frac{5}{6} X = \frac{15}{14} P$	0	$-\frac{5}{6}$	2 أو 3
$+\frac{9}{7} P$	$+\frac{9}{7} P$	0	-1	1 أو 4
$-\frac{15}{14} P$	$-\frac{15}{14} P$	0	$+\frac{5}{6}$	9 أو 8
$+\frac{10}{7}$	$+\frac{45}{56} P$	$+\frac{5}{8} P$	$-\frac{5}{8}$	6 أو 5
0	$+\frac{3}{8} P$	$-\frac{3}{8} P$	$-\frac{7}{24}$	7

$$X_1 = - \frac{-\frac{3}{8} P}{-\frac{7}{24} P} = -\frac{9}{7} P$$

مثـال 104 :

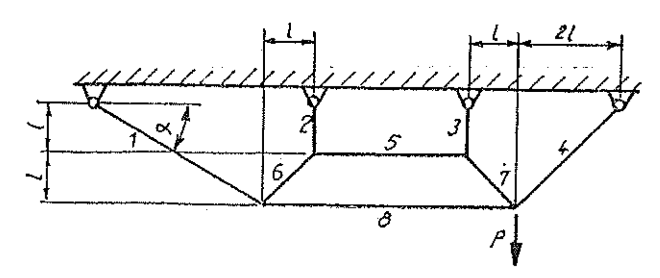
المطلوب : ايجاد قوى القضبان في الجائز الشبكي المثل في الشكل(2-211).

الحـل :

ان الجائز الشبكي المدروس هو جائز معقد ولا يستطاع فيه مباشرة الابتداء برسم مخطـط القوى (مخطط ماكسويل ـ كريمونا) عن طريق تحليل القوة P ولا حتى بالاستعانة بردود افعال المساند (التي مازال مجهولة) ولذلك سوف يلجأ لطريقة تبديل القضيب .

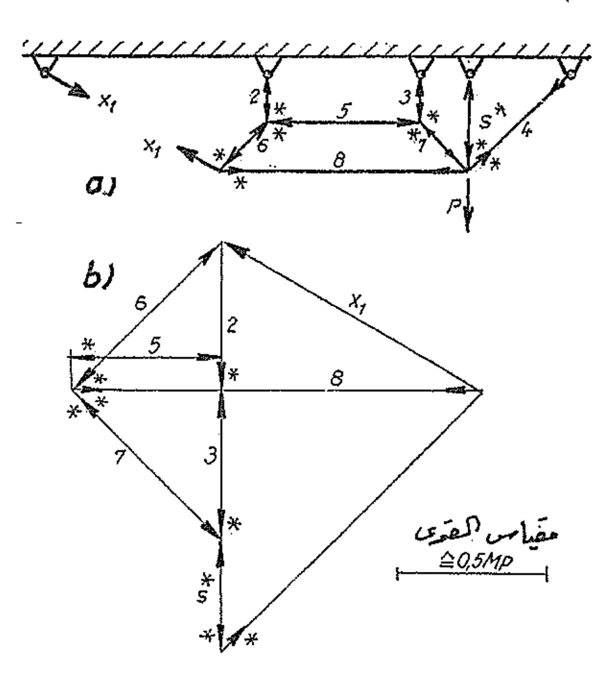
١ ـ بحذف القضيب 1 وبناء القضيب البديل ′5 ، على سبيل المثال في المكان المرسوم في الشكل (2-212a) ، يتم اعادة التركيب الشبكي المعقد الى تركيب شبكي بسيط (وهـو في نفس الوقت مقرر ستاتيكياً وغير متحرك) .

٢ ـ يحمل الجائز الشبكي الجديد ذو البناء البسيط بالقوة الخارجية P فقط (بحيث تكون $X_1 = 0$) ثم تحسب فيه قوى القضبان الناتجة عن ذلك والتي يرمز لها بالرمز S_{iL} .



شكل 2-211

٣ - يحمل الجائز الشبكي البسيط وعند عقدتي القضيب المستبدل (القضيب المحذوف) بالقوة $X_1 = 1$ Mp فقط (دون السماح للقوة P بالتأثير) والتي تتجه باتجاه القضيب المحذوف .
بعد ذلك تحسب فيه قوى القضبان الناتجة عن هذا التحميل والتي يرمز لها بالرمز S_{i1} (شكل 2-212 والجدول التالي)



شكل 2-212

بالاستعانة بالعلاقة (2-21) يتم ايجاد قوى القضبان الحقيقية في الجائز الشبكي المعقد ، هكذا :

$$S_i = S_{iL} + X_1\ S_{i1}$$

اما القيمة المجهولة X_1 فيتم الحصول عليها من شرط انعدام القوة في القضيب البديل وذلك عندما تطبق القوة الفعلية P والمجهولة X_1 على الجائز دفعة واحدة ، هكذا :

$$S^* = S_L^* + x_1\ S^*_1 = 1 - 0,366X_1 = 0 \quad :$$

$$X_1 = \frac{1}{0,366} = 2,732$$

قضيب رقم	قوى القضبان الناتجة عن التحميل		قوى القضبان النهائية
	P	$X_1 = 1$	
	S_{iL}[Mp]	S_{i1} Mp]	S_i [Mp]
1	0	1,000	2,732
2	0	— 0,500	— 1,366
3	0	— 0,500	— 1,366
4	0	+ 1,225	+ 3,346
5	0	— 0,500	— 1,336
6	0	— 0,707	— 1,932
7	0	— 0,707	— 1,932
8	0	+ 1,366	+ 3,732
S*	1	— 0,366	0

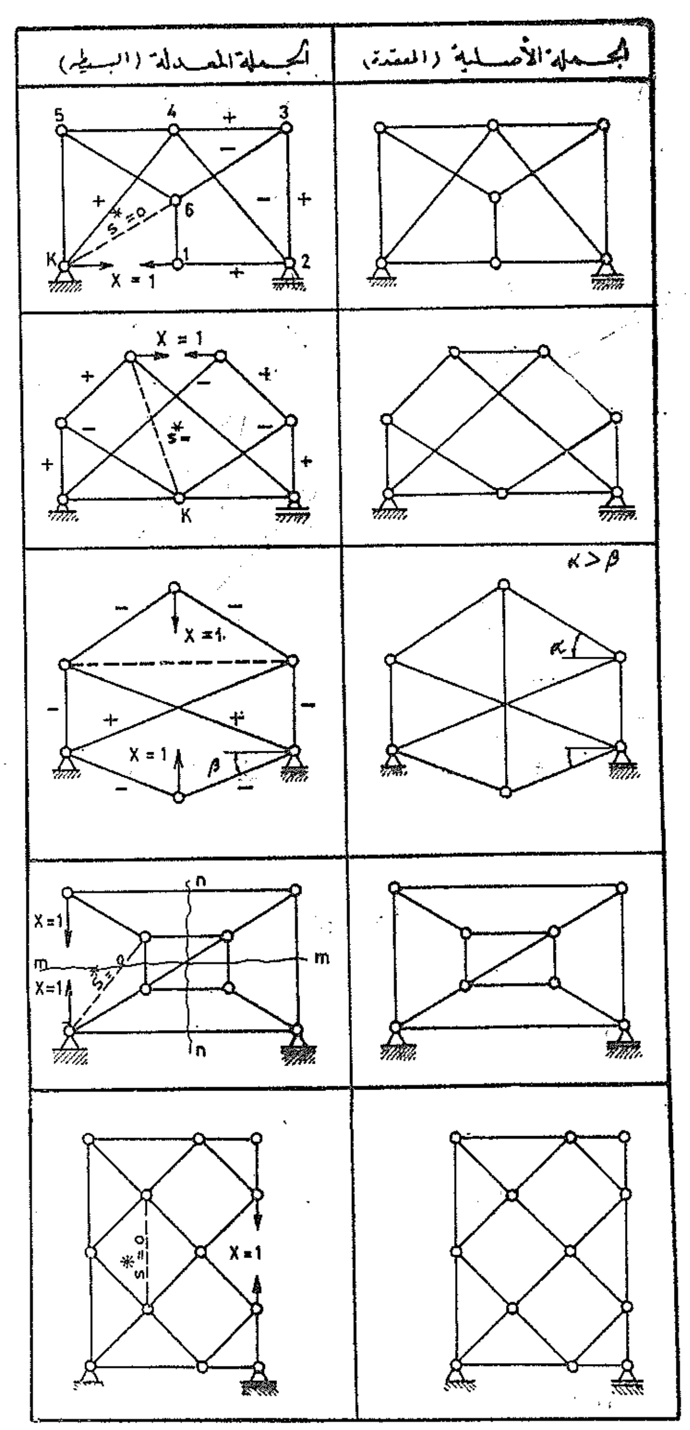
يوضح الشكل(2-220) بعض الجيزان الشبكية المعقدة كما يوضح الجيزان الشبكية المعدلة (البسيطة) التابعة لها .

٢ ـ ١٤ ـ ٧ الجيزان الشبكية المعقدة بدرجة عالية ـ طريقة هنيبرغ

قد يكون التركيب الشبكي معقداً بحيث لا يكفي لحله بطريقة هنيبرغ أن يعدل التركيب الشبكي بحذف أحد قضبانه والاستعاضة عنه بقضيب اخر يضاف بين عقدتين (نقطتي اتصال) وإنما يلزم أن يحذف من التركيب قضيبان أو أكثر على أن يضاف عدد مساو من القضبان في المواضع المناسبة وذلك لكي يحول التركيب الشبكي المعقد الى تركيب آخر بسيط . ومثل هذه هذه الجيزان الشبكية المعقدة تسمى **بالجيزان الشبكية المعقدة بدرجة عالية** . وسيرى الآن كيفية استعمال طريقة هنيبرغ لحل هذه الجيزان عالية التعقيد وذلك بالتطبيق على المثال التالي :

مثال 105 :

المطلوب : إيجاد القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعقد من الدرجة الثانية (شكل 2-213) .

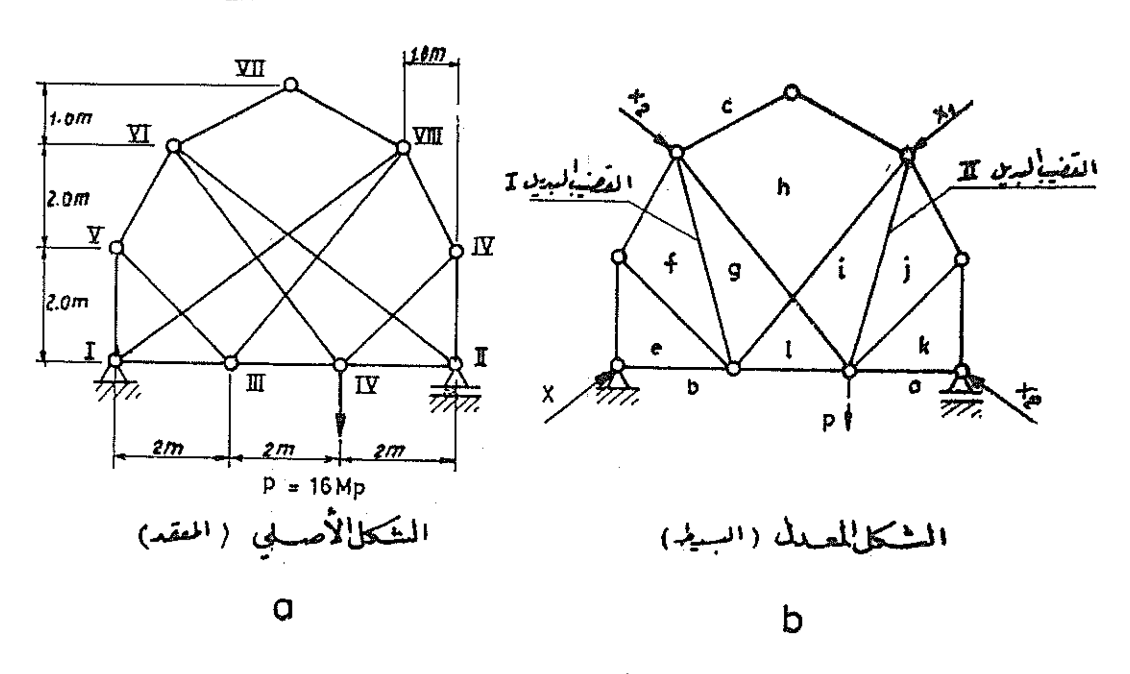


تشير الخطوط : - - - إلى القضيب البديل و $\xrightarrow{X=1}$ إلى القضيب المستبدل

شكل 2-220

الحل :

١ ـ يعدل هذا التركيب الشبكي الى الصورة البسيطة المبينة في الشكل (2-213 b) وذلك بحذف القضيبين I – VIII و II – VI واستبدالها بالقضيبين البديلين الاضافيين III – VI و IV – VIII . وسيرمز دائماً للقضيب III – VI بالرمز (1) وللقضيب IV – VIII بالرمز (2) .



شكل 2-213

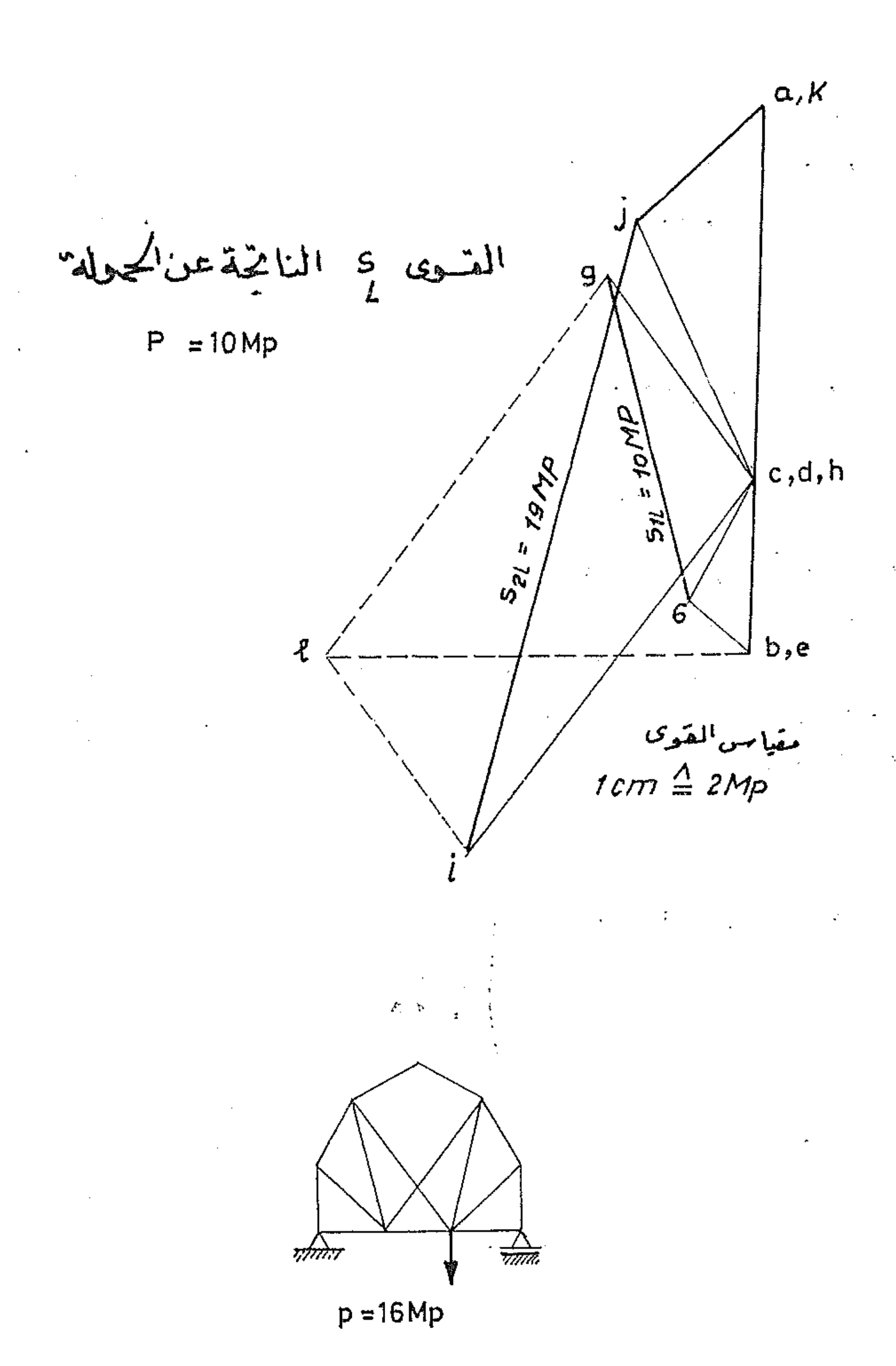
٢ ـ تعين القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعدل (شكل 2-214) نتيجة للحمولة الخارجية (P = 16 Mp) عند IV . ويبين الشكل (2-214) مضلع القوى لهذه الحالة وسيرمز لهذه القوى بالرمز (S_L) على ان يسبق الرمز L عدد يدل على القضيب الذي توجد فيه القوة ، أي أن القوة الناتجة عن هذه الحمولة في القضيب III – VI سيرمز لها بالرمز S_{1L} والقوة الناتجة في القضيب الثاني IV – IX سيرمز لها بالرمز S_{2L} ومن شكل مضلع القوى يرى أن :

في القضيب III—VI :

$$S_{1L} = 10,0 \text{ Mp}$$

وفي القضيب IV—VIII :

$$S_{2L} = 19,0 \text{ Mp}$$



شكل 2-214

٣ ـ يؤثر على التركيب المعدل بقوة خارجية تمثل قوة شد داخلي في القضيب المحذوف I—VIII مقدارها 1,0 Mp وتسمى هذه القوة $X_1 = 1,0$ ثم تعين القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعدل نتيجة لهذه الحمولة ، وذلك برسم شكل مضلع القوى كما في الشكل (2-215b)

وسيرمز لهذه القوى بالرمز P_1 وكما في الفقرة السابقة يسبق الرمز (1) عـدد آخر يدل على القضيب الذي تولدت فيه القوى ، بمعنى أن القوة الناتجة في القضيب III—VI وهـو القضيب (1) سيرمز لها بالرمز S_{11} والقوة الناتجة في القضيب IV—VIII وهـو القضيب (2) سيرمز لها بالرمز S_{21} . ومن شكل مضلع القوى يرى أن :

في القضيب III—VI :

$$S_{11} = + 1{,}05 \text{ Mp}$$

في القضيب IV—VIII :

$$S_{21} = + 0{,}63 \text{ Mp}$$

٤ ـ يؤثر على التركيب الشبكي المعدل بقوة خارجية تمثل قوة شد داخلي في القضيب المحذوف II—VI مقدارها 1,0 Mp وتسمى هذه القوة $X_2 = 1{,}0$ ثم تعين القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعدل نتيجة لهذا التحميل . ونظراً للتناظر الهندسي للشكل فلا حاجة لرسم هذا الشكل وإنما يمكن استنتاجه من الشكل السابق (شكل 2-215 b) . وتسمى هذه القوى الناتجة في هذه الحالة S_2 ويسبق الرمز 2 عدد يدل على القضيب الذي تولدت فيه القوى . ومن الشكل يرى أن :

في القضيب III—VI :

$$S_{12} = + 0{,}63 \text{ Mp}$$

في القضيب IV—VIII :

$$S_{22} = + 1{,}05 \text{ Mp}$$

٥ ـ لكي تتلاشى القوة الداخلية في كل من القضبـان البديلة (المستحدثة) III—VI و IV—VIII والتي لا وجود لها في الحقيقة ، يلزم أن تكون قيم القوى الداخلية X_1 و X_2 بحيث يصبح

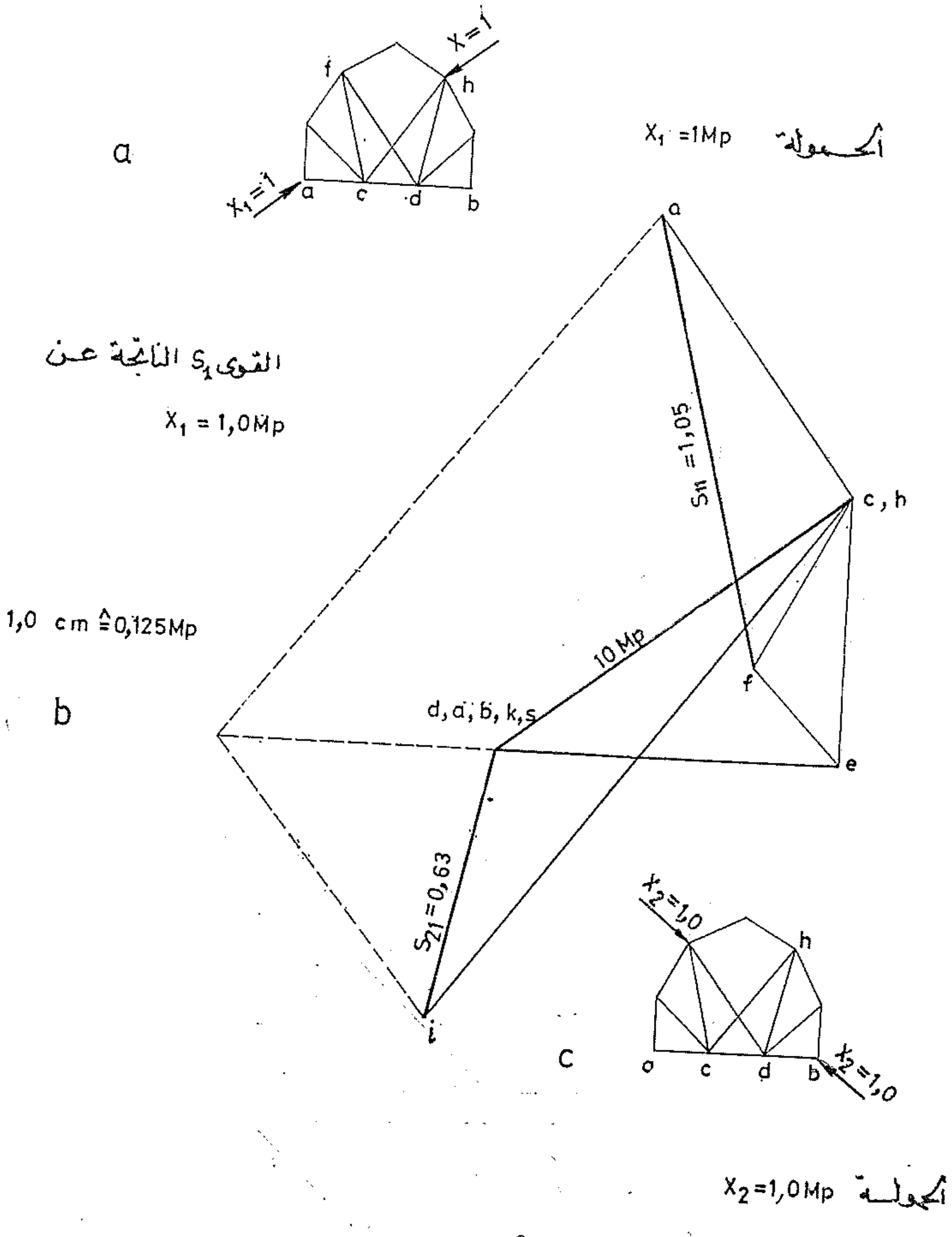
$$S_1 = S_{1L} + X_1 S_{11} + X_2 S_{12} = 0 \qquad (a)$$

$$S_2 = S_{2L} + X_1 S_{21} + X_2 S_{22} = 0 \qquad (b)$$

ومنها ينتج أن :

$$X_1 = - \frac{S_{1L} S_{22} - S_{2L} S_{12}}{S_{11} S_{22} - S_{21} S_{12}} \qquad (1)$$

$$X_2 = - \frac{S_{2L} S_{11} - S_{1L} S_{12}}{S_{11} S_{22} - S_{21} S_{12}} \qquad (2)$$



شكل 2-215

وبتعويض القيم التي تم الحصول عليها في الفقرات ٢ و ٣ و ٤ في هذه المعادلات ينتج أن :

$$X_1 = -\frac{10\,.1,05\ -19.0\ .\ 0,63}{1,05.\ 1,05-0,63\ .\ 0,63} = 2,15\ \text{Mp}$$

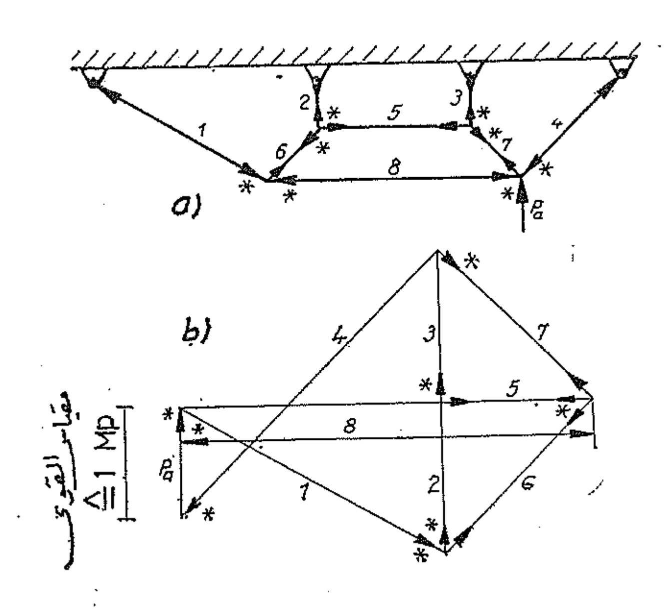
$$X_2 = - \frac{19.1{,}05 - 10 \cdot 0{,}63}{1{,}05 \cdot 1{,}05 - 0{,}63 \cdot 0{,}63} = - 18{,}8 \text{ Mp}$$

٦ ـ والان سيتم حساب قوى القضبان في الجائز الشبكي المعقد باستخدام العلاقة التالية :

$$S_i = S_{iL} + X_1 S_{i1} + X_2 S_{i2}$$

٢ ـ ١٤ ـ ٨ الجيزان الشبكية المعقدة ـ طريقة المقياس غير المحدد

سوف ينطلق لشرح هذه الطريقة من جائز شبكي معقد معطى وليكن هو الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-216 a) . تحل المسألة من الداخل . برسم مخطط ماكسويل ـ كريمونا بالاعتماد على قوة قضيب مجهولة . وفي النهاية يصار لتحديد مقياس القوى . فعلى سبيل المثال يبتدأ بالقضيب 5 ثم يرسم مخطط ماكسويل ـ كريمونا (شكل 2-216 b) . تعوض في نهاية الانشاء المسافة $P_a = 1$ Mp (لان المعطى في نص المسألة هو $P = 1$ Mp) وبها يتحدد مقياس القوة . علاوة على ذلك ينبغي عكس اشارة كل من قوى القضبان وذلك لان القوى الفعلية P تعاكس القوة P_a .

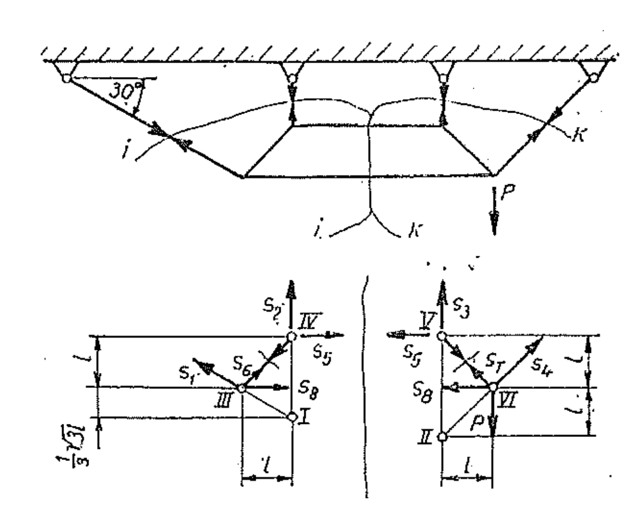


شكل 2-216

i	S_i مقاسة بالـ Mp
1	+ 2,732
2	− 1,366
3	− 1,366
4	+ 3,346
5	− 1,366
6	− 1,932
7	− 1,932
8	+ 3,732

٢ ـ ١٤ ـ ٩ الجيزان الشبكية المعقدة ـ طريقة القطع المزدوج

سوف ينطلق هنا أيضاً لشرح هذه الطريقة من جائز شبكي معقد معطى وليكن هو الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-217a) وبحله تتضح الطريقة . باجراء القطعين i—i و k—k (شكل 2-217 a) ينشا عن الجائز الشبكي قرصان تؤثر عليهما ستة قوى قضبان (شكل 2-217 b) . من اجل كل قرص يمكن كتابة ثلاثة شروط للتوازن وبذلك يستطاع تعيين المجاهيل المذكورة .



شكل 2-217

$$\Sigma M_{I} = 0 : -S_3 \left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\, l\right) - S_8\ \frac{1}{3}\sqrt{3}\, l = 0$$

$$\Sigma M_{II} = 0 : +S_5\ 2l + S_8\, l - P\, l = 0$$

$$S_5 = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right) P = -1{,}366\ Mp$$

$$S_8 = \left(2 + \sqrt{3}\right) P = +3{,}732\ Mp$$

$$\Sigma M_{III} = 0 : -S_5\, l + S_2\, l = 0$$

$$\Sigma M_{IV} = 0 : +S_8\, l - \frac{1}{2} S_1\, l - \frac{1}{2}\sqrt{3}\ S_1\, l = 0$$

$$\Sigma M_{V} = 0 : -S_8\, l - P\, l + S_4 \sqrt{2}\ l = 0$$

$$\Sigma M_{VI} = 0 : +S_5\, l - S_3\, l = 0$$

$$\Sigma H_{IV} = 0 : +S_5 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\ S_7 = 0$$

$$\Sigma H_{V} = 0 : -S_5 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ S_7 = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم تعيين قوى القضبان المطلوبة :

$$S_1 = (1 + \sqrt{3})\ P = +2{,}732\ Mp$$

$$S_2 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\ P = -1{,}366\ Mp$$

$$S_3 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\ P = -1{,}366\ Mp$$

$$S_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ (3 + \sqrt{3})\ P = +3{,}346\ Mp$$

$$S_6 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})\ P = -1{,}932\ Mp$$

$$S_7 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\ P = -1{,}932\ Mp$$

٢ - ١٤ - ١٠ التكوين الحرج للجيزان الشبكية

يقصد بالتكوين الحرج لتركيب شبكي تلك الحالة التي لا يتم فيها توازن التركيب الشبكي إلا تحت حمولات معينة . أما في الحالة العامة للتحميل فان التركيب الشبكي يتعرض الى حركات بالغة عند بعض عقده تغير نوعا ما من شكل التركيب وتتولد في قضبانه قوى تصل نظرياً الى ما لا نهاية لو لا هذه الحركات المفرطة عند العقد . وعلى كل حال يلاحظ ما يلي :

١ - لا يصلح مثل هذا التكوين الحرج لأن يكون تركيباً شبكياً هندسياً قادراً على تحمل القوى الخارجية عامة .

٢ - التكوين الحرج ليس تركيباً منهارا . فهو لا يتهاوى كلية تحت تأثير الحمولات دون ان تتولد قوى داخلية في قضبانه كما هو الحال في التركيبات المنهارة ، لكنه لا يستطيع أن يقاوم الحمولات الخارجية الا بعد ان يتعرض لتحركات بالغة في عقده .

٣ - تحقق التكوينات الحرجه عادة العلاقة اللازمة بين عدد القضبان وعدد العقد وكذلك تحقق علاقة الشرط التعدادي .

تمثل الشبكيات المرسومة في الشكل (2-218) تكوينات حرجة بالمعنى المذكور ، فالشكل (2-218 a) يبين تركيباً شبكياً ، ولكن تكوينه أصبح حرجاً لوجود قضيبين cd و de على استقامة واحدة بحيث لو تعرض التركيب لقوة شاقولية P عند d لتحركت هذه النقطة حركة مفرطة الى الاسفل بحيث يميل كل من القضيبين de و dc . ومثل هذا الميل ضروري لكي تساعد المركبات الشاقولية للقوى الداخلية على حفظ توازن النقطة d . ولولا هذه الحركة للزم أن تصل القوى الداخلية الى قيمة لانهائية . ان عدد قضبان هذا التركيب هو 7 وعدد عقده هو 5 وعدد ردود افعال مسانده هو 3 وعلاقة الشرط التعدادي :

$$n = a + s - 2k = 3 + 7 - 2.5 = 0$$

محققة كما وأن العلاقة بين عدد القضبان والعقد :

$$7 = 2(5) - 3$$

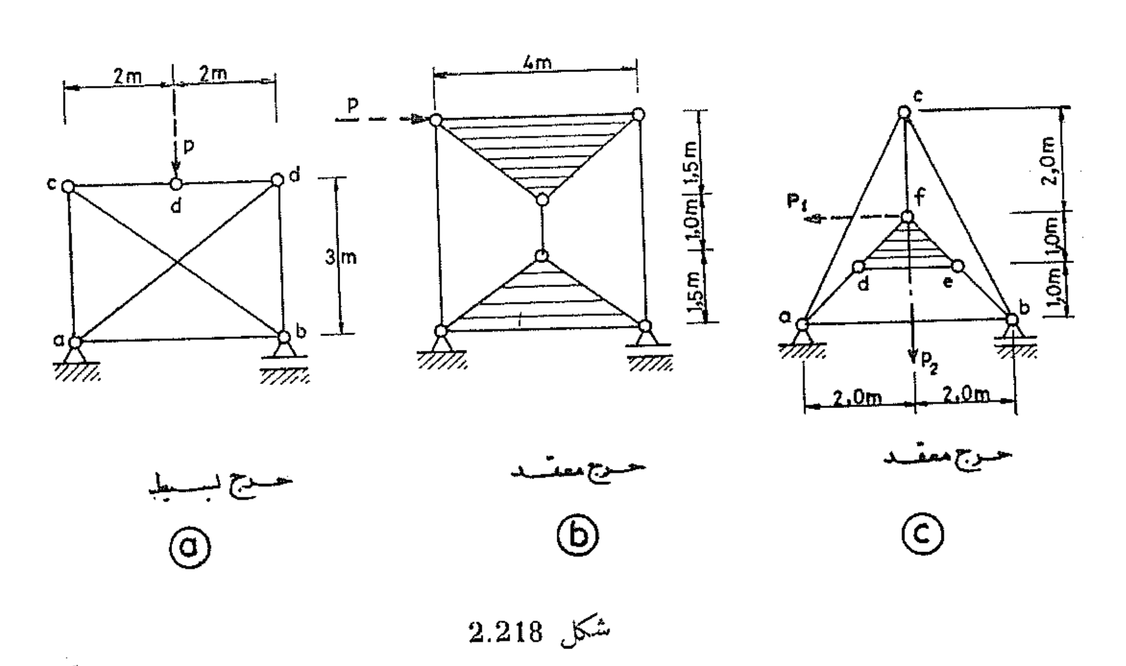
محققة ايضاً . ومن الواضح انه يكفي لكي يعود التركيب الشبكي الى تكوين سليم غير حرج ان ترتفع العقدة d او تنخفض بحيث لا يكون القضيبان dc , de على استقامة واحدة . أما الشكل (2-118 b) فيبين صورة حرجة لتركيب شبكي من النوع المركب وقد نشأ الحرج هنا لان القضبان الثلاثة be , cf , da متوازية . كذلك الحال في الشكل (2-218 c) الذي يعطي صورة لتركيب شبكي معقد وذلك لان القضبان الثلاثة التي تربط الجزئين البسيطين وهي da , be , cf تتلاقى في نقطة واحدة . وفي كل من هذين التركيبين يرى أن :

$$a = 3 \quad , \quad s = 9 \quad k = 6$$

وبذلك يصبح الشرط التعدادي :

$$n = 3 + 9 - 2 . 6 = 0$$

وهذا يعني ان كلاً من التركيبين مقرر ستاتيكياً ولكنه حرج (وهنـا تقع الحالة الاستثنـائية لعلم السكون وتسمى امثال هذه الجمل بالجمل الشبكية الاستثنائية) .



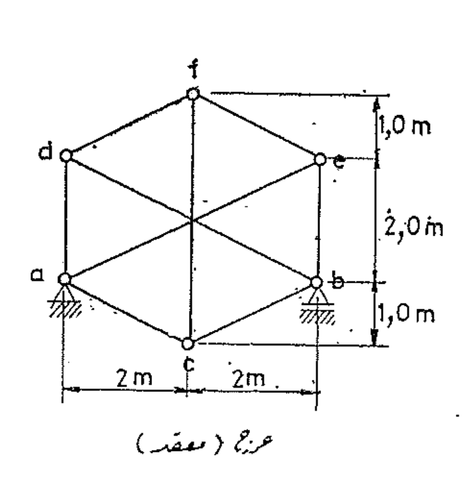
شكل 2.218

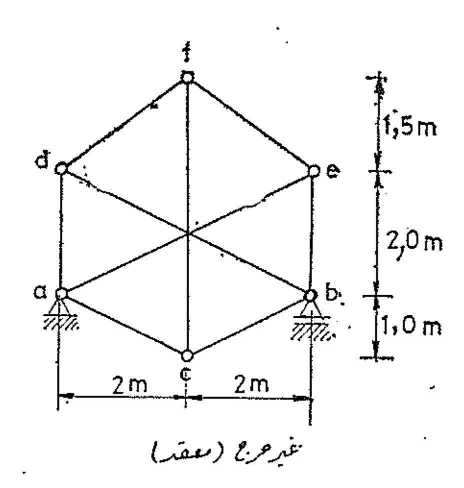
ان من السهل في حالة الشبكيات البسيطـة ان يعرف لاول وهلة هل هي شبكيات ذات تكوين حرج أم لا ولكن الامر يختلف في حالة الشبكيات المعقدة حيث لا يستطاع بسهـولة ودون دراسة أن يحكم على طبيعة التركيب من ناحية كونه حرجاً ويتضح هذا من التركيبين الشبكيين المعقدين (شكل 2-219) واللذان يبدوان لاول وهلة متشابهين في حين أن الامر ليس كذلك اذ ان اولهما (شكل 2-219 a) تركيب ذو تكوين حرج أما الثاني (شكل 2-219 b) فليس ذا تكوين حرج على الاطلاق ، والان ـ كيف يستطاع ان يعرف اذا كان هـــذا التركيب الشبكي المعقد ذا تكوين حرج أم لا ؟

الجواب ، يمكن ان يعرف هذا باحدى الطرق الرئيسية التالية :

١ ـ طريقة المخطط القطبي ٢ ـ طريقة شكل ـ F′ (طريقة السرع المدورة بزاوية 90°)
٣ ـ طريقة المعينة المخرجية ٤ ـ طريقة تبديل القضيب .

تعتبر الطريقتين الاولى والثانية طرائق حركية . ان الطرائق الاولى والثانية والثالثة هي وسائل كافية لتحديد حرج الجمل اما الطريقة الرابعة فهي وسيلة غير كافية (انظر كتاب مقاومة المواد للصف الثاني كهرباء ، للمؤلف) .





شكل 2-219

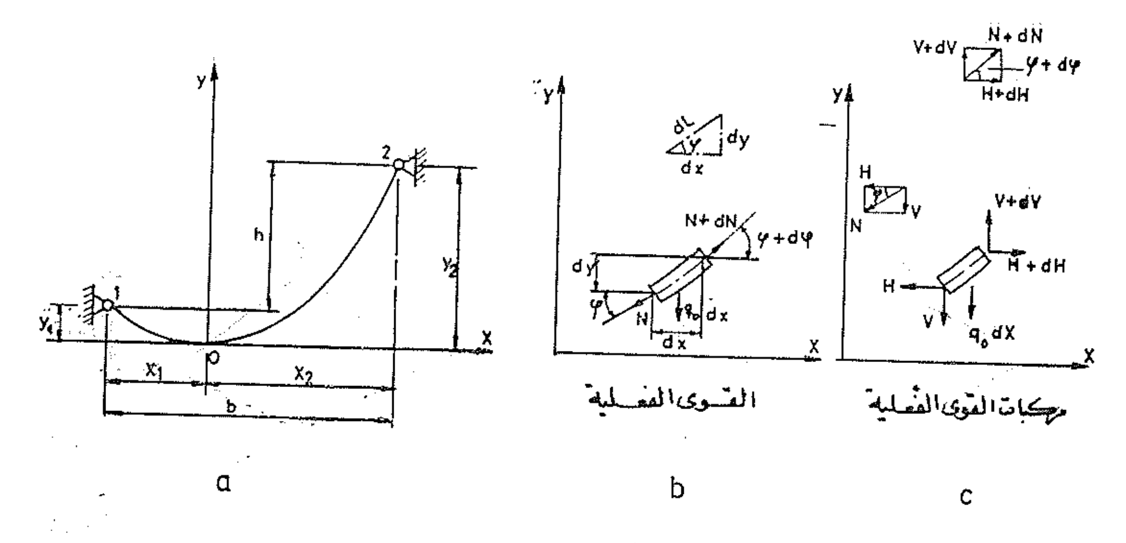
٢ ـ ١٥ الحبال والسلاسل (Seile und Ketten)

الحبال والسلاسل هي ، من وجهة نظر حساب الانشاءات ، عناصر حاملة رخوة بالنسبة للانعطاف لا تستطيع الا حمل قوى شادة باتجاه محورها فقط . بسبب شكلها الهندسي وللسبب السابق يمكن اعتبارها حالة خاصة للاقواس لا تحمل الا قوى محورية شادة ، أي أن $M=Q=0$ وان $N>0$. اما شكلها الهندسي فغير محدد بل يمثل خط الاستناد (stützlinie) .
سيفترض في الحبال التي ستتم دراستها بأنها عديمة الاستطالة ، أي ان تمددها (تغير طولها النسبي) معدوم $\varepsilon=0$ (اذاً فهي صلبة بالنسبة للتغير الطولي) . سوف يقتصر في هذا البحث على معالجة الحبال والسلاسل المحملة بحمولة شاقولية فقط .

٢ ـ ١٥ ـ ٢ الحمولات الشاقولية ذات الشدة الثابتة بالنسبة للمسقط الافقي

$q_V(x) = q_0 = \text{const.}$

ترمز q_0 لشدة الحمولة لكل واحدة طول من المحور x (واحدتها kp/cm) . ليقتطع من الحبل المعلق (المثبت) بين النقطتين 1 , 2 (شكل 2-221 a) عنصراً صغيراً طوله dL ثم لتطبق عليه شروط التوازن (شكل 2-221 c) :



شكل 2-221

$$\Sigma V = 0 \; : \; -V - q_0\, dx + V + dV = 0 \quad : \quad dV = q_0\, dx$$

$$\Sigma H = 0 \; : \; -H + H + dH = 0 \quad : \quad dH = 0$$

من هذه العلاقات ينتج :

$$H = \text{const.} \tag{2-22}$$

$$dV = q_0\, dx \tag{2-23}$$

هناك علاقات تربط بين القوة الشاقولية V والقوة الافقية H وقوة الحبل N من جهة وبين اطوال العنصر dx , dy , dL من جهة ثانيـة (اما هذه العلاقات فتتم قراءتها من الشكـل 2-221 b,c) وهي التالية :

$$\frac{V}{H} = \frac{dy}{dx} \tag{2-24 a}$$

وباستخدام قانون فيثاغورث ينتج :

$$N = \sqrt{H^2 + V^2} = H\sqrt{1 + \left(\frac{V}{H}\right)^2} = H\sqrt{1 + y'^2} \tag{2-24 b}$$

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\,\sqrt{1 + y'^2} \tag{2-24 c}$$

بمكاملة العلاقة (2-23) ينتج :

$$V = q_0 x + C_1 \qquad (2\text{-}15)$$

بتحقيق النتيجة السابقة لشروط البداية ينتج :

$$V(x=0) = 0 \quad : \quad C_1 = 0$$

وبالتبديل في المعادلة الاخيرة (2-25) فانها تأخذ الشكل التالي :

$$V = q_0 x$$

من هذه العلاقة ومن العلاقة (2-24a) ينتج :

$$V = q_0 x = Hy'$$

بمكاملة المعادلة الاخيرة يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$y = \frac{q_0 x^2}{2H} + C_2$$

وبتحقيقها لشرط البداية يتم تعيين ثابت التكامل .

$$y(x=0) = 0 \quad : \quad C_2 = 0$$

وبذلك تأخذ العلاقة الاخيرة الشكل التالي :

$$y = \frac{q_0 x^2}{2H} \qquad (2\text{-}25)$$

يمثل الشكل الهندسي للحبل خط الاستناد وهو يمثل هنا بمعادلة قطع مكافىء (Parabel) منسوب الى جملة الاحداثيات x , y التي ثبت مبدأها في قمة الحبل (العلاقة 2-26) .
ان ايجاد ثوابت التكامل هو في الحقيقة اصعب بكثير من المكاملة ذاتها . لينطلق الآن سعياً وراء ايجاد العلاقة التي تربط بين القيم :

$$H , N_1 , N_2 , x_1 , x_2 , y_1 , y_2$$

دون معرفة مسبقة للقيم المعطاة والقيم المطلوبة منها . مبدئياً يرى ان :

$$|x_1| + |x_2| = b \quad ; \quad y_2 - y_1 = h \qquad (2\text{-}27)$$

هي قيم محددة . من العلاقة (2-24b) وبالاستعانة بالعلاقة (2-26) ينتج ان :

$$N_1 = N(x=x_8) = \sqrt{H^2+V^2(x=x_1)} = \sqrt{H^2+(q_0 x_1)^2} \qquad (2\text{-}28)$$

$$N_2 = N(x=x_2) = \sqrt{H^2+V^2(x=x_2)} = \sqrt{H^2+(q_0 x_2)^2}$$

من العلاقة (2-26) يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$y_1=y(x=x_1) = \frac{q_0\ x_1{}^2}{2\ H}\ ;\ y_2 = y\ (x=x_2) = \frac{q_0\ x_2{}^2}{2H} \qquad (2.29)$$

والتي تنتج عنها العلاقة التالية :

$$2H(y_2-y_1) = 2Hh = q_0(x_2{}^2 - x_1{}^2\} = q_0\ (\,|x_2|+|x_1|)\,(|x_2|-|x_1|)$$
$$= q_0 b(\,|x_2|-|x_1|)$$

من هذه النتيجة ومن العلاقة (2-27a) يتم التوصل الى ابعاد القمة :

$$|x_1| = \frac{b}{2} - \frac{h\,H}{q_0 b}\ ;\quad |x_2| = \frac{b}{2} + \frac{h\,H}{q_0 b} \qquad (2.30)$$

حسب العلاقة (2-29) يرى ان ارتفاعات القمة y_1 , y_2 هي توابع للمتغير H وبذلك فان كافة المقادير هي توابع لنفس المتغير (الا وهو H) . لكن للاسف ، ان H على العموم ليست من البداية قيمة محددة . فمن الممكن ان يكون المعطى هو N_1 (او بالأحرى N_2) او طول الحبل الممثل بالعلاقة التالية :

$$L = \int dL = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1+y'^2}\, dx = \int_{-|x1|}^{|x2|} \sqrt{1+y'^2}\, dx = \int_{-|x1|}^{|x2|} \sqrt{1+\left(\frac{q_0 x}{H}\right)^2}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+\left(\frac{q_0 x}{H}\right)^2} + \frac{H}{q_0}\,\mathrm{Ar\,sinh}\,\frac{q_0 x}{H}\right]_{-|x\,1|}^{|x\,2|}$$

حيث ان x_1 , x_2 هي فصول نقاط التثبيت (إحداثيات نقاط التثبيت على المحور x) (ولذلك فهي تؤخذ مع إشارتها) . كما وقد يكون التدلي (Durchhang) y_1 (بالأحرى y_2) هو المعطى . كمثال على ايجاد الثوابت سوف يتم حساب H كتابع لـ y_1 , y_2 . حسب العلاقة (2.30) يستطاع كتابة ما يلي :

$$x_1^2 + x_2^2 = 2\left[\frac{b^2}{2} + \left(\frac{bH}{q_0 b}\right)^2\right]$$

وبالاستعانة بالعلاقة (2-29) ينتج :

$$\frac{y_1 + y_2}{H} = \frac{q_0}{2H}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{q_0 b^2}{h H}\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{h H}{q_0 b^2}\right)^2\right] \quad (2.30\ c)$$

باجراء إدخال القيمة عديمة الواحدة :

$$\zeta = \frac{h H}{q_0 b^2} \quad (2.31)$$

وبواسطة المعادلة :

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = f$$

فان العلاقة (2-30 c) تعطي معادلة من الدرجة الثانية من اجل ζ :

$$\zeta - \frac{2f}{h}\zeta + \frac{1}{4} = 0$$

والتي يكتب حلها كما يلي :

$$\zeta = \frac{f}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{h}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

او بالاستعانة بالعلاقة (2-27b) ايضاً كما يلي :

$$\zeta = \frac{1}{h}\left[f \pm \frac{1}{2}\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - (y_2 - y_1)^2}\right. = \frac{f \pm \sqrt{y_1 y_2}}{h}$$

باستبدال f بقيمتها يمكن ايضا الكتابة :

$$\zeta = \frac{(\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2})^2}{2h}$$

بواسطة المعادلة التالية :

$$h^2 = \left(\sqrt{y_2^2} - \sqrt{y_1^2}\right)^2$$

وبالاستعانة بالعلاقة (2-31) يتم اخيراً التوصل للعلاقة التالية :

$$H = \frac{q_0 b^3}{2} \frac{1}{(\sqrt{y_2} \mp \sqrt{y_1})^2} \qquad (2.33)$$

تتعلق الاشارة الموجودة في المخرج من حقيقة كون القمة واقعية (تقع بين نقطتي التثبيت 1 و 2) او خيالية (تقع ، على سبيل المثال ، على يسار النقطة 1) . فمن العلاقات (2-30) و (2-32) ينتج :

$$\frac{|x_2|}{b} = \frac{1}{2} - \zeta = - \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1 y_2}}{h}$$

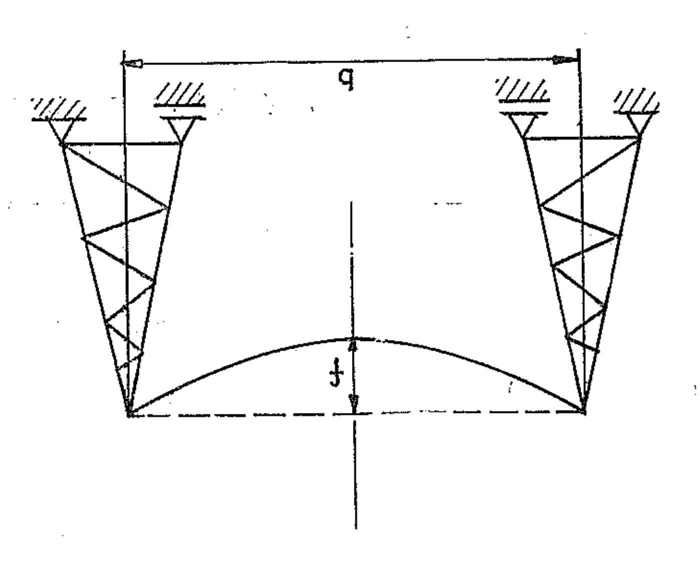
وهذه النتيجة موجبة (النقطة 1 تقع على يسار القمة) من اجل الاشارة السفلية وسالبة (النقطة 1 تقع على يمين القمة) من اجل الاشارة العلوية .

حالة خاصة :

$$h = 0 \quad , \quad y_1 = y_3 = f$$

من العلاقة (2-33) ينتج :

$$H = \frac{q_0 b^2}{8 f} \qquad (2\text{-}33\ b)$$



شكل 2-222

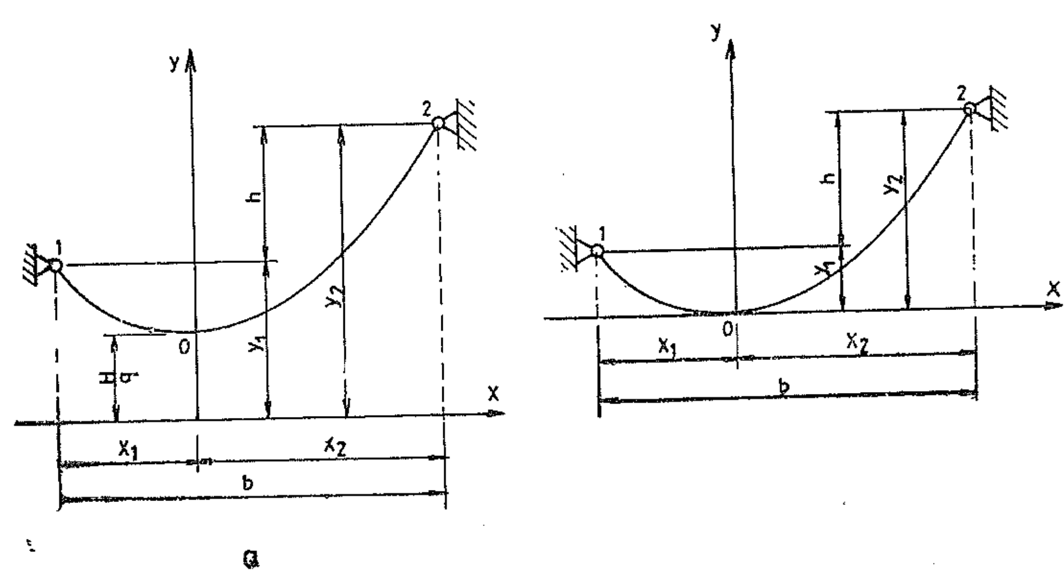
يحمل ، حبل طوله 100m ويبلغ تدليله الاعظمي (السهم) 50 cm ، بحمولة شاقوليةمقدارها $q_0 b=20$ kp (على سبيل المثال وزنه الذاتي) . يبلغ الشد الافقي الذي ينبغي ان يتحمـــله الحبل القيمة التالية :

$$H = \frac{20 \, . \, 100}{8 \, . \, 0{,}5} = 500 \text{ kp}$$

بذلك يتحمل كل من الأبراج المرسومة في الشـكل (222-2) قوة شاقولية مقدارها 10 kpوقوة أفقية مقدارها 500 kp .

٢ ــ ١٥ ــ ٢ الحمـولات الشاقوليـة ذات الشدة الثابتة بالنسبـة لطول الحبـل ، $q_v(s)=q=const$.

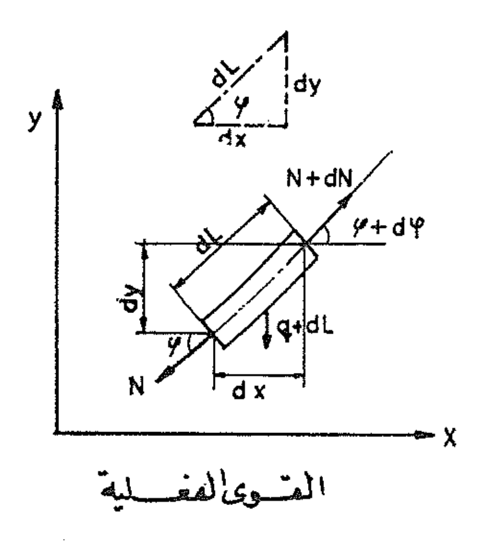
تشير q الى شدة الحمولة لـكل واحدة طول من الحبل (واحدتها kp/cm) (على سبيل المثال الوزن الذاتي للحبل) .

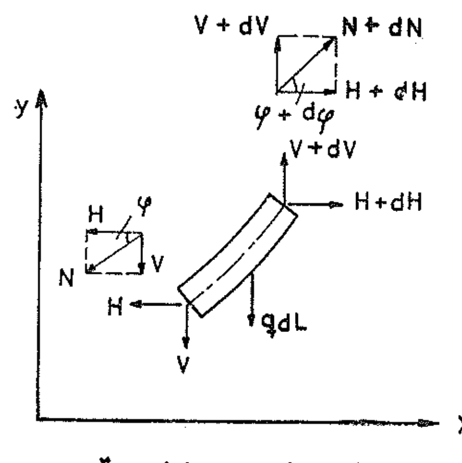


شكل 223-2

سيتم الآن حساب القوى المتشكلة في الحبل المحمل بوزنه الذاتي q (kp/cm) فقط او بقـــوى مشابهة للوزن الذاتي وكذلك التدلي الناجم عن ذلك .

ليقتطع من الحبل المثبت (المعلق) بين النقطتين 1 و 2 (شكل 223-2) عنصراً صغـــيراً طوله dL .





شكل 2-224

يعطي تطبيق شروط التوازن على العنصر الممثل في الشكل (2-224) المعادلات التالية :

$$\Sigma V = 0 : \quad -V - q\,dL + V + dV = 0$$

$$\Sigma H = 0 : \quad -H + H + dH \qquad = 0$$

منها ينتج أن :

$$H = \text{const.} \tag{2-34}$$

$$\frac{dV}{dL} = q \tag{2-35}$$

تكتب العلاقات التي تربط بين القوة الشاقولية V والقوة الأفقية H وقوة الحبل N من جهة وبين اطوال العنصر dx , dy , dL من جهة اخرى كما يلي :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{V}{H} = \frac{dv}{dx} = tg\,\varphi = y' \\ &N = \sqrt{H^2+V^2} = H\sqrt{1+(V/H)^2} = H\sqrt{1+y'^2} \\ &N = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+y'^2} \end{aligned}\right\} \tag{2-36}$$

من العلاقة (2-35) ينتج :

$$dV = q\,dL$$

وبادخال العلاقة (2-36 c) فيها فانها تأخذ الشكل التالي :

$$dV = q\,dx\sqrt{1+y'^2}$$

أو :

$$\frac{dV}{dx} = q\sqrt{1+y'^2} \qquad (2\text{-}37)$$

من العلاقة (2-36a) ينتج :

$$V = Hy'$$

باشتقاق هذه المعادلة وبمراعاة العلاقة (2-34) يتم التوصل للمعادلة التالية :

$$\frac{dV}{dx} = Hy'' \qquad (2\text{-}38)$$

بمقارنة العلاقتين (2-37) و (2-38) يرى أن

$$\frac{dV}{dx} = q\sqrt{1+y'^2} = Hy'' \qquad (2.39)$$

لايجاد التدلي يستعان بالمعادلة التفاضلية لمنحني الحبل التالية :

$$y'' = \frac{q}{H}\sqrt{1+y'^2} \qquad (2\ 40)$$

إن المعادلة (2-40) هي معادلة تفاضلية لا خطية (من الدرجة الثانية) ومن المرتبة الثانية ،لحلها يجرى التعويض التالي :

$$y' = p \quad ; \quad y'' = p' = \frac{dp}{dx} \qquad (2.41)$$

وبالتبديل في المعادلة (2-40) وبعد فصل المتغيرات (Trennung der Veränderlichen) ينتج :

$$\frac{q}{H}\,dx = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} \qquad (2.42)$$

باجراء عملية المكاملة يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\frac{q}{H} (x - x_0) = \text{Ar} \sinh p$$

أو

$$p = \sinh \frac{q}{H} (x - x_0) \qquad (2.43)$$

وأخيراً تعطي العلاقة السابقة بعد مراعاة الاختصارات (2-41) وبعد المكاملة ما يلي :

$$y - y_0 = \frac{H}{q} \cosh \frac{q}{H} (x - x_0) \qquad (2.44)$$

تتعلق ثوابت التكامل x_0 و y_0 من موضع مجموعة الاحداثيات . ولذلك يرى من الانسب جعل الاحداثي y يمر من اخفض نقطة في منحني الحبل وذلك بحيث يصبح هناك (شكل 221-2):

$$y' (x = 0) = 0$$

وبذلك يرى من العلاقة (2-43) أن $x_0 = 0$. بالتعويض في العلاقتين (2-43) و (2-44) يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$y' = p = \sinh \frac{q}{H} x \qquad (2.45)$$

$$y - y_0 = \frac{H}{q} \cosh \frac{q}{H} x$$

α ـ الاحداثيات كما في الشكل (2-223 a) :

لو ثبت مبدأ الاحداثيات بالشكل الذي ينعدم فيه ثابت التكامل $y_0 = 0$ ، لاصبحت العلاقة (2-45) كما يلي :

$$y = \frac{H}{q} \cosh \left(\frac{q}{H} x \right) \qquad (2.46)$$

ولبلغ ارتفاع الحبل في أخفض نقطة منه وفوق المحور x القيمة H/q . بالاستعانة بالعلاقة (2-36) يتم الحصول من العلاقة (2-46) على مايلي :

$$V = H \sinh\left(\frac{q}{H} x\right) \quad ; \quad dL = dx \cosh\left(\frac{q}{H} x\right) \qquad (2.47)$$

$$N = H \cosh\left(\frac{q}{H} x\right) \quad ; \quad L = \frac{H}{q}\left[\sinh\left(\frac{q}{H} x_2\right) + \sinh\left(-\frac{q}{H} x_1\right)\right]$$

حيث أن x_1 و x_2 هي احداثيات نقاط التثبيت (التعليق) على المحور x (ولذلك تؤخذ مع اشارتها) . بهذه العلاقات يمكن اعتبار المشكلة قد أصبحت محلولة .

β ـ الاحداثيات كما في الشكل (2-223 b) :

لو ثبت مبدأ الاحداثيات في أخفض نقطة من الحبل لاصبحت العلاقة (2-45) بعـــد تطبيق شرط البداية :

$$y(x = 0) = 0 \quad : y_0 = -\frac{H}{q}$$

كما يلي :

$$y = \frac{H}{q}\left[\cosh\left(\frac{q}{H} x\right) - 1\right] \qquad (2.48)$$

تسمى هذه العلاقة (2-48) بمعادلة السلسلة (وذلك لان السلسلة المنتظمة تأخذ هذا الشكل تحت تأثير وزنها الذاتي) .

بالاستعانة بالعلاقة (2-48) يتم الحصول من المعادلة (2-36) على ما يلي :

$$N = H\sqrt{1+y'^2} = H\sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{q}{H} x\right)} = H \cosh\left(\frac{q}{H} x\right)$$

$$V = H y' = H \sinh\left(\frac{q}{H} x\right)$$

$$dL = dx\sqrt{1+y'^2} = dx \cosh\left(\frac{q}{H} x\right)$$

$$L = \int_{x1}^{x2} dL = \int_{x1}^{x2} \cosh\left(\frac{q}{H} x\right) dx = \frac{H}{q} \sinh\left(\frac{q}{H} x\right)\Big|_{x1}^{x2} \qquad (2.49)$$

$$= \frac{H}{q}\left[\sinh\left(\frac{q}{H}x_2\right)-\sinh\left(\frac{q}{H}x_1\right)\right]=\frac{H}{q}\left[\sinh\left(\frac{q}{H}x_2\right)+\sinh\left(\frac{q}{H}x_1\right)\right]$$

$$= \frac{H}{q}\left[\sinh\left(\frac{q}{H}\,|x_2|\right)+\sinh\left(\frac{q}{H}\,|x_1|\right)\right]$$

بمقارنة العلاقة (2-49) مع العلاقة (2-47) يتبين أن موضع الاحـداثيات لم يغير من النتـائج وهذا شيء صحيـح . ان ايجـاد ثوابت منحني السلسلة هو اصعب بكثـير منه بالنسبة لمنـحني القطع المكافىء .

في حالة التدلي الكبير (große Durchhang) (حيث أن H صغيرة) يختلف منحني السـلسلة عن القطع المـكافىء اختلافاً كبيراً. اما في حالة التدلي الصغير (حيث ان H كبيرة) فان نشر معادلة المنحني (2-48) يعطي المعادلات التقريبية التالية :

$$y = \frac{H}{q}\left[\left(1+\frac{q^2x^2}{2H^2}+\frac{q^4x^4}{24H^4}+\cdots+\frac{q^{2n}x^{2n}}{2n!\,H^{2n}}+\cdots\right)-1\right]$$

$$= \frac{H}{q}\left[\frac{q^2x^2}{2H^2}+\frac{q^4x^4}{24H^4}+\cdots+\frac{q^{2n}x^{2n}}{2n!\,H^{2n}}+\cdots\right] \qquad (2\text{-}50)$$

كما ان المعادلة (2-49 a) التي تعطي قوة الشد N تأخذ الشكل العام :

$$N = H\left[1+\frac{q^2x^2}{2H^2}+\frac{q^4x^4}{24H^4}+\cdots+\frac{q^{2n}x^{2n}}{2n!\,H^{2n}}+\cdots\right] \qquad (2\text{-}51)$$

بما ان H كبيرة لذلك يمكن الاكتفاء بالحد الاول من السلسلة وذلك لصغر بقية الحدود بالنسبة له وبذلك فان معادلة المنحني تأخذ الشكل التالي :

$$y \approx \frac{H}{q}\,\frac{q^2x^2}{2H^2} = \frac{q\,x^2}{2H} \qquad (2\text{-}52)$$

إذا فنتيجة نشر معادلة المنحني الفعلية هي معادلة القطـع المـكافىء (2-26) . اما معادلة الشـد فتصبـح كالتالي :

$$N \approx H \qquad (2\text{-}53)$$

حالات خاصة :

آ ـ السلسلة غير المتناظرة (نقاط التعليق لاتقع على ارتفاع واحد) :

يبين الشكل (2-223a) خطاً معلقاً من نقطتين (1) و (2) واقعتين على ارتفاعات مختلفة ، وتعلو

عن بعضها بالمقدار h . بفرض أن (0) هي النقطة السفلى من الخط حيث يكون أفقياً ، فان (01) تمثل سلسلة نصف طولها x_1 وان (02) تمثل سلسلة نصف طولها x_2 . ويمكن تطبيق معادلات السلسلة (2-48) و (2-49a) على كل قسم ، فينتج :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{H}{q}\left[\cos h\left(\frac{q x_1}{H}\right) - 1\right] \\ y_2 &= \frac{H}{q}\left[\cos h\left(\frac{q x_2}{H}\right) - 1\right] \\ N_1 &= H \cos h\left(\frac{q x_1}{H}\right) \\ N_2 &= H \cos h\left(\frac{q x_2}{H}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}54)$$

ومن الواضح ان قوة الشد العظمى تكون عند نقطة التعليق المرتفعة (2) ، نظراً لبعد المسافة x_2 . ان الكميات المعطاة عادة هي q و h والبعد بين الاعمدة (x_1+x_2) . من العلاقات (2-54) ينتج :

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \frac{H}{q}\left[\cos h\left(\frac{q x_2}{H}\right) - \cos h\left(\frac{q x_1}{H}\right)\right] = h \\ N_2 &= H \cos h\left(\frac{q x_2}{H}\right) \qquad (2\text{-}55) \\ x_1 + x_2 &= b \end{aligned}$$

ومن هذه المعادلات الثلاثة ، يمكن حساب المجاهيل الثلاثة H, x_2, x_1 ثم استنتاج السهم وقوة الشد ويمكن حل هذه المعادلات بطريقة التقريب المتتالي ولكن يستحسن الحصول على حل تقريبي باستعمال العلاقات التقريبية للسلسلة كما يلي :

$$N \approx H$$

$$y_1 \approx \frac{q x_1^2}{2N} \approx \frac{q x_1^2}{2H}$$

$$y_2 \approx \frac{q x_2^2}{2N} \approx \frac{q x_2^2}{2H}$$

$$y_2 - y_1 = h \approx \frac{q}{2N}(x_2^2 - x_1^2) = \frac{q}{2N}(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

$$\approx \frac{q\,b}{2N}(x_2 - x_1)$$

ومنــه :

$$x_2 - x_1 = \frac{2\,N\,h}{q\,b}$$

ولكن :

$$x_2 + x_1 = b$$

لذلك :

$$\left.\begin{aligned} x_2 &\approx \frac{1}{2}\,b + \frac{Nh}{q\,b} \\ x_1 &= \frac{1}{2}\,b - \frac{Nh}{q\,b} \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}56)$$

ومنه تستنتج قيمة السهم .

ب ـ السلسلة المتناظرة (نقاط التعليق تقع على إرتفاع واحد) .

إذا وقعت نقطتا التثبيت (1) و (2) على نفس الارتفاع (سلسلة متنـــــاظرة) (الشكل 2-225) وكان البعد الافقي (باتجاه المحور x) بينها يساوي b ، فان الاحداثيات الافقية عند نهـايتي النـاقل هي :

$$x_1 = -\frac{b}{2} \qquad , \qquad x_2 = +\frac{b}{2}$$

من العلاقة (2-49) يتم الحصول على قوة الشد N في الحبل :

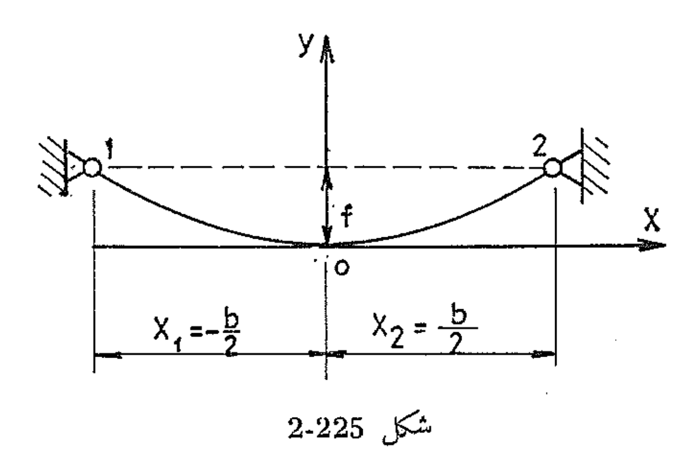
$$N = H \cos h\left(\frac{q}{H}\,\frac{b}{2}\right) \qquad (2\text{-}57\ a)$$

أما السهم (القيمة العظمى للتدلي) فيساوي ترتيب (البعد باتجاه الاحداثي y) نقطتي التعليق ويعطى بالعلاقة :

$$f = y\left(x = \frac{b}{2}\right) = \frac{H}{q}\left[\cos h\left(\frac{q}{H}\,\frac{b}{2}\right) - 1\right] \qquad (2\text{-}57\ b)$$

وأما طول منحني السلسلة فيتم الحصول عليه بتبديل $x_1 = -b/2$ و $x_2 = +b/2$ في العلاقة (2-49 d) :

$$L = \frac{H}{q}\left[\sin h\left(\frac{q}{H}\ \frac{b}{2}\right) + \sin h\left(\frac{q}{H}\ \frac{b}{2}\right)\right] = 2\frac{H}{q}\sin h\left(\frac{q}{H}\ \frac{b}{2}\right) \quad (2\text{-}57\,c)$$



شكل 2-225

في حالة كون H هو المطلوب وليس f عندئذ ينبغي حل معادلة جبرية من النوع المسمى بال (transzendente Gleichung) وذلك بواسطة التجريب أو بطريقة تخطيطية (ان كان ذلك ممكناً). كذلك هو الحال عندما يكون L (طول السلسلة) هو المعطى وليس f ، عندئذ تعطي العلاقة (2-49 b) ما يلي :

$$V\left(x = \frac{b}{2}\right) = q\,\frac{L}{2} = H \sin h\left(\frac{q}{H}\ \frac{b}{2}\right)$$

وهو يساوي نصف وزن الحبل . وبذلك ينتج :

$$\frac{qL}{2H} = \sin h\left(\frac{q}{H}\ \frac{b}{2}\right) \quad (2\text{-}57d)$$

يعطي حل هذه المعادلة (transzendente Gleichung) H

المعادلات التقريبية :

قوه الشد :

$$N \approx H \quad (2\text{-}57e)$$

السهم :

$$f = y\left(x = \frac{b}{2}\right) \approx \frac{q\,b^2}{8\,H} \approx \frac{q\,b^2}{8\,N} \qquad (2\text{-}57\ f)$$

طول الحبـل :

$$L = 2\,\frac{H}{q}\left[\frac{q}{H}\,\frac{b}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{q}{H}\,\frac{b}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{(2\,n+1)!}\left(\frac{q}{H}\,\frac{b}{2}\right)^{2n+1} + \cdots\right]$$

$$L \approx 2\,\frac{H}{q}\left[\frac{q}{H}\,\frac{b}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{q}{H}\,\frac{b}{2}\right)^3\right] = b + \frac{q^2\,b^3}{24H^2} \qquad (2\text{-}57\ g)$$

لقد افترض ، في كل الاعتبارات السابقة ، كما قد تم التنويه عنـــه سابقاً ، ان الحبل عديم الاستطالة (عديم التمدد) ولكنه في الحقيقة يعاني استطالات مما ينقص (يخفض) قيمة الشد الافقي وذلك عندما تكون القيم y_1 , y_2 , x_1 , x_2 , q , L معطاة مسبقاً .

٢ ـ ١٥ ـ ٣ الحبال ذات التدلي الضئيل

يقال عن الحبال انها ذات تدلي ضئيل عندما يكون تقعرها بسيطاً ونتيـــجة لذلك فهي ذات اجهادات شد كبيرة (الشكل 2-226) . بالامكان كتابة حل تقريبي من اجـل الحبال ذات التدلي الضئيل كما يلي :

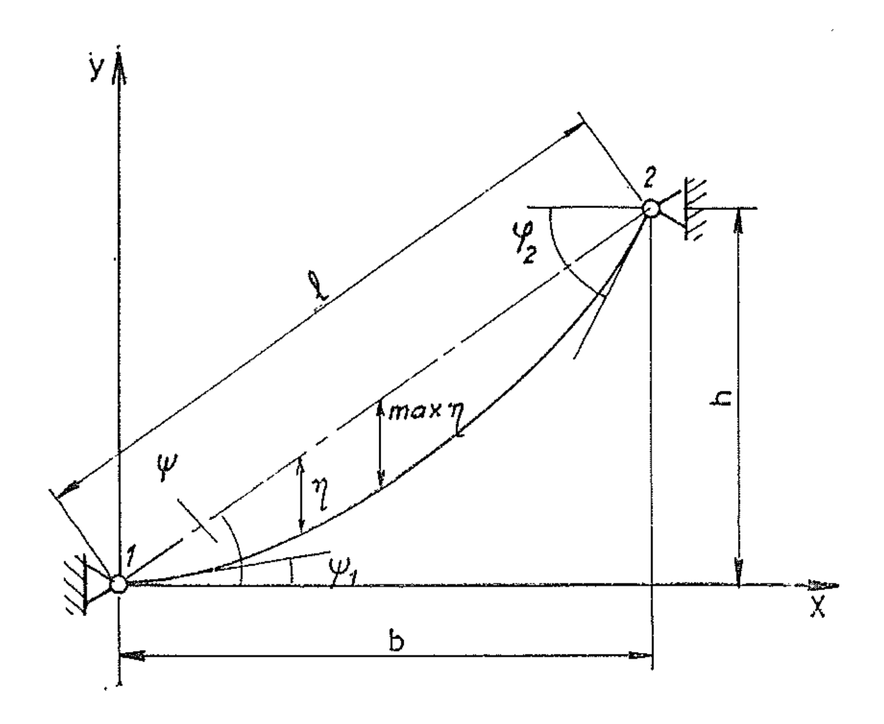
يفترض ان المسقط الشاقولي لواحـدة الطول ثابت وذلك لان زاوية التماس (وهي الزاوية التي يشكلها المماس مع الافق) تتغير تغيراً طفيفاً ، اي يمكن الاستعاضة عن الزاوية φ بزاوية ميل وتر الاستناد ψ وبذلك يستطاع الكتابة كما يلي :

$$\frac{q}{\cos\varphi} \approx \frac{q}{\cos\psi} = \bar{q}$$

حيث ان

$$\cos\psi = \frac{b}{l} = \frac{b}{\sqrt{h^2+b^2}}$$

سوف يثبت مبدأ مجموعة الاحداثيات y , x في نقطة التعليق السفليـــة اليسارية (النقطة 1) وبذلك ينتج :



شكل 2-226

$$q\,dL = \bar{q}\,dx = dV = Hy''\,dx \qquad (2\text{-}58)$$

من هذه العلاقة يتم التوصل لما يلي :

$$y'' = \frac{\bar{q}}{H}$$

وبالمكاملة ينتج :

$$y' = \frac{\bar{q}}{H}x + C_1$$

$$y = \frac{\bar{q}}{H}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \qquad (2\text{-}59)$$

شرط الاطراف (شروط البداية والنهاية) :

من الشكل (2-226) يرى ان

$$y\,(x = 0) = 0 \quad ; \quad y\,(x = b) = h$$

بعد تحقيق المعادلة (2-59) لشروط الاطراف يمكن كتابتها كما يلي :

$$y = \frac{\bar{q}}{2H} x (x - b) + \frac{h}{b} x = \eta + \frac{h}{b} x \qquad (2\text{-}60)$$

حيث ان η هو تدلي الحبل والذي يعني هنا الانحراف (الحيدان) عن المستقيم $(h/b)\ x$. اما القيمة الاعظمية للتدلي فهي :

$$\max \eta = \eta \left(x = \frac{b}{2}\right) = \frac{\bar{q}\, b^2}{8H}$$

يبلغ ميل الحبل ، الذي افترض في البداية أنه ثابتاً ، القيمة التالية :

$$y' = \frac{\bar{q}}{2H} (2x - b) + \frac{h}{b} = \eta' + \frac{h}{b}$$

$$y'(x = 0) = \frac{h}{b} - \frac{\bar{q}\, b}{2H} \qquad (2\text{-}61)$$

$$y'(x = b) = \frac{h}{b} + \frac{\bar{q}\, b}{2H}$$

يتم حساب طول الحبل من العلاقة التالية :

$$L = \int dL = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad (2\text{-}62)$$

بادخال العلاقات (2-61) بعين الاعتبار ، ينتج :

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + (h/b)^2 + 2\,(h/b)\,\eta' + \eta'^2}\, dx$$

$$= \frac{l}{b} \int_0^b \sqrt{(b/l)^2 + (b/l)^2 (h/b)^2 + 2\, h/b\, (b/l)^2\, \eta' + (b/l)^2\, \eta'^2}\, dx$$

$$= \frac{l}{b} \int_0^b \sqrt{\frac{b^2 + h^2}{l^2} + 2\,\eta'\,\frac{bh}{l^2} + \eta'^2\,\frac{b^2}{l^2}}\, dx$$

من الشكل (2-226) وحسب قانون فيثاغورث يمكن كتابة ما يلي :

$$l^2 = b^2 + h^2$$

بالتبديل في العلاقة الاخيرة ينتج :

$$L = \frac{l}{b}\int_0^b \sqrt{1 + 2\eta' \frac{bh}{l^2} + \eta'^2 \frac{b^2}{l^2}}\, dx$$

$$L \approx \frac{l}{b}\int_0^b \left(1 + \eta' \frac{bh}{l^2} + \frac{1}{2}\eta'^2 \left(\frac{b}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\eta'^2 \frac{(bh)^2}{l^4}\right) dx$$

$$L \approx l + \left(\frac{\bar{q}}{H}\right)^2 \frac{b^6}{24\, l^3} \qquad (2\text{-}63)$$

حيث ان l هو طول المستقيم $\overline{12}$:

$$l = \frac{b}{\cos\psi} = \frac{h}{\sin\psi}$$

٢ ـ ٥ ـ ٤ تأثير الرياح والجليد

حين تنخفض حرارة الجو الى (−3,5 °C) تصبح الظروف الجوية مناسبة لتشكل البرد او الجليد وتراكم سماكة معتبرة من الجليد على الحبال (النواقل الكهربائية او كابلات الجسور) وفي التصميم يجب أخذ سماكة جليد مقدارها 9,5 mm في خطوط التوتر العالي و 4,8 mm في خطوط التوتر المنخفض بعين الاعتبار ، وذلك إستناداً الى النظم القياسية (المواصفات) البريطانية . وبالاضافة الى ذلك فان قوة الرياح تعمل على مسقط الناقل المتعامد مع اتجاه الرياح وعليه طبقة الجليد وحين التصميم ، يجب السماح لضغط رياح مقداره $40\ kp/m^2$ ، الناتج عن رياح سرعتها 85 km/h ، فاذا كان وزن الجليد وضغط الرياح بالمتر من طول الناقل يساوي w_i و w_w على التوالي فان القوة الكلية q بالمتر الواحد من طول الناقل تساوي :

$$q = \sqrt{(g + w_i)^2 + w_w^2} \qquad (2\text{-}64)$$

(حيث ان g هو الوزن الذاتي لمتر من طول الناقل) وتعمل باتجاه يصنع زاوية α مع الاتجاه الشاقولي (شكل 2-227 b) ، حيث :

$$tg\ \alpha = \frac{w_w}{g+w_i} \qquad (2\text{-}65)$$

وينتج عن ذلك ان الناقل يتخذ شكل السلسلة في ذلك المستوي المائل ويتبع معادلتها فاذا كان D هو القطر الاجمالي للناقل وكانت R هي سماكة الجليد (شكل 2-227) فان :

$$w_i = 10^3 \cdot \pi \left[\left(\frac{D}{2} + R \right)^2 - \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \pi\ R\ (D+R)\ .\ 10^3\ kp/m \qquad (2.66)$$

إذ ان وزن المتر المكعب من الجليد يساوي (10^3kp) ، كما أن :

$$w_w = 40\ (D + 2R)\quad kp/m \qquad (2.67)$$

٢ ـ ١٥ ـ ٥ أمثلة :

مثال 106 :

المطلوب : حساب السهم الاعظمي لناقل متناظر ، طول فتحته 196 m ووزنه بواحدة الطـول 0,72 kp/m وذلك عندما تكون القيمة العظمى المسموح بها لقـــوة الشد تساوي 1360 kp باستخدام العلاقات الدقيقة ثم العلاقات التقريبية وإجراء مقارنة بين النتائج .

الحل :

١ ـ باستعمال العلاقات الدقيقة :

$$\frac{b}{2} = \frac{196}{2} = 98\ m$$

$$q = 0{,}72\ kp/m$$

وبالتعويض في العلاقة (2-57 a) التي تعطي القيمة العظمى للشد ينتج :

$$1360 = H\ \cosh \frac{98\ .\ 0{,}72}{H} = H\ \cosh \frac{71}{H}$$

ويمكن ايجاد قيمة H بطريقة تجريبية (باستعمال الجداول قطع الزائدية مثلا) أو بطريقـــة تخطيطية او بنشر السلسلة في العلاقة (2-57 a) كما يلي :

$$\frac{N}{H} = \cosh\frac{q\,b}{H2} = 1 + \frac{q^2\,b^2}{8\,H^2} + \frac{q^4\,b^4}{384\,H^4} + \cdots$$

وبما ان النسبة qb/H2 صغيرة ، لذلك ينتج :

$$\frac{N}{H} \approx 1 + \frac{q^2\,b^2}{8\,H^2}$$

ومنه :

$$H^2 - H\,N + \frac{1}{8}\,q^2 b^2 = 0$$

أي ان :

$$H = \frac{1}{2}\,N + \frac{1}{2}\sqrt{N^2 - \frac{q^2\,b^2}{2}} = \frac{1}{2}\,N\left[1 + \sqrt{1 - \frac{q^2\,b^2}{2N^2}}\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}\,N\left[1 + 1 - \frac{q^2\,b^2}{4\,N^2}\right] = N - \frac{q^2\,b^2}{8\,N}$$

$$H \approx 1360 - \frac{71^2}{2\;1360} = 1360 - 1{,}83 = 1358{,}17\ \text{kp}$$

وبالتعويض في العلاقة (2-57 b) يتم تعيين السهم :

$$f = \frac{1358}{0{,}72}\,(1{,}00136 - 1) = 2{,}6\ \text{m}$$

ب ـ باستعمال العلاقة التقريبية (2-57 f) :

بسبب :

$$N \approx H$$

ينتج :

$$f \approx \frac{q\,b^2}{8\,H} \approx \frac{q\,b^2}{8\,N} = \frac{0{,}72.(196)^2}{8\,.\,1360} = 2{,}55\ \text{m}$$

ويلاحظ ان الفرق بين القيمتين يساوي:

$$2{,}6 - 2{,}55 = 0{,}05\ \text{m}$$

ويعادل :

$$\frac{0,05}{2,6} \cdot 100 = 2,2\ \%$$

مثال 107 :

ناقل قطره 19,6 mm ووزنه 1,03 kp/m مغطى بالجليد بسماكة 12,6 mm ويقع تحت ضغط رياح قدره $40\ kp/mm^2$ وقوة تحمله 8000 kp .

المطلوب : حساب ارتفاع نقاط التعليق اللازم كيلا تزيد قوة الشد في الناقل عن نصف قوة التحمل ، اذا كان التباعد بين الاعمدة يساوي 270 m وكان ارتفاع النقطة السفلى من الناقل عن سطح الارض يزيد عن 6,6 m تحت تلك الظروف .

الحل :

حسب العلاقة (2.66) والعلاقة (2-67) ينتج :

$$w_i = \pi \cdot 12,6\ (19,6+12,6)\ 10^3 = 0,36\ kp/m$$

$$w_w = 40\ \left(\frac{19,6+25,4}{10^3}\right) \qquad = 0,53\ kp/m$$

وحسب العلاقة (2-64) :

$$q = \sqrt{(1,03+0,36)^2+0,53^2} = 2,72\ kp/m$$

وقوة الشد العظمى في الناقل :

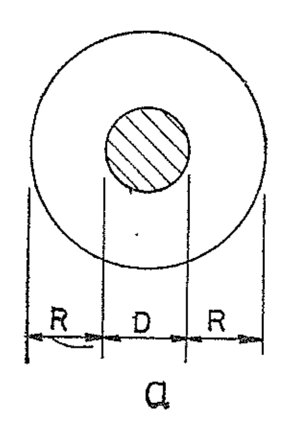
$$N = \frac{1}{2} \cdot 8000 = 4000\ kp$$

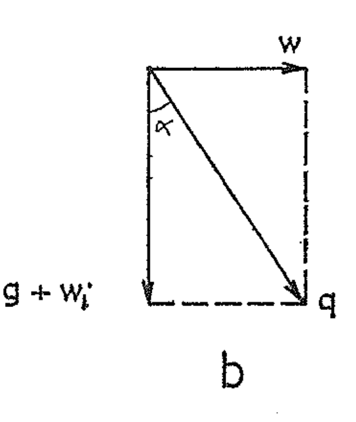
وباستعمال العلاقة التقريبية (2.57 f) لحساب السهم ينتج :

$$f \approx \frac{q\,b^2}{8H} \approx \frac{q\,b^2}{8\,N} = \frac{2,72 \cdot 2,75^3}{8 \cdot 4000} = 6.2\ m$$

اما باستعمال الطريقة الاكثر دقة ، كما في المثال السابق ، فينتج :

$$H = N - \frac{q^2\,b^2}{8\,N} = 4000 - \frac{(2,72-270)^2}{8 \cdot 4000} = 3989\,kp$$





شكل 2-164

وبالتعويض في العلاقة (2 57 b) ينتج :

$$f = \frac{H}{q}\left[\cosh\left(\frac{q\,b}{2H}\right) - 1\right] = \frac{3980}{2,72}\left[\cosh\left(\frac{2.72\,.\,270}{2.3980}\right) - 1\right] = 6,24\text{m}$$

ويلاحظ أن القيمتين متقاربتين . وارتفاع نقاط التعليق هو

$$6,24 + 6,60 = 12,84 \text{ m}$$

أي يجب ان لا يقل عن (13 m) .

مثال 108 :

يعبر خط هوائي نهراً ، ويستند على عمودين ارتفاعها 45 m , 90 m فوق سطح الماء على التوالي ، والبعد بينهما 330 m . فاذا كانت القيمة العظمى لقوة الشد في الخط 1940 kp ووزن الخط 0,9 kp/m .

المطلوب : ايجاد ارتفاع الناقل عن سطح الماء في النقطة المتوسطة بين العمودين .

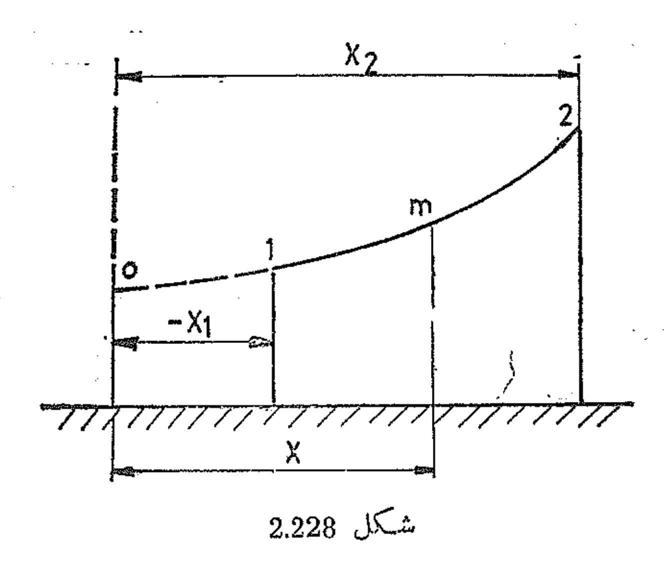
الحل :

يعين اولا الحل التقريبي باستعمال العلاقات (2-56 فينتج :

$$x_2 = \frac{330}{2} + \frac{1940\,.\,45}{0,9\,.\,330}\quad 115 + 293 = 408 \text{ m}$$

$$x_1 = 115 - 293 = -178 \text{ m}$$

وتدل الاشارة السالبة لـ x_1 على ان النقـاط 2,1 تقعان على نفس الطرف بالنسبة للنقطة 0 (شكل 2-228) . وقيمة x عند النقطة المتوسطة m تساوي :



شكل 2.228

$$x = \frac{1}{2}(408 + 178) = 298 \text{ m}$$

لذلك فان ارتفاعها فوق النقطة 0 يساوي :

$$y = \frac{q x^2}{2H} \approx \frac{q x^2}{2N} = \frac{0{,}9 . 293^2}{2 . 1940} = 19{,}9 \text{ m}$$

وارتفاع النقطة 2 فوق النقطة 0 يساوي :

$$y_2 = \frac{q {x_2}^2}{2 N} \approx \frac{q {x_2}^2}{2 H} = \frac{0{,}9 . 408^2}{2 . 1940} = 48{,}6 \text{ m}$$

لذلك فان النقطة m تنخفض عن النقطة 2 بمقدار :

$$48{,}6 - 19{,}9 = 28{,}7 \text{ m}$$

أي أن إرتفاعها عن سطح الماء هو :

$$90 - 28{,}7 = 61{,}3 \text{ m}$$

وللحصول على الحل الدقيق ، يفضل كتابة المعادلة الأولى (2.55 a) كما يلي :

$$y_2 - y_1 = h = \frac{H}{q}\left(\cos h \frac{q\, x_2}{H} \quad \cos h \frac{q\, x_1}{H}\right)$$

$$= \frac{2H}{q} \sin h \frac{q(x_2 - x_1)}{2 H} \sin h \frac{q(x_2 + x_1)}{2 H}$$

أى أن :

$$h = \frac{2\,H}{q} \sin h \frac{q\,b}{2H} \sin h \frac{q\,(x_2 - x_1)}{2\,H} \qquad (2\text{-}68)$$

ثم تستعمل طريقة التقريب المتتالي كما يلي :
تعوض قيمة x_2 الناتجة عن الحل التقريبي في المعـــادلة الثانية من العلاقات (2-55 d) فيتم الحصول على قيمة تقريبية أولى (H) فينتج :

$$1940 = H \cos h \frac{0{,}9 \,.\, 408}{H} = H \cos \frac{367}{H}$$

وهذه من الصيغة

$$\cos h\, y = 5{,}3\, y$$

حيث

$$y = \frac{367}{H}$$

يعطي حل المعادلة الجبرية (transzendente Gleichung) الذي يتم اما بطريقة تجريبية عددية أو بطريقة تخطيطية النتيجة التالية :

$$y = 0{,}193$$

لذلك فان :

$$H = \frac{367}{0{,}193} = 1840 \text{ kp}$$

ثم تعوض هذه القيمة في العلاقة (2-67) بعد ان تكتب بالشكل التالي :

$$\sin h \left[\frac{q\,(x_2 - x_1)}{2\,H}\right] = \frac{q\,b}{2\,H \sin h\, \frac{q\,b}{2H}}$$

فينتج :

$$\sin h \left[\frac{0{,}9\,(x_2 - x_1)}{2\,.\,1890}\right] = \frac{0{,}9\,.\,45}{2\,.\,1890\,.\,\sin h\,\left(\frac{0{,}9\,.\,330}{2\,.\,1890}\right)}$$

$$= \frac{0.9\,.\,45}{2\,.\,1890\,.\,0{,}0785} = 0{,}1372$$

لذلك

$$\frac{q\,(x_2 \quad x_1)}{2\,H} = 0{,}1368$$

ومنه

$$x_2 - x_1 = \frac{2\,.\,1890\,.\,0{,}1368}{0{,}9} = 577\ \mathrm{m}$$

ولكن

$$x_2 + x_1 = 330\ \mathrm{m}$$

لذلك

$$x_2 = 454\ \mathrm{m}$$

وهذه هي القيمة التقريبية الثانية لـ x_2 والتي ستستعمل لايجـاد قيمة تقريبية ثانية لـ H فينتج $H = 1890\ \mathrm{kp}$ ومنها ينتج $x_2 = 453\ \mathrm{m}$ التي تقارب القيمة السابقة مما يدل على ان نتائج التقريب الثاني تعتبر مناسبة (يفضل في الحيـاة العمليـة استخدام طريقـة التصحيح لنيوتن للحصول على قيم دقيقة وبسرعة . لكن للاسف لا يطلب من طلاب هذه المرحلة معرفتها ولذلك لم تستخدم) .

إن فصل النقطة المتوسطة هو :

$$x = 453 - \frac{1}{2}\,330 = 288\ \mathrm{m}$$

وعمقها بالنسبة للنقطة 2 :

$$\frac{H}{q}\left(\cos h\,\frac{453\,q}{H} - \cosh\frac{2889}{H}\right) =$$

$$= \frac{2\,H}{q}\ \sin\ h\ \frac{165\,q}{2\,H}\,\sin h\ \frac{741\,q}{2\,H} = 32{,}2\ \mathrm{m}$$

أي أن ارتفاعها عن سطح الماء هو :

$$90 - 32 = 58\ \mathrm{m}$$

ويلاحظ ان الفارق بـين نتـائـج الطريقة التقريبية ونتائـج الطريقـة الدقيقـة هو معتـبر في هذه الحالة .

٢ ـ ١٦ الجيزان الفراغية

٢ ـ ١٦ ـ ١ ردود أفعال المساند في الجيزان الفراغية

مثـال 109 :

حملت بلاطة متجانسة وزنها G وتستند بواسطة القضبان 1 --- 6 بحمولة اضافية تتألف من القوى P_1 , P_2 (شكل 2-229) .

المعطى :

$$G = 100\,kp \;;\; P_1 = 200\,kp \;;\; P_2 = 100\,kp$$

$$a = 4\,m \;,\; b = 4\,m \;;\; c = 3\,m$$

المطلوب : ايجاد قوى القضبان .

الحـل :

بتطبيق شروط التوازن الفراغية يتم التوصل لمجموعة المعادلات التالية :

$$\sum_{\nu} P_{x\nu} = 0 \;:\; \frac{4}{5} S_3 - P_2 = 0$$

$$\sum_{\nu} P_{y\nu} = 0 \;:\; \frac{4}{5} S_1 - \frac{4}{5} S_5 = 0$$

$$\sum_{\nu} P_{z\nu} = 0 \;:\; -P_1 - G - \frac{3}{5} S_1 - S_2 - \frac{3}{5} S_3 - S_4 - \frac{3}{5} S_5 - S_6 = 0$$

$$\sum_{\nu} M_{x\nu} = 0 \;:\; -\frac{4}{5} S_1\, c - S_6 b - P_1 b - \frac{1}{2} G\, b = 0$$

$$\sum_{\nu} M_{y\nu} = 0 \;:\; \frac{4}{5} S_3\, c + S_4 a + S_6 a + \frac{1}{2} Ga - P_2 c \frac{3}{5} S_5 a = 0$$

$$\sum_{\nu} M_{z\nu} = 0 \;:\; -\frac{4}{5} S_5\, a + P_2\, b = 0$$

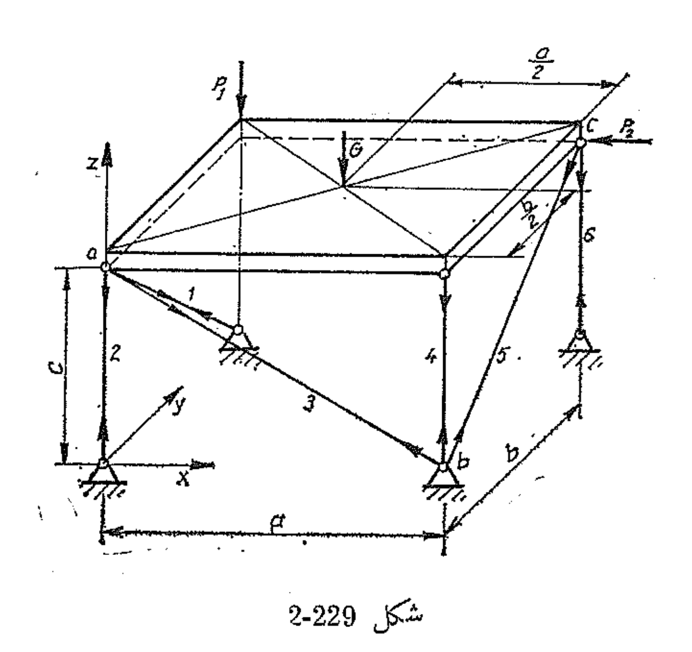
تبلغ أطوال القضبان 1, 3 , 5 القيم التالية :

$$\sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + c^2} = 5\,m$$

النتـائج :

$$S_1 = +125 \text{ kp} \quad ; \quad S_3 = +125 \text{ kp} \quad ; \quad S_5 = +125 \text{ kp}$$

$$S_2 = -400 \text{ kp} \quad ; \quad S_4 = +200 \text{ kp} \quad ; \quad S_6 = = 325 \text{ kp}$$



شكل 229-2

لقد كان بالامكان التوصل بسرعة الى قوى القضبان وذلك باستبدال شروط توازن القوى بشروط توازن عزوم أخرى ، فلو طبقت شروط توازن العزوم بالنسبة للمحاور التي تؤدي لأن تبقى في كل معادلة قوة قضيب واحدة مجهولة يختلف ذراعهـــا عن الصفر ، لنتج ، على سبيل المثـال (شكل 229-2) :

$$\Sigma M_{AC}=0 : P_1 \frac{1}{2} \sqrt{2}\, a - S_4 \frac{1}{2} \sqrt{2}\, a = 0 \;;\; S_4 = P_1$$

$$\Sigma M_{AB} = 0 : \frac{4}{5} P_1\, b + \frac{4}{5} G \frac{1}{2} b + \frac{3}{5} P_2\, b + \frac{4}{5} S_6\, b = 0 :$$

$$S_6 = -\left(P_1 + \frac{3}{4} P_2 + \frac{1}{2} G\right)$$

٢ ـ ١٦ ـ ٢ قيم القطع في الجيزان الفراغية

تطبق على الجيزان المستوية التي تقع تحت تأثير مجموعة القوى المستوية ثلاثة شروط للتوازن هي :

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu} = 0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu} = 0 \quad ; \quad \sum_{\nu=1}^{n} M_{z\nu} = 0$$

كما وأنها تحتوي على ثلاثة قيم للقطع (هي القوة الناظمية أو ما تسمى ايضاً بالقوة الطولية ، والقوة العرضية وعزم الانعطاف) . أما الجيزان الفراغية الواقعة تحت تأثير مجموعة القوى الفراغية (شكل 2-230) فلها ستة شروط للتوازن هي :

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_{x\nu} = 0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} P_{y\nu} = 0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} P_{z\nu} = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} M_{x\nu} = 0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} M_{y\nu} = 0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} M_{z\nu} = 0$$

كما وأن المقطع العرضي الواحد يحتوي على ستة قيم قطع (شكل ، 2-23) .

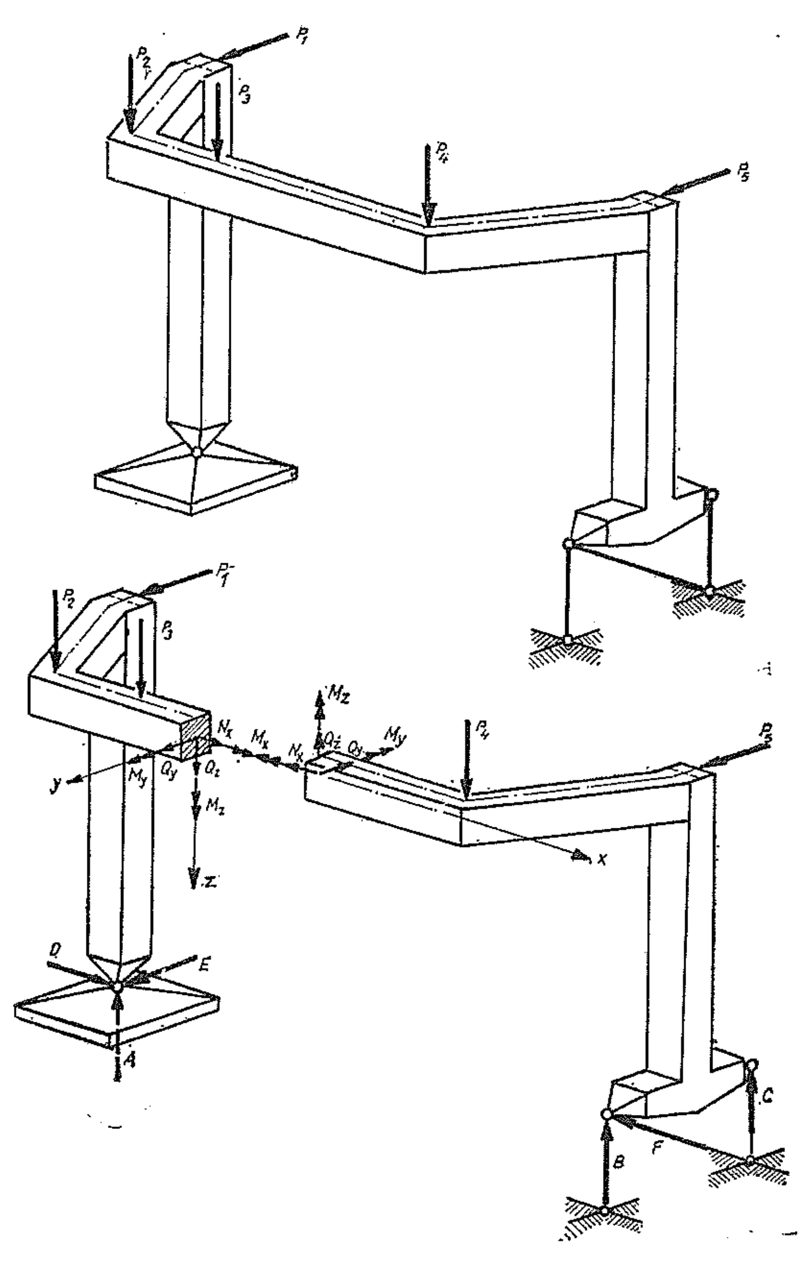
ليرمز لمحور القضيب بالرمز x وليرمز للمحاور المتعامدة عليه بالرموز y , z . بالاستعانة بمجموعة الاحداثيات المذكورة يستطاع بشكل واضح تعيين كافة قيم القطع في اية نقطة من الجائز .

تتألف قيم القطع في الجيزان الفراغية من القوى والعزوم الداخلية التالية :

القوة الناظمية (القوة الطولية)	N_x :	(2-69)
القوى العرضية	$Q_z \ , \ Q_y$:	
عزوم الانعطاف	$M_z \ , \ M_y$:	
وعزم الفتل	M_x :	

يعود السبب في تسمية العزم M_x بعزم الفتل لانه مرتبط بفتل القضيب المرن .

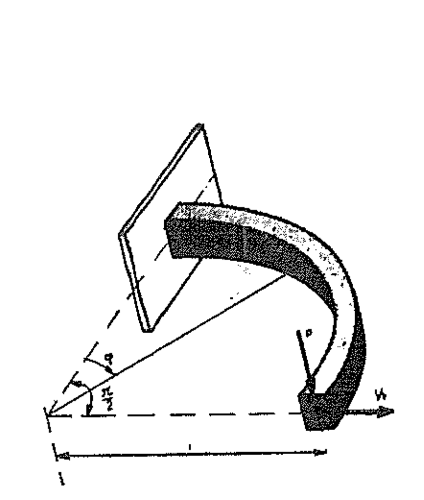
يتم في حالة الجيزان المقررة ستاتيكياً ، تعيين قيم القطع الستة (العلاقة 2.69) بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقتطع من الجائز او بتطبيق شروط التوازن على قطعة صغيرة جداً طولها dx ومقتطعة من الجائز .

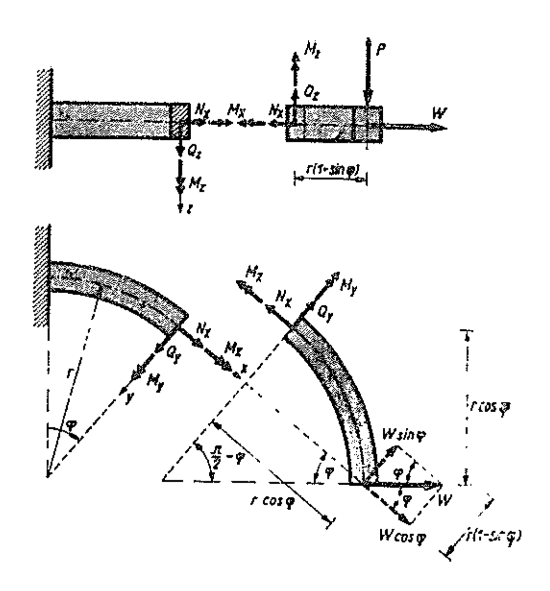


شكل 2-230

مثـال 110 :

المطلوب : إيجاد قيم قطع الجائز الحلقي الدائري الموثوق من طرف والحر من الطرف الآخر والممثل في الشكل (2-232) وذلك نتيجة لتحميله بالقوتين P و W .





شكل 2-232

الحـــل :

بتطبيق شروط توازن القوى (توازن مركبات القوى) على الجزء ذو الطول ($r\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$) المقتطع من الجائز يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\sum_{\nu} P_{x\nu} = 0 : \; -N_x + W\cos\varphi = 0$$

$$\sum_{\nu} P_{y\nu} = 0 : \; -Q_y - W\sin\varphi = 0$$

$$\sum_{\nu} P_{x\nu} = 0 : \; -Q_z + P \qquad = 0$$

وبحلها يتم الحصول على القوة الناظمية والقوتين العرضيتين :

$$N_x = W\cos\varphi \;\; ; \;\; Q_y = -W\sin\varphi \;\; ; \;\; Q_z = P$$

أما تطبيق شروط توازن العزوم فيعطي مجموعة المعادلات التالية :

$$\sum_{\nu} M_{x\nu} = 0 : \; -M_x + P\,r\,(1-\sin\varphi) \qquad = 0$$

$$\sum_{\nu} M_{y\nu} = 0 \; : \; -M_y - P\, r \cos \varphi \qquad = 0$$

$$\sum_{\nu} M_{z\nu} = 0 : -M_z + W \sin \varphi \,.\, r \cos \varphi \cdot W \cos \varphi \,.\, r\,(1-\sin \varphi) = 0$$

وبحلها يتم التوصل لعزم الفتل :

$$M_x = P\, r\,(1-\sin \varphi)$$

وعزمي الانعطاف :

$$M_y = -P\, r \cos \varphi \quad ; \quad M_z = -W\, r \cos \varphi$$

مثـال 111 :

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند وقيم القطع للعنصر الانشائي الممثل في الشكل (2.233) .

الحـل :

بتطبيق شروط التوازن الستة على الجسم ككل ينتج :

$$A \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$D\, b - M - P\, b - 2\, P\, b = 0$$

$$E \frac{\sqrt{2}}{2}\, 3a = 0$$

$$B - E \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$F.\, 3a + E \frac{\sqrt{2}}{2}.\, 3a + P.\, 2a + 2P \frac{3}{2}\, a = 0$$

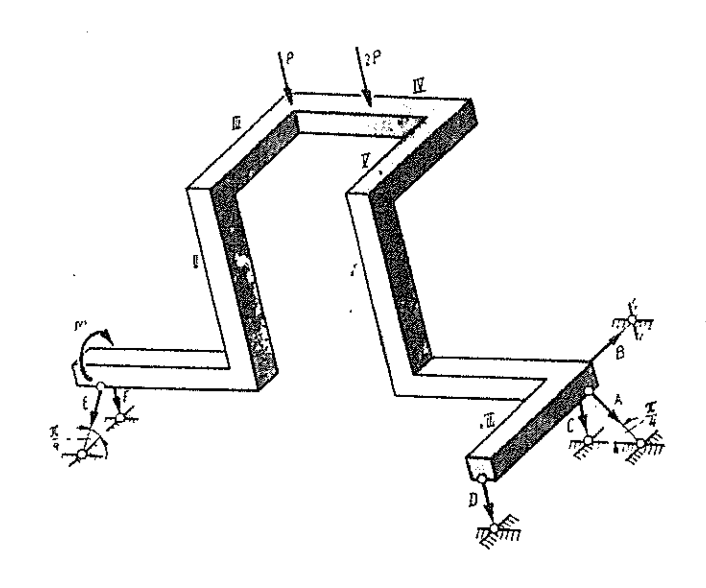
$$F + E \frac{\sqrt{2}}{2} + D + C + A \frac{\sqrt{2}}{2} + 3P = 0$$

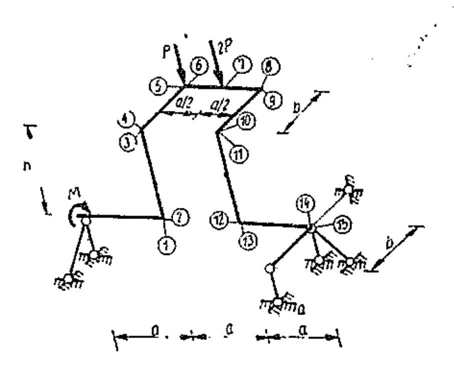
بحلها يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$A=0\,;\,B=0\,;\,C=-\frac{13}{2}P-\frac{M}{b}\;D=3P+\frac{M}{b}\,;\,E=0\,;\,F=-\frac{5}{3}P$$

لتعيين قيم القطع الستة سوف يلجأ لاستخدام مجموعات نسب (مجموعة محاور احداثيـة) حسب الشكل (2-234) . تؤثر القوة الناظمية (القوة الطولية) في المجالات الشاقوليـة فقط ، ففي المجال II تبلغ تلك القوة :

$$N_x = F = -\frac{5}{3}P$$





شكل 2-233

أما فى المجال VI فتبلغ :

$$N_x = C + D = -\frac{4}{3}P$$

لا تتشكل في أجزاء المنشأ قوى عرضية Q_y ، اما القوة العرضية Q_z فتأخذ الشكل التالي :

المجـال I :

$$Q_z = -F = \frac{5}{3} P$$

وفي المجـال III :

$$Q_z = -F = \frac{5}{3} P$$

يحتوي توزيـع القوة العرضية في المجال IV من الجائز على قفزة (انزلاق) . تبلغ قيمة القـوة العرضية بين الحمولات الوحيدة مايلي :

$$Q_z = -F - P = \frac{2}{3} P$$

لكنها تبلغ على يمين الحمولة الوحيدة :

$$Q_z = -F - P - 2P = -\frac{4}{3} P$$

تظهر هذه القيمة ايضاً في المجالات V , VII . واخيراً فانها تبلغ في المجال VIII :

$$Q_z = D = 3P + \frac{M}{b}$$

يأخذ عزم الفتل M_x في المجال I من الجائز قيمة ثابتة وهي :

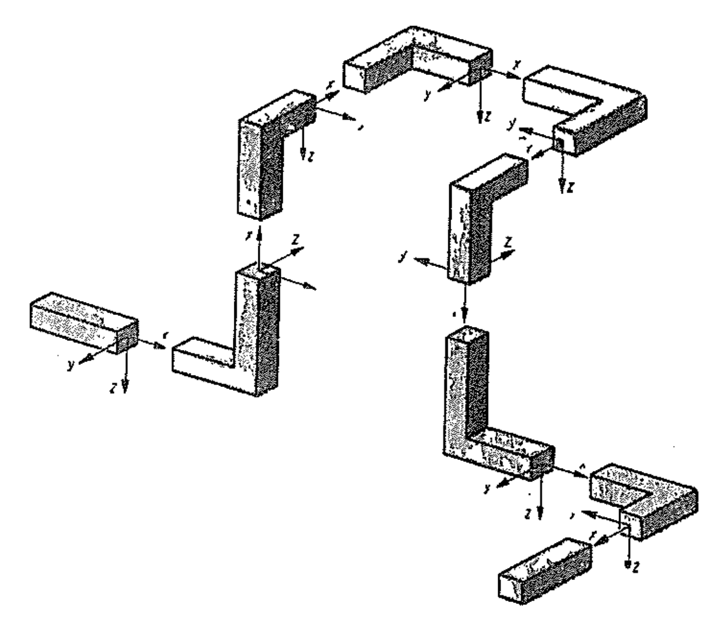
$$M_x = M$$

وينعدم عزم الفتل في المجالات الشاقولية II , IV من الجائز ، لأن كافة القـوى توازي محور القضيب هناك . اما في المجال III فتصلح العلاقة التالية :

$$M_x = Fa = -\frac{5}{3} Pa$$

وفي المجال IV فانه يأخذ الشكل التالي :

$$M_x = M - Fb = M + \frac{5}{3} Pb$$



شكل 2-234

ومن اجل المجال V ينتج :

$$M_x = -F\,2a + Pa - 2P\,\frac{a}{2} = \frac{4}{3}\,Pa$$

واخيراً يتم الحصول من اجل المجال IIV على العلاقة التالية :

$$M_x = Db = 3Pb + M$$

ومن اجل المجال VIII :

$$M_x = 0$$

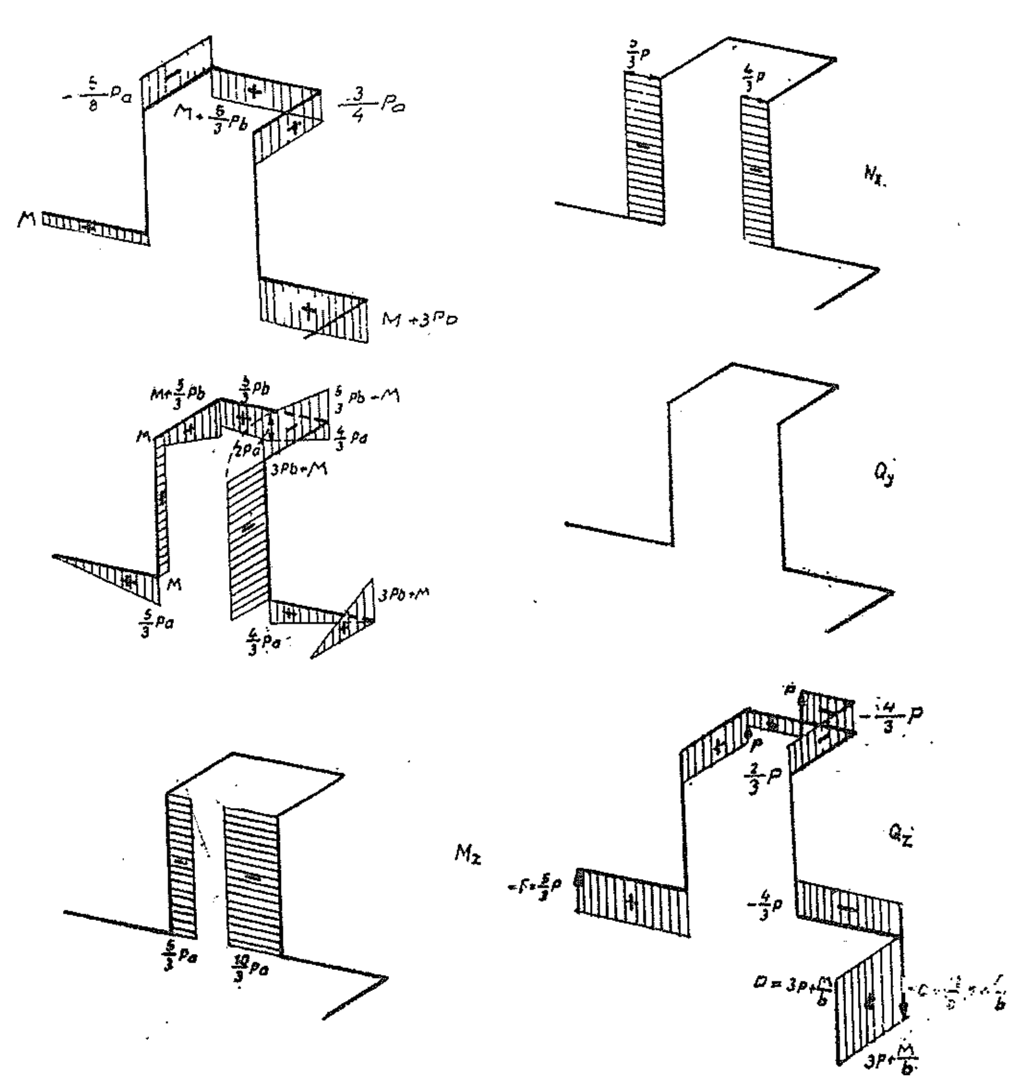
للتمكن من تمثيل عزوم الانعطاف يلجأ لحساب القيم التالية :

$$M_{y1} = -Fa \qquad = \frac{5}{3}\,Pa$$

$$M_{y2} = M_{y3} = M_{y4} \qquad = M$$

$$M_{y5} = M - Fb \qquad = M + \frac{5}{3}\,Pb$$

$M_x = 0$



شكل (2-235)

$$M_{y6} = M_{y1} = \frac{5}{3}\,Pa$$

$$M_{y7} = -F\frac{3}{2}\,a - P\frac{a}{2} = 2\,Pa$$

$$M_{y8} = -F\,2a - Pa - 2\,P\,\frac{a}{2} = \frac{4}{3}\,Pa$$

$$M_{y9} = F\,b - M = -\frac{5}{3}\,Pb - M$$

$$M_{y10} = M_{y11} = M_{y12} \qquad = -3Pb - M$$

$$M_{y13} = M_{y8} \qquad = \frac{4}{3} Pa$$

$$M_{y14} \qquad = 0$$

$$M_{y15} = -Db \qquad = -3Pb - M$$

و :

$$M_{z2} = M_{z3} = Fa \qquad = -\frac{5}{3}$$

$$M_{z11} = M_{z12} = F2a \qquad = -\frac{10}{3} Pa$$

لقد تم في الشكل (2-235) تمثيل مخططات قيم القطع للعنصر الحامل الفراغي.

مثـال 112 :

المطلوب : حساب ورسم قيم القطع للعنصر الانشائي الممثل في الشكل (2-236).

الحـل :

١ ـ ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجسم كـكل يتم التوصل لمجموعة المعادلات التالية :

$$A \frac{\sqrt{2}}{2} - P_1 \qquad = 0$$

$$F \frac{\sqrt{2}}{2} 2b - P_2 b + P_1 a \qquad = 0$$

$$\left(E + F \frac{\sqrt{2}}{2}\right) 2b + p2b.b \qquad = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(C + F) - P_2 \qquad = 0$$

$$\left[B + \frac{\sqrt{2}}{2}(A + C)\right] 2a \qquad = 0$$

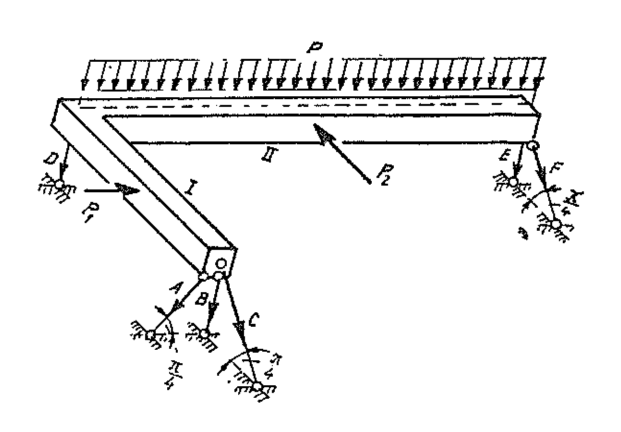
$$D + B + E + \frac{\sqrt{2}}{2}(A + C + F) + p2b = 0$$

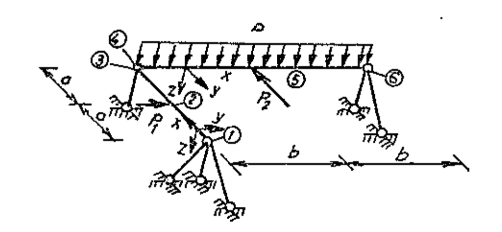
بحلها يتم تعيين ردود افعال المساند :

$$A = \sqrt{2}\ P_1 \qquad , \qquad D = -\,p\,b$$

$$B = -\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{a}{b}\right) P_1 - \frac{1}{2} P_2 \ ; \ E = -\,p\,b - \frac{1}{2}\left(P_2 - \frac{a}{b} P_1\right)$$

$$C = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(P_1 + \frac{a}{b} P_2\right) \qquad ; \ F = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(P_2 - \frac{a}{b} P_1\right)$$





شكل 2-236

٢ - قيم القطع :

تتشكل القوة الناظمية في المجال I فقط وتبلغ قيمتها :

$$N_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ C = \frac{1}{2}\left(P_2 + \frac{a}{b} P_1\right)$$

تبلغ تراتيب القوى العرضية القيم التالية :

$$Q_{y1} = Q_{y2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ A = P_1$$

$$Q_{y4} = Q_{y5l} = -\frac{1}{2}\left(P_2 + \frac{a}{b}P_1\right)$$

$$Q_{y5r} = Q_{y6} = -\frac{\sqrt{2}}{2}C + P_2 = \frac{1}{2}\left(P_2 - \frac{a}{b}P_1\right)$$

و :

$$Q_{z1} = Q_{z2} = Q_{z3} = -\left[B + \frac{\sqrt{2}}{2}(A+C)\right] = 0$$

$$Q_{z4} = -D = pb$$

$$Q_{5} = 0$$

$$Q_{z6} = E + \frac{\sqrt{2}}{2}F = -pb$$

لا تتشكل في الجائز عزوم فتل M_x . للتمكن من اعطاء مخططات عزوم الانعطاف ســوف يلجأ لحساب التراتيب التالية :

$$M_{y1} = M_{y2} = M_{y3} = M_{y4} = 0$$

$$M_{y5} = \frac{p(2b)^2}{8} = \frac{pb^2}{2}$$

$$M_{y6} = 0$$

و :

$$M_{z1} = 0 \;;\; M_{z2} = -aP_1 \;;\; M_{z3} = -P_1a$$

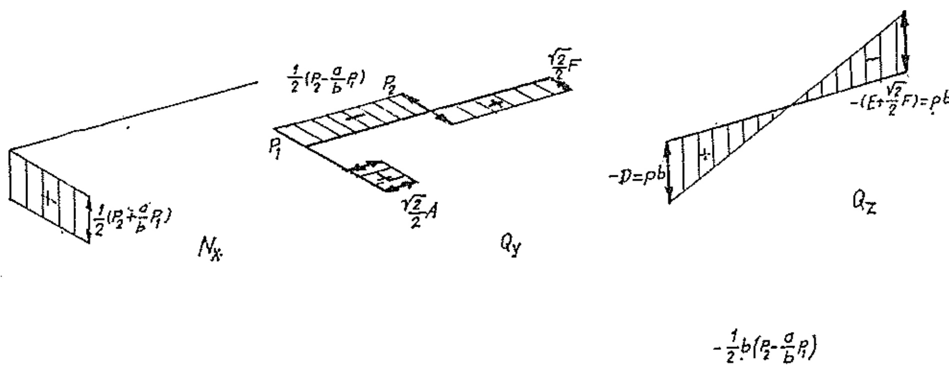
$$M_{z4} = -P_1a \;;\; M_{z5} = \frac{\sqrt{2}}{2}Fa = \frac{1}{2}b(P_2 - \frac{a}{b}P_1) \;;\; M_{z6} = 0$$

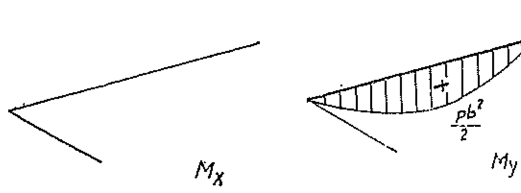
وبذلك يستطاع تمثيل قيم القطع الستة (شكل 2.237) .

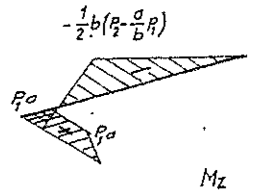
مثـال 113 :

المعطى : P , l (شكل 2.238) .

المطلوب : ايجاد







شكل 2-237

١ ـ ردود افعال المساند .

٢ ـ قيم القطع مع الرسم .

الحل :

١ ـ ردود افعال المساند :

(تشير الاسهم المرسومة على المساند b , c ، في الشكل (2-238 a) ، الى الاتجاهات التي لا يمكن للمسندين حمل قوى باتجاهها) .

يعطي تطبيق شروط التوازن (شكل 2-238 b) مجموعة المعادلات التالية :

$$\sum_{\nu} l_{x\nu} = 0 \;:\; A_x + B_x = 0$$

$$\sum_{\nu} P_{y\nu} = 0 \;:\; A_y = 0$$

$$\sum_{\nu} P_{z\nu} = 0 \;:\; A_z + B_z + C - P = 0$$

$$\sum_{\nu} M_{xb} = 0 \;:\; A_z\, 2b - P\, 2l = 0$$

$$\sum_{\nu} M_{yb} = 0 \;:\; Pl - C\, 2l = 0$$

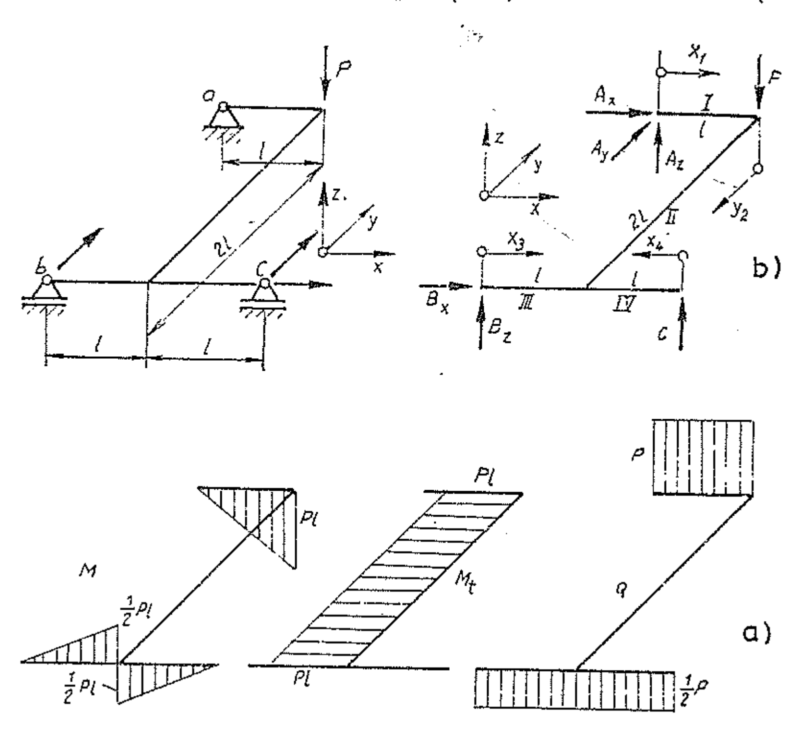
$$\sum_{\nu} M_{zb} = 0 \;:\; A_x\, 2l = 0$$

(حيث ان $\Sigma M_{xb} = 0$ هو شرط توازن العزوم بالنسبة لمحور يوازي المحور x ويمر من b).
النتائج :

$$A_x = A_y = B_x = 0 \quad ; \quad A_z = P \quad ; \quad B_z = -\frac{1}{2} P \quad ; \quad C = \frac{1}{2} P$$

٢ - قيم القطع (ردود افعال القطع) (شكل 2-238 c) :

في المعادلات سوف تعتبر A_x , A_y , B_x وكانها غير موجودة (فلا داعي لكتابتها ما دامت معدومة القيمة) . ان اشارة الخط (–) تعني غير ممكن .



شكل 2-238

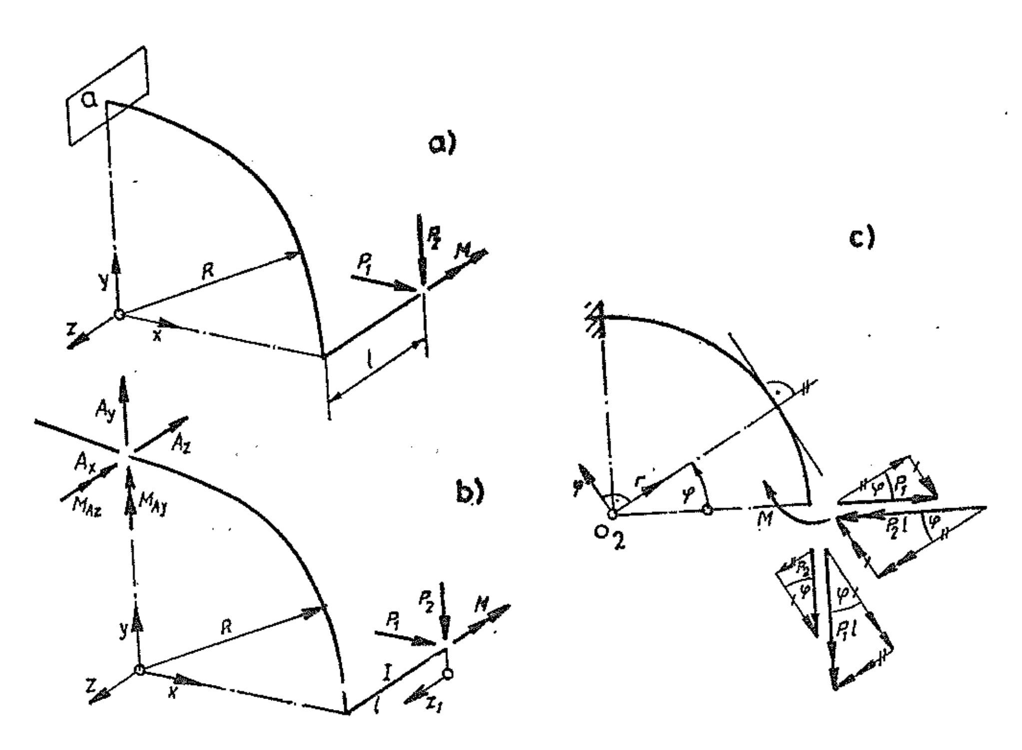
	M_x	M_y	M_z	Q_x	Q_y	Q_z	N_x	N_y	N_z
I	$M_t = 0$	$-A_z x_1$	0	–	0	$-A_z$	0	–	–
II	$(A_z - P) y_2$	$M_t = A_z l$	0	0	–	$A_z - P$	–	0	–
III	$M_t = 0$	$-B_z x_3$	0	·	0	$-B_x$	0	...	–
IV	$M_t = 0$	$-C x_4$	0	–	–	C	0	–	–

مثـال 114 :

المعطى : P_1 , P_2 , M , l , R (شكل 2-239 a) .

المطلوب :

ايجاد قيم القطع (ردود افعال القطع) .



شكل 2-239

الحـــل :

بتطبيق شروط التوازن في الفراغ على الشكل (2-239 b) ينتج :

$$\sum_{\nu} P_{x\nu} = 0 : A_x + P_1 = 0$$

$$\sum_{\nu} P_{y\nu} = 0 : A_y - P_2 = 0$$

$$\sum_{\nu} P_{z\nu} = 0 : -A_z = 0$$

$$\sum_{\nu}^{II} M_{xa} = 0 \; : \; M_{ax} - P_2 l = 0$$

$$\sum_{\nu} M_{ya} = 0 \; : \; M_{ay} - P_1 l = 0$$

$$\sum_{\nu} M_{za} = 0 \; : \; -M_{az} - M - P_2 R + P_1 R = 0$$

النتائج :

ردود افعال المساند :

$$A_x = -P_1 \; ; \; A_y = P_2 \; ; \; A_z = 0$$

$$M_{ax} = -P_1 \, , M_{ay} = P_1 l \; ; \; M_{az} = (P_1 - P_2) R - M$$

ردود افعال القطع (قيم القطع) :

القطع I (شكل 2-239 b) :

$$M_{x1} = P_2 z_1 \; ; \; M_{y1} = P_1 z_1 \; ; \; M_{z1} = M_t = M$$

$$Q_{x1} = -P_1 \; ; \; Q_{y1} = P_2 \; ; \; N_{z1} = 0$$

القطع II (شكل 2-239 c) :

سوف يرسم القطع المذكور في استوي x و y . ينبغي اعتبار ردود افعال القطع عند النقطة $z_1 = l$ من المجال I كقوى وعزوم خارجية تؤثر في النقطة $\varphi=0$ من القطع II :

$$M_{zII} = M - P_1 R \sin\varphi + P_2 R (1 - \cos\varphi)$$

$$M_{rII} = P_1 l \sin\varphi + P_2 l \cos\varphi$$

$$M_{\varphi II} = M_t = P_1 l \cos\varphi - P_2 l \sin\varphi$$

$$Q_{zII} = 0$$

$$Q_{rII} = -P_1 \cos\varphi + P_2 \sin\varphi$$

$$N_{\varphi II} = P_1 \sin\varphi + P_2 \cos\varphi$$

علم مقاومة المواد

مقدمة

ان هدف مقاومة المواد هو اعطاء الاسس اللازمة لتعيين ابعاد العناصر الانشائية الذي يسمى **بتصميم العناصر الانشائية** والذي ينبغي ان يتوفر فيه عاملان هامان هما : **الامان** ضد الانكسار (الانهيار) **والاقتصاد** .

على العموم يتم تصميم العناصر الانشائية بحيث لا تتعدى الاجهادات الداخلية الاعظمية المتشكلة فيها قيمة الاجهاد المسموح المادة (الاجهادالذي يسمح للمادة بتحمله) وكذلك بحيث لا يتعدى تغير الشكل الاعظمي فيها قيمة معينة . بتحقيق هذين الشرطين يضمن عدم انهيار الانشاء كما تبعد تغيرات الشكل الكبيرة غير المسموحة . مما ذكر تتلخص الوظائف الرئيسية لمقاومة المواد بما يلي :

١ ـ حساب الاجهادات الداخلية الاعظمية كتابع للحمولة .

٢ ـ حساب تغيرات الشكل كتابع للحمولة .

اما هذه الوظائف فيتم حلها بواسطة طرق معينة تتبع فيها الخطوات التالية :

١ ـ تعين بواسطة قوانين علم سكون الاجسام الصلبة ، العلاقة بين القوى الخارجية والاجهادات الداخلية .

٢ ـ تعين بواسطة شروط التوافق التي يتم الحصول عليها من الشكل الهندسي للجسم ، العلاقة بين الانتقالات (Verschiebungen) والتشوهات (Verzerrungen) . (تتألف التشوهات من تمددات Dehnungen وانزلاقات Gleitungen) .

٣ ـ يتم الربط بين الاجهادات الداخلية والتشوهات بواسطة قانون المرونة (والذي يعتبر قانون هوك ابسطها) .

غالباً ما يقترن حل مشاكل مقاومة المواد بصعوبات رياضية ، قد تكون في كثير من الحالات غير قابلة للحل المباشر ، لذلك يلجأ لتسهيلها باستخدام بعض الفرضيات ، وبذلك يصبح الحل الذي يتم الحصول عليه حلاً تقريبياً . أما الفرضيات المتبعة فهي :

يتم تطبيق الحمولات (قوى وعزوم) على الجسم المحمل ببطء ، ابتداء من الصفر وبالتدريج الى ان تصل الى القيمة النهائية (**حمولات ستاتيكية**) .

اما مادة الجسم فيفترض فيها ان تكون متجانسة (Homogen) ومتماثلة المناحي (Isotrop) .

التجانس (Homogenität) : يقال عن الجسم أنه متجانساً عندما لا تتغير ثوابت المادة المكونة له بشكل مفاجيء (على شكل قفزة) . فالتجانس هو ان يكون الجسم مكوناً في جميع اجزاءه من نفس المادة وبنفس الشروط او بتعبير آخر ان تكون كافة العناصر الحجمية المتواجدة حول جميع نقاط الجسم مكونة من نفس المادة .

تماثل المناحي (Isotropie) : يقال عن الجسم انه متماثل المناحي عندما تكون ثوابت المادة المكونة له مستقلة عن الاتجاه (غير مرتبطة بالاتجاه) . فالتماثل في المناحي يعني ان الجسم يشير في جميع الاتجاهات لنفس الصفات .

في اغلب حالات تعيين الاجهادات يضطر اللجوء الى اعتبارات التغير (عدا الاجهادات في الجمل المقررة ستاتيكياً) مما يلزم ترك مفهوم الجسم الصلب (المفهوم المثالي للجسم الصلب) . سوف يفترض ان تغيرات الشكل (Deformation) صغيرة بالنسبة لابعاد العنصر الانشائي وبذلك يصبح تطبيق شروط التوازن على الجسم غير المتغير ممكناً (نظرية المرتبة الاولى ، Theorie 1. Ordnung) . على العكس من ذلك ينبغي في مشاكل الاستقرار (stabilitätsprobleme) (التحنيب Knickung والتسنم Beulen) تطبيق شروط التوازن على الجسم المتغير (نظرية المرتبة الثانية Theorie 2. Ordnung) . بواسطة قوانين المادة (Stoffgesetze) (التي تسمى في نظرية المرونة بقوانين المرونة Elastizitätsgesetze) يتم التوصل للعلاقة التي تربط بين الاجهادات والتغيرات الناتجة عن التحميل . أما أبسط هذه القوانين فهو قانون هوك الذي يربط خطياً بين الاجهادات والتغيرات وهو يعتبر حجر الاساس في نظرية المرونة الرياضية وكذلك في مقاومة المواد التقنية (الهندسية) .

يمكن ان تظهر في الجسم المحمل علاوة على التغيرات المرنة (التي تزول كلياً بزوال المؤثر) تغيرات لدنة (لاتزول بزوال المؤثر) تتطلب استخدام قانون آخر للمادة وبذلك يتم التحول من نظرية المرونة الى نظرية اللدونة التي حصلت في الاونة الاخيرة على اهمية كبيرة .

سوف تتم ، في هذا الكتاب ، دراسة مقاومة المواد للأجسام القاسية القابلة للتغير (deformierbare, feste körper) الموجودة تحت تأثير القوى الفاعلة او التغيرات الحرارية ، في حالة سكون .

بسبب توازن القوى المؤثرة على الجسم المدروس فانها تتبع قواعد وقوانين علم السكون (Statik) فأثناء تأسيس مقاومة المواد سوف يتم الاعتماد على كثير من نتائج علم السكون وعلاوة على ذلك

سوف يتم أدخال مفاهيم جديدة تساعد على وصف سلوك الجسم القابل للتغير تحت تأثير القوى المؤثرة التي تطبق عليه ببطىء وبالتدريج . فبشكل خاص سوف يتم ادخال مفهومين هامين هما حالة التشوه (Deformationszustand , Verzerrungszustand) **وحالة الاجهاد** (Spannungszustand) .

يتم تعيين حالة تشوه جسم من خلال التغيرات الطولية (Längenänderungen) التي تعانيها المسافات التي تصل بين نقطتين من الجسم ومن خلال التغيرات الزاوية (Winkeländerungen) التي تعانيها الزاوية المحصورة بين مسافتين متعامدتين من جسم قبل التغير . أما حالة اجهاد جسم فيتم تعينها من خلال القوى السطحية الناظمية (المسماة بالاجهادات الناظمية) والقوى السطحية المماسية (المسماة بالاجهادات المماسية) التي تنتقل من سطح الضفة الواحدة الى سطح الضفة الاخرى من ضفاف القطع .

بواسطة الاجهادات المتشكلة في الجسم نتيجة للتحميل يتم تحديد اجهاد المادة (Beanspruchung des Werkstoffes) وهي المسئولة عن انهيار المادة .

تعتمد مقاومة المواد بشكل اساسي على نتائج التجارب التي يتم الحصول عليها مخبرياً كما وتعتمد على نظرية المرونة الرياضية . فالتجارب هي التي توضح سلوك المواد المختلفة أثناء التحميل وهي التي تعطي حجر الاساس للدراسة النظرية . كما وان التجارب هي التي تحدد صلاحية النتائج التي يتم الحصول عليها من النظريات المختلفة ، وهي التي تمكن من القيام ببعض التسهيلات في الدراسة النظرية التي تساعد على اعطاء الحل المناسب للمشاكل التي تعترض المهندس في حياته العملية .

في كل الاحوال يتم حل مشاكل مقاومة المواد بتعيين حالة الاجهاد وحالة التشوه للعناصر الانشائية المحملة . فحالة التشوه تعطي كل ما يطلب معرفته عن تغير الشكل أما حالة الاجهاد فتعطي كل ما يلزم معرفته عن اجهاد العنصر الانشائي .

بمقارنة حالة الاجهاد التي يتم الحصول عليها حسابياً مع قيم الاجهادات المسموحة التي يتم الحصول عليها تجريبياً يصبح بالامكان تصميم العناصر الانشائية .

الفصل الأول

عزوم الدرجة الثانية للسطوح

١ ـ ١ تعريف عزوم الدرجة الثانية للسطوح

اثناء دراسة نظرية انعطاف الجيزان سوف تظهر تكاملات سيطلق عليها اسم عزوم الدرجة الثانية للسطوح (او ايضاً عزوم عطالة السطوح) . لتسهيل فهم تلك النظرية (نظرية الانعطاف) يفضل مسبقاً دراسة صفات وخصائص تلك التكاملات .

١ ـ ١ ـ ١ عزوم العطالة المحورية

يدعى التكامل :

$$\int_F x^2 \, dF$$

بعزم العطالة المحوري (الخطي) للسطح F (او باختصار عزم عطالة السطح F) بالنسبة للمحور y ويرمز له اما بـ I_{yy} او I_y وهو يحتوي على جداء ناتج عن ضرب مساحة العنصر السطحي dF بمربع بعده (العمودي) عن المحور y (ولظهور البعد العمودي عن y بشكل تربيعي في التكامل يطلق عليه ايضاً اسم عزم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة للمحور y) وبذلك تكتب علاقته هكذا :

$$I_{yy} = \int_F x^2 \, dF \tag{1-1}$$

يشير الحرف F الموجود تحت رمز التكامل الى امتداد التكامل على مساحة المقطع العرضي الكلية. اما العلاقة السابقة فتعني ان كل عنصر سطحي dF من عناصر السطح F سوف يضرب بمربع بعده عن المحور y بعد ذلك تجمع كافة القيم الموجودة في المقطع العرضي F .

بطريقة مشابهة يدعى التكامل :

$$\int_F y^2 \, dF$$

بعزم عطالة السطح F بالنسبة للمحور x (اوعزم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة للمحور x) اما علاقته فتكتب بالشكل التالي :

$$I_{xx} = \int_F y^2 dF \qquad (1\text{-}2)$$

يشير الحرف I الى عزم عطالة السطح F . اما الدليل (فيمكن ان يتألف من حرف واحد ، على سبيل المثال I_x او من حرف متكرر على سبيل المثال I_{xx} ، كلاهما يرمز لعزم العطالة بالنسبة للمحور x) فيشير الى المحور الذي تنسب العزوم له (هنا المحور x) .

ان اختيار تسمية هذه التكاملات بعزوم العطالة هو اختيار ليس في محله . وذلك لان عزوم الدرجة الثانية لا علاقة لها مطلقاً بالعطالة وقد اخذت التسمية من علم الديناميك وذلك لان عزوم عطالة الكتل:

$$\int_V r^2\, dm \qquad , \qquad \int_V x\, y\, dm$$

التي تظهر هناك تتطابق مع عزوم الدرجة الثانية للسطح بالشكل الرياضي .

١ ـ ١ ـ ٢ جداء العطالة (عزم العطالة النابذ ، عزم العطالة الطارد المركزي) .

يدعى التكامل :

$$\int_F xy\, dF$$

بجداء عطالة السطح F (او عزم العطالة النابذ او عزم العطالة المختلط) بالنسبة لنقطة تقاطع المحورين x , y (او بالنسبة للمحورين x , y) . يحتوي هذا التكامل على جداء ناتج عن ضرب مساحة العنصر السطحي ببعديه (العمودين) عن المحورين x , y (تقع المحاور x , y في مستوي السطح F) مما يعطه ايضاً اسم عزم الدرجة الثانية المختلط للسطح F بالنسبة لنقطة تقاطع المحورين x ، y ويرمز له كالتالي :

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_F x\, y\, dF = -\, I^*_{xy} \qquad (1\text{-}3)$$

يشير الحرف I لجداء العطالة أيضاً ولكنه يذيل بحرفين (بدليلين) مختلفين للدلالة الى محوري نسب العزم .

أثناء استخدام الكتابة التنسورية للعلاقات سوف يستخدم الرمز I^*_{xy} بدلاً عن I_{xy} لأنه يؤدي الى بناء متناظر للعلاقات النهائية .

لاختزال علاقات عزوم الدرجة الثانيـة للسطوح I_{xx} , I_{yy} , I^*_{xy} يفضل استـخدام الكتـابة التنسورية ، يسمى الشـكل التنسوري لتـلك العلاقات بتنسور العطالة وهـو يكتب كالتـالي :

$$I_{kl} = -\int_F (k\,l - \delta_{kl} \cdot r^2)\, dF \qquad (1\text{-}4)$$

حيث ان δ_{kl} هي دلتا كرونكر (او رمز كرونكر) وهي تساوي :

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 \text{ عندما } k \neq l \\ 1 \text{ عندما } k = l \end{cases}$$

كما ان :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

(لقد نتجت الاشارة السالبة في تعريف I^*_{xy} من الكتابة التنسورية للعلاقات) .

١ ـ ١ ـ ٣ عزم العطالة القطبي

يسمى التكامل :

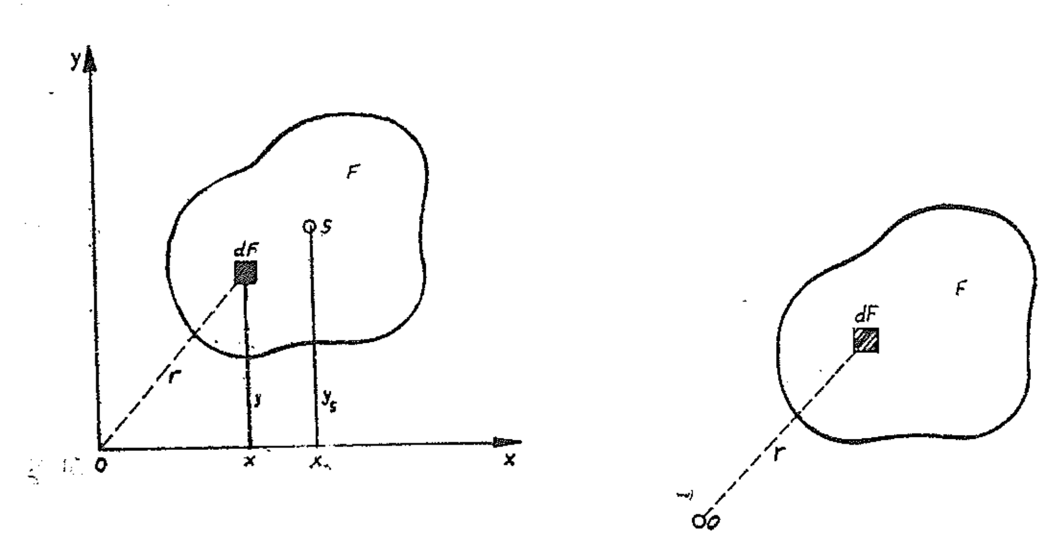
$$\int_F r^2\, dF$$

بعزم العطالة القطبي وهو ينسب الى خط ما عمودي على مستوي السطح F ويعبر عنه بالعلاقة التـالية :

$$I_p = \int_F r^2\, dF \qquad (1\text{-}5)$$

يشير الدليل p الى انه عزم عطالة قطبي وقد يستبدل الحرف p بحرف آخـر يدل على المحور

الذي ينسب العزم اليه وهو يعبر عن نقطة تقاطع هذا المحور مع مستوي السطح F كأن يكتب I_0 وذلك باعتبار النقطة 0 هي نقطع تقاطع هذا المحور مع مستوى السطح او I_n اذا سميت هذه النقطة n . أما الحرف r في العلاقة فيشير الى بعد العنصر السطحي عن مبدأ الاحداثيات الواقع في مستوى السطح F (مبدأ الاحداثيات يمثل نقطة تقاطع محور النسب مـــع مستوي السطح F) .



شكل 1-1

باستخدام علاقة فيثاغورث وبالنظر الى الشكل (1-1) يمكن كتابة العلاقة التالية :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

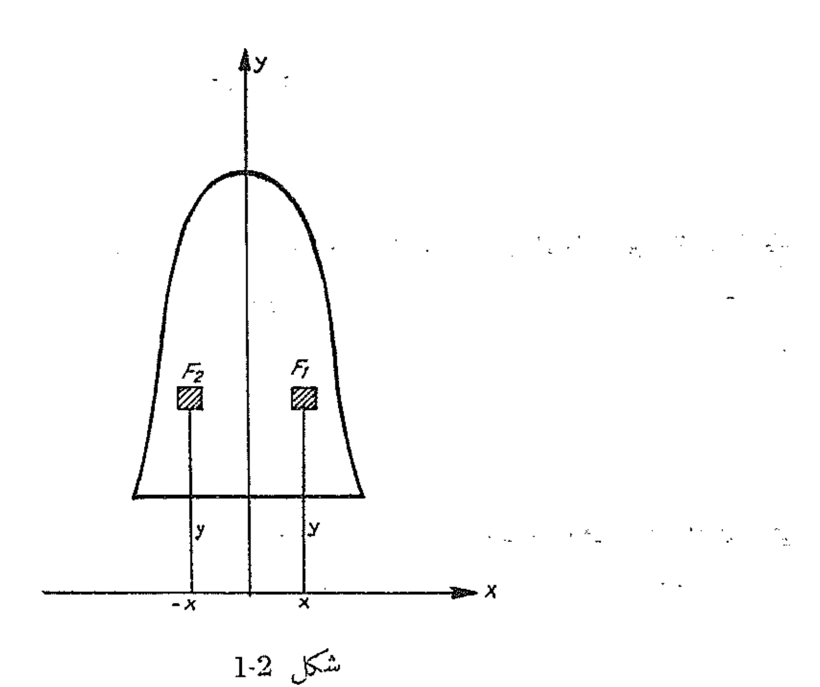
بالتعويض في العلاقة (1-5) يتم الحصول على العلاقة ، التي تربط بين عزوم المطالة I_{xx} و I_{yy} وعزم المطالة القطبي I_p ، التالية :

$$I_p = \int_F r^2\, dF = \int_F (y^2 + x^2)\, dF = \int_F y^2\, dF + \int_F x^2 dF = I_{xx} + I_{yy} \quad (1\text{-}6)$$

١ - ١ - ٤ ملاحظات

ان واحدة عزوم الدرجة الثانية للسطوح هي واحدة الطول من الدرجة الرابعة فباستعمال الـ cm واحدة للطول مثلا تكون cm^4 هي واحدة عزوم الدرجة الثانية للسطوح .

ان عزوم العطالة I_{xx} , I_{yy} , I_p هي دائماً موجبة وذلك لان بعد العنصر عن محور النسب يظهر في العلاقة بشكل تربيعي كما انها لا يمكن ان تأخذ قيمة الصفر ابداً ، اما جداء العطالة فحسبما يكون مكان مجموعة المحاور الاحداثية يكون موجباً او سالباً وقد يأخذ قيمة الصفر ايضاً وذلك لتبديل الاحداثيات y,x الموجودة في التكامل باشاراتها . ينعدم جداء عطالة سطح بالنسبة لمحاور التناظر (احد المحاور او كلاهما محور تناظر للسطح) وذلك لان كل حد موجب xydF يقابله حد سالب مساو له xydF - (خواص التناظر) (شكل 2-1) (ينعدم جداء عطالة سطح عندما يكون احد محاور النسب او كلاهما محاور تناظر للسطح) .



شكل 2-1

الخلاصة : مما ذكر يستخلص ما يلي :

إن عزوم الدرجة الثانية للسطوح هي مقادير هندسية تتعلق من شكل وكبر سطح المقطع العرضي وكذلك من مكان مجموعة المحاور الاحداثية فقط ، وهي مقادير حسابية تظهر اثناء استخراج معادلات الانعطاف .

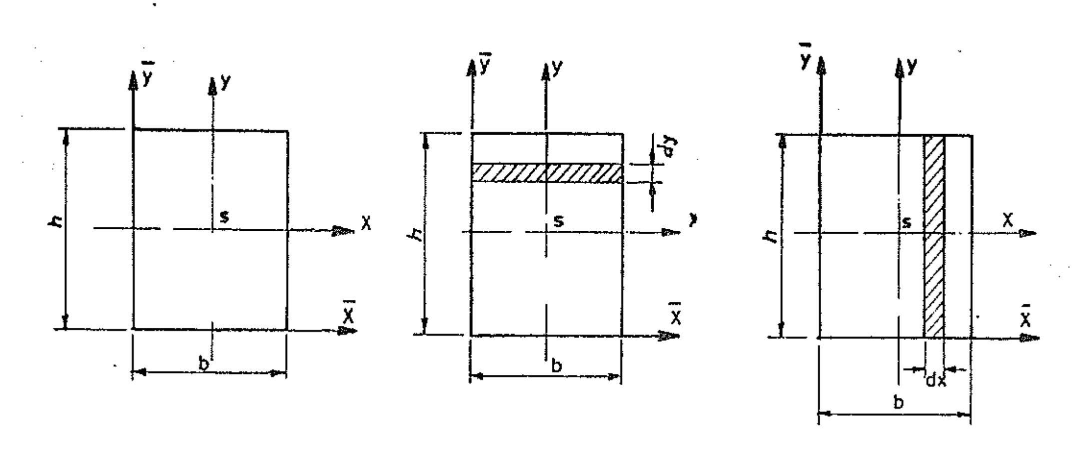
١ ـ ١ ـ ٥ امثلة تطبيقية

مثال 1 :

المعطى : ابعاد المستطيل b , h الممثل في الشكل (3-1) .

المطلوب : ايجاد عزوم العطالة التالية :

I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} , $I_{\bar{y}\bar{y}}$, $I_{\bar{x}}I_{\bar{x}}$



شكل 1-3

الحل:

لحساب عزوم الدرجة الثانية لسطح بالنسبة لمحور ما هناك امكانيتان ، الاولى وهي تقسيم السطح بموازاة ذلك المحور الى شرائح رقيقة والثانية وهي ان يقتطع من السطح عنصر تفاضلي صغير .

آ ـ الامكانية الاولى : تقسيم السطح بموازاة ذلك المحور الى شرائح رقيقة . وتفضل عندما تكون علاقة ايجاد مساحة الشرائح معلومة .

حساب I_{xx} :

كعنصر سطحي dF يفضل اختيار السطح المهشر (الشريحة السطحية المهشرة) الممثل في الشكل (1-3 b) . أي لحساب I_{xx} يقسم المستطيل بموازاة المحور x الى شرائح رقيقة سماكتها dy وطولها $b=const$ (شكل 1-3 b) .

مساحة الشريحة السطحية :

$$dF = b\,dy$$

حدود التكامل : من $y = +b/2$ حتى $y = -h/2$.

$$I_{xx} = \int_F y^2\,dF = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2\,b\,dy = \frac{b\,h^3}{12}$$

حساب I_{yy} :

لحساب I_{yy} يقسم المستطيل بموازاة المحور y الى شرائح رقيقة سماكتها dx وطولها $h=const$ (شكل 1-3 c) .

مساحة الشريحة السطحية :

$$dF = h\,dx$$

حدود التكامل : من $x=-b/2$ حتى $x=+b/2$.

$$I_{yy} = \int_F x^2\,dF = \int_{-b/2}^{+b/2} x^2\,h\,dx = \frac{hb^3}{12}$$

حساب I_{xy} :

(x , y محاور تناظر) $I_{xy} = 0$

تمثل هذه النتائج عزوم الدرجة الثانية المستطيل بالنسبة لمحاوره المركزية x , y التي توازي اضلاعه وتكتب مجتمعة كما يلي :

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad I_{yy} = \frac{hb^3}{12} \quad ; \quad I_{xy} = 0 \qquad (1\text{-}7)$$

من هذه النتائج يتم الحصول على عزوم الدرجة الثانية لمربع طول ضلعه a بالنسبة لمحاوره المركزية التي توازي اضلاعه وذلك باعتباره كحالة خاصة للمستطيل . فبتبديل $b=h=a$ فان العلاقات السابقة تعطي النتائج التالية :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{a^4}{12} \qquad (1\text{-}8)$$

فيما بعد سوف يبرهن ان هذه العلاقة تصلح لأي محور مركزي من محاور المربع . والان سوف يتم ايجاد عزوم عطالة المستطيل الممثل في الشكل (1-3) بالنسبة للمحاور $\bar{x}$ و $\bar{y}$. ان تقسيم المستطيل الى شـــرائح هو نفسه الذي تم اثناء الحصول على عزوم الدرجة الثانيـة I_{xx} و I_{yy} .

حساب $I_{\bar{x}\bar{x}}$:

مساحة الشريحة السطحية :

$$dF = b\,d\bar{y}$$

حدود التكامل : من $\bar{y} = 0$ حتى $\bar{y}=+h$.

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 \, dF = \int_0^{+h} \bar{y}^2 \, b \, d\bar{y} = \frac{bh^3}{8}$$

حساب $I_{\bar{y}\bar{y}}$:

مساحة الشريحة السطحية :

$$dF = b \, d\bar{x}$$

حدود التـكامل : $\bar{x} = 0$ حتى $\bar{x} = +b$.

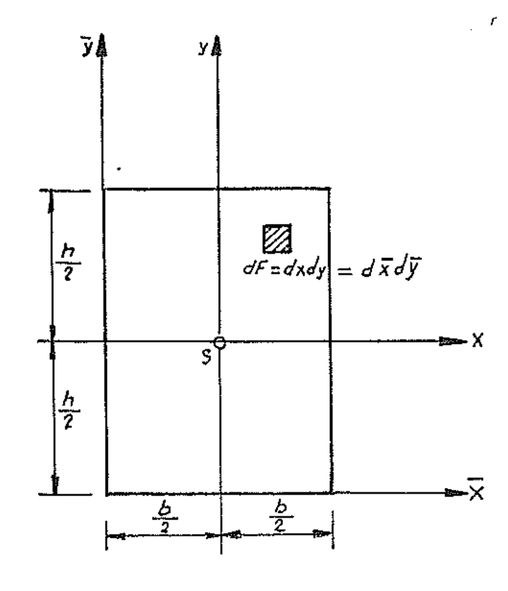
$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_F \bar{x}^2 \, dF = \int_0^{+b} \bar{x}^2 \, h \, d\bar{x} = \frac{hb^3}{3}$$

فيما بعد سوف يتم ايضاً حساب $I_{\bar{x}\bar{x}}$ و $I_{\bar{y}\bar{y}}$ باستخدام قواعد اخرى كما هو الحال في الحياة العملية وذلك بالاستفادة من القيم I_{xx} و I_{yy} المعلومة .

ب ـ الامكانية الثانية : باقتطاع عنصر تفاضلي من السطح (شكل 4-1) .

مساحة العنصر السطحي :

$$dF = dx \, dy = d\bar{x} \, d\bar{x}$$



شكل 4-1

عزوم الدرجة الثانية :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2\, dF = \int_0^b d\bar{x} \int_0^h \bar{y}^2\, d\bar{y} = \bar{x}\Big|_o^b \cdot \frac{\bar{y}^3}{3}\Big|_o^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_F \bar{x}^2\, dF = \int_0^b \bar{x}^2\, d\bar{x} \int_0^h d\bar{y} = \frac{\bar{x}^3}{3}\Big|_o^b \cdot \bar{y}\Big|_o^h = \frac{b^3 h}{3}$$

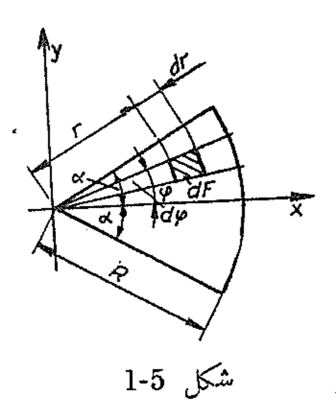
$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x}\,\bar{y}\, dF = \int_0^b \bar{x}\, d\bar{x} \int_0^h \bar{y}\, d\bar{y} = \frac{\bar{x}^2}{2}\Big|_o^b \cdot \frac{\bar{y}^2}{2}\Big|_o^h = \frac{b^2 h^2}{4}$$

مثـال 2 :

مقطع عرضي بشكل قطاع دائري (Kreissektor) (شكل 5-1) .

المعطى : نصف قطر دائرة القطاع R وزاوية فتحة القطاع 2α ، مع العلم بأن القطاع متناظر بالنسبة للمحور x .

المطلوب : ايجاد عزوم الدرجة الثانية (I_{xx} , I_{yy} , I_{xy}) للسطح F .



شكل 5-1

الحـــل :

يفضل في هذه الحالة الانطلاق من المحاور القطبية .

العلاقات الهندسية التي تربط بين المحاور x , y والمحاور القطبية r , φ هي :

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$dF = r\,dr\,d\varphi$$

بواسطة هذه العلاقات يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$I_{xx} = \int_F y^2\,dF = \int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=-\alpha}^{+\alpha} r^3\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{R^4}{4}\,\frac{1}{2}\int_{\varphi=-\alpha}^{+\alpha}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{R^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha)$$

(1-8)

$$I_{yy} = \int_F x^2\,dF = \int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=-\alpha}^{+\alpha} r^3\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{R^4}{4}\,\frac{1}{2}\int_{\varphi=-\alpha}^{+\alpha}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{R^4}{8}(2\alpha + \sin 2\alpha)$$

$I_{xy} = 0$ (المحور x محور تناظر)

حالة خاصة $(\alpha = \pi)$:

مقطع عرضي دائري الشكل $(\alpha = \pi)$.

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{R^4\pi}{4} \qquad (1\text{-}9)$$

مثـال 3 :

مقطع عرضي دائري الشكل (شكل 1-6) .

المعطى : نصف قطر الدائرة R (قطرها D) .

المطلوب : ايجاد عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_p للسطح F .

الحل :

لايجاد القيم المطلوبة يتبين انه من الافضل الابتداء بحساب عزم المطالة القطبي I_p ، وللقيام بذلك تستخدم العلاقة (1-5) حيث ان :

$$I_p = \int_F r^2 \, dF$$

كعنصر سطحي dF تختار حلقة دائرية رقيقة سماكتها dr ونصف قطرها r .

بما ان الحلقة رقيقة قدر الامكان (لا نهائية) فان سطحها يمكن ان يمثل بمحيط الحلقة مضروباً بسماكتها ، اي ان :

$$dF = 2 \pi r . dr$$

حيث ان $2\pi r$ هو محيط الحلقة الدائرية (محيط الخط الاوسط) . بتعويض مساحة الشريحة في علاقة عزم المطالة القطبي (العلاقة 1-5) ، وبمراعاة حدود التكامل التي تبدأ من r=0 وتنتهي عند r=R ، ينتج :

$$I_p = 2 \pi \int_0^R r^3 \, dr = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \qquad (1\text{-}10)$$

حسب العلاقة (1-6) يمكن الكتابة :

$$I_p = I_{xx} + I_{yy}$$

وبسبب التناظر يرى ان :

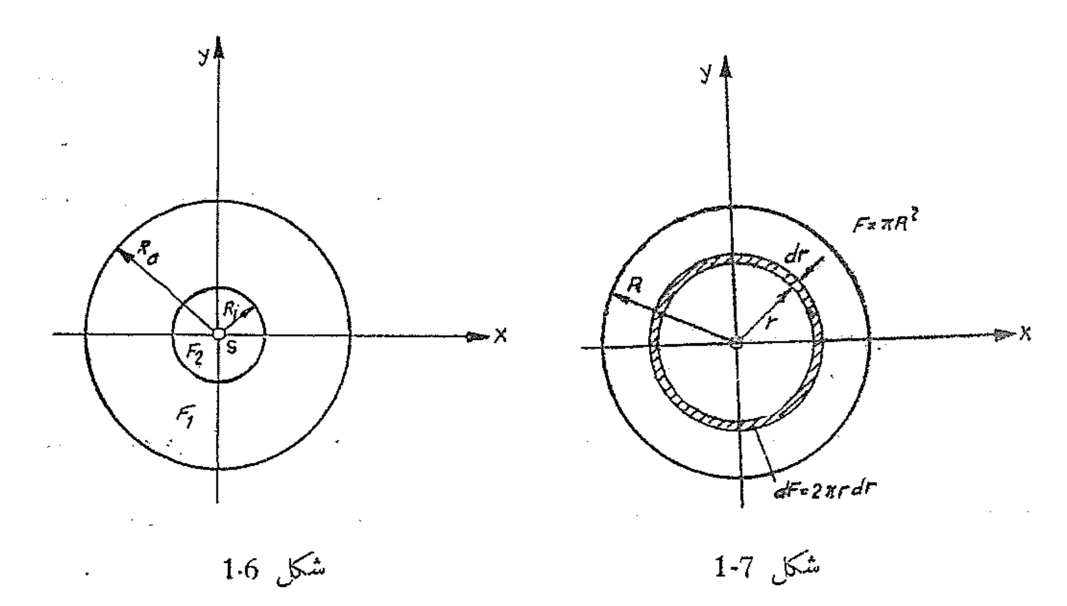
$$I_{xx} = I_{yy}$$

من العلاقتين الاخيرتين ينتج ما يلي :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} Ip$$

بتبديل قيمة عزم المطالة القطبي في العلاقة الاخيرة يتم الحصول على عزوم المطالة المحورية :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$



شكل 1-6   شكل 1-7

مثـال 4 :

مقطع عرضي على شكل حلقة دائرية (شكل 1-7) .

المعطى : نصف قطر الحلقة الخارجي R_a ونصف قطر الحلقة الداخلي R_i .

المطلوب : ايجاد عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_p للسطح F .

الحـل :

بالاستفادة من التناظر وادخاله في العلاقة (1-6) بعين الاعتبار ينتج :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} I_p$$

اما عزم المطالة القطبي I_p فيحسب كما في الدائرة باختلاف واحد هو ان حدود التكامل تبدأ هنا من R_i حتى R_a .

$$I_p = 2\pi \int_{R_i}^{R_a} r^3 \, dr = \frac{\pi}{2}(R_a{}^4 - R_i{}^4) = \frac{\pi}{32}(D_a{}^4 - D_i{}^4)$$

حيث ان $D_a = 2R_a$ وهو القطر الخارجي للحلقة كما ان $D_i = 2R_i$ هو القطر الداخلي للحلقة . بعد الحصول على I_p يمكن الكتابة :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{4}(R_a{}^4 - R_i{}^4) = \frac{\pi}{64}(D_a{}^4 - D_i{}^4) \qquad (1\text{-}11)$$

فيما بعد سوف يتم الحصول على نفس النتيجة بطريقة اسهل وبالاستفادة من عزم عطالة الدائرة .

١ ـ ٢ تحويل عزوم الدرجة الثانية للسطوح

لقد تم في الفقرة السابقة ايجاد عزوم الدرجة الثانية لبعض السطوح بالنسبة لمحاور تنطبق على القاعدة وبالنسبة لمحاور مركزية توازيها باستخدام علاقات التكامل . ان معظم الحالات العملية تتطلب ايجاد عزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة لمحاور مركزية ، لكن ايجادها في كثير من الاحيان بالنسبة لمحاور لا مركزية أسهل ، لذلك سيفتش عن طريقة تساعد على تحويل العزوم المنسوبة الى محاور لا مركزية الى عزوم منسوبة الى محاور مركزية . بشكل عام يصبح نص السؤال الذي سيتم الاجابة عليه ، كالتالي :

كيف يمكن تحويل عزوم الدرجة الثانية للسطوح المنسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية x , y الى عزوم منسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية $\bar{x}$ ، $\bar{y}$.

ستتم الاجابة على هذا السؤال على مرحلتين :

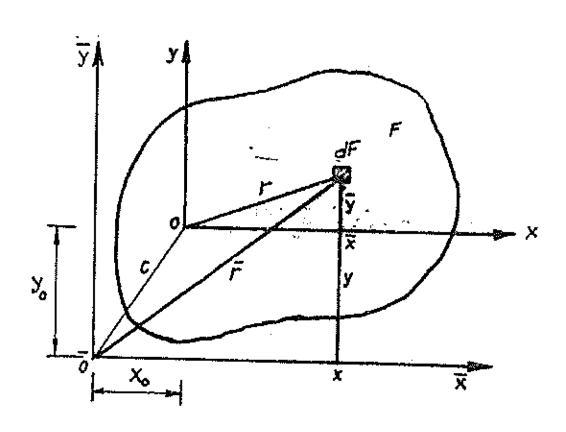
أ ـ **المرحلة الاولى** : اعطاء مجموعة المحاور x , y حركة انسحابية (مرة تنقل المحاور بشكل موازي للمحور $\bar{x}$ ومرة اخرى تنقل بشكل موازي للمحور $\bar{y}$) الى ان ينطبق مركزا مجموعتي المحاور الاحداثية 0 ، $\bar{0}$ فوق بعضها ، بعد ذلك تحول عزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة لها .

ب ـ **المرحلة الثانية** : تدوير مجموعة المحاور x , y (حركة دورانية) الى ان تنطبق على مجموعة المحاور $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ ، بعد ذلك تحول عزوم الدرجة الثانية للسطوح التي تم الحصول عليها في المرحلة الاولى بالنسبة لها .

١ ـ ٢ ـ ١ عزوم الدرجة الثانية للسطوح في حالة انسحاب مجموعة الاحداثيات

سيتم في هذه الفقرة ايجاد علاقات تربط بين عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية x , y وبينها (وبين عزوم الدرجةالثانية لنفس السطح F) بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ التي توازي مجموعة المحاور الاحداثية x , y او بتعبير آخر ستتم دراسة التغير الذي يطرأ على عزوم الدرجة الثانية للسطح F عندما تنسحب محاور النسب (تنقل بشكل موازي) .

أ ـ **مجموعتي المحاور الاحداثية x , y وكذلك $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ ليست محاور مركزية** (شكل 1-8) .



شكل 1-8

عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية x , y :

$$I_{xx} = \int_F y^2 \, dF \quad , \quad I_{yy} = \int_F x^2 \, dF \quad , \quad I_{xy} = \int_F xy \, dF$$

(1-12)

$$I_p = \int_F r^2 \, dF$$

عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية $\bar{x}$, $\bar{y}$:

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 \, dF \quad , \quad I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_F \bar{x}^2 \, dF \quad , \quad I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x}\,\bar{y} \, dF$$

(1-13)

$$I_{\bar{p}} = \int_F \bar{r}^2 \, dF$$

من الشكل (1-8) يمكن الحصول على العلاقة التي تربط بين مجموعة الاحداثيات الاولى x , y وبين مجموعة الاحداثيات الثانية $\bar{x}$, $\bar{y}$ والتي تكتب بالشكل التالى :

$$\bar{x} = x + \bar{x}_0 \quad ; \quad \bar{y} = y + \bar{y}_0$$

$$\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad c^2 = \bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2 \qquad (1\text{-}14)$$

حيث أن $\overline{x}_0$ و $\overline{y}_0$ هي احداثيات المركز 0 في مجموعة الاحداثيات $\overline{x}$, $\overline{y}$. بتبديل هذه العلاقات في العلاقة (13-1) يتم الحصول على النتائج التالية :

$$I_{\overline{x}\,\overline{x}} = \int_F \overline{y}^2\, dF = \int_F (y + \overline{y}_0)^2\, dF = \int_F y^2 dF + \overline{y}_0^2 \int_F dF + 2\overline{y}_0 \int_F y\, dF$$

$$I_{\overline{y}\,\overline{y}} = \int_F \overline{x}^2\, dF = \int_F (x + \overline{x}_0)^2 dF = \int_F x^2 dF + \overline{x}_0^2 \int_F dF + 2\overline{x}_0 \int_F x\, dF$$

$$I_{\overline{x}\,\overline{y}} = \int_F \overline{x}\,\overline{y}\, dF = \int_F (x + \overline{x}_0)\,(y + y_0)\, dF = \int_F x\, y\, dF + \overline{x}_0\, \overline{y}_0 \int_F dF$$

$$+ \; \overline{x}_0 \int_F y dF + \overline{y}_0 \int_F + dF$$

$$I_p = \int_F \overline{r}^2 dF = \int_F [(x + \overline{x}_0)^2 + (y + \overline{y}_0)^2]\, dF = \int_F r^2\, dF + c^2 \int_F dF$$

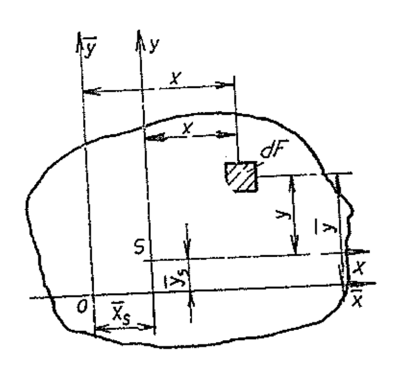
$$+ \; 2\,\overline{x}_0 \int_F x\, dF + 2\,\overline{y}_0 \int_F y\, dF$$

بتبديل العلاقات (I 13-2) , (I 19-2) , (12-1)في المعادلات الاخيرة يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned}
I_{\overline{x}\,\overline{x}} &= I_{xx} + \overline{y}_0^2\, F + 2\, \overline{y}_0\, S_x \\
I_{\overline{y}\,\overline{y}} &= I_{yy} + \overline{x}_0^2\, F + 2\, \overline{x}_0\, S_y \\
I_{\overline{x}\,\overline{y}} &= I_{xy} + \overline{x}_0 \overline{y}_0 F + \overline{x}_0\, S_x + \overline{y}_0\, S_y \\
I_{\overline{p}} &= I_p + c^2\, F + 2\,\overline{x}_0\, S_y + 2\,\overline{y}_0\, S_x
\end{aligned} \qquad (1\text{-}15)$$

هذه العلاقات تربط بين عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لاية مجموعتين من المحاور الاحداثية المتوازية .

ب ـ مجموعة المحاور الاحداثية x , y هي مجموعة مركزية (شكل 1-9)



شكل 1-9

اذا كانت احدى مجموعتي المحاور الاحداثية مركزية ولتكن هنا مجموعة المحاور x , y عندئذ تنعدم العزوم الستاتيكية للسطح F بالنسبة لها ، أي ان $S_x=0$, $S_y=0$.

وبالاستعاضة في هذه الحالة الخاصة عن $\overline{x}_s = \overline{x}_0$ و $\overline{y}_s = \overline{y}_0$ فان العلاقات (1-15) تصبح بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} I_{\overline{x}\,\overline{x}} &= I_{xx} + \overline{y}_s^2\ F \\ I_{\overline{y}\,\overline{y}} &= I_{yy} + \overline{x}_s^2\ F \\ I_{\overline{x}\,\overline{y}} &= I_{xy} + \overline{x}_s\,\overline{y}_s\ F \\ I_{\overline{p}} &= I_p + c^2\ F \end{aligned} \qquad (1\text{-}16)$$

وبهذا يكون قد تم الحصول على العلاقات التي تربط بين عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمحاور مركزية وبينها بالنسبة لمحاور لامركزية توازيها وتسمى هذه العلاقات بعلاقة شتاينر (STEINER) وهناك بعض المراجع تسميها بعلاقات هيوجنز (HUYGENS) . يعبر بالكلام عن علاقة شتاينر من أجل عزوم العطالة (العلاقة 1 - 16 a,b) بالشكل التالي :
عزم عطالة السطح F بالنسبة لمحور ما يساوي الى عزم عطالة ذلك السطح بالنسبة

لمحور مركزي يوازي محور النسب مضافاً اليه الجداء الناتج عن ضرب مساحة السطح بمربع البعد (العمودي) بين المحورين .

ويعبر بالكلام عن علاقة شتاينر من اجل جداء العطالة (العلاقة 1-16 c) بالشكل التالي :

جداء عطالة السطح F بالنسبة لمجموعة محاور ما يساوي إلى جداء عطالة ذلك السطح بالنسبة لمجموعة محاور مركزية توازي مجموعة محاور النسب مضافاً إليه الجداء الناتج عن ضرب مساحة السطح بالبعدين (العموديين) بين المحاور الاحداثية .

تستخدم علاقة شتاينر لحساب عزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة لمحاور لا مركزية بالاستعانة بعزوم السطوح بالنسبه لمحاور مركزية توازيها أو بالعكس .

هناك جداول عديدة تحتوي على عزوم الدرجة الثانية لكثير من المقاطع العرضية الهامة هندسياً (أمثال : المستطيل ، الدائرة ، المثلث ، البروفيلات والخ) بالنسبة لمحاور مركزية ، لذلك يفضل في حالة الاحتياج لعزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة لمحار ما ؛ الاستفادة منها بتطبيق علاقة شتاينر والاستغناء عن استخدام العلاقات التكاملية إلا عند الحالة الملحة .

١ ـ ٢ ـ ٢ عزوم الدرجة الثانية للسطوح المركبة

يتم حساب عزوم الدرجة الثانية للسطوح المركبة على العموم ،بتقسيم السطح الكلي F إلى مجموعة سطوح جزئية بسيطة هندسياً F_ν وذلك بحيث يمكن كتابة العلاقة التالية (شكل 10-1) :

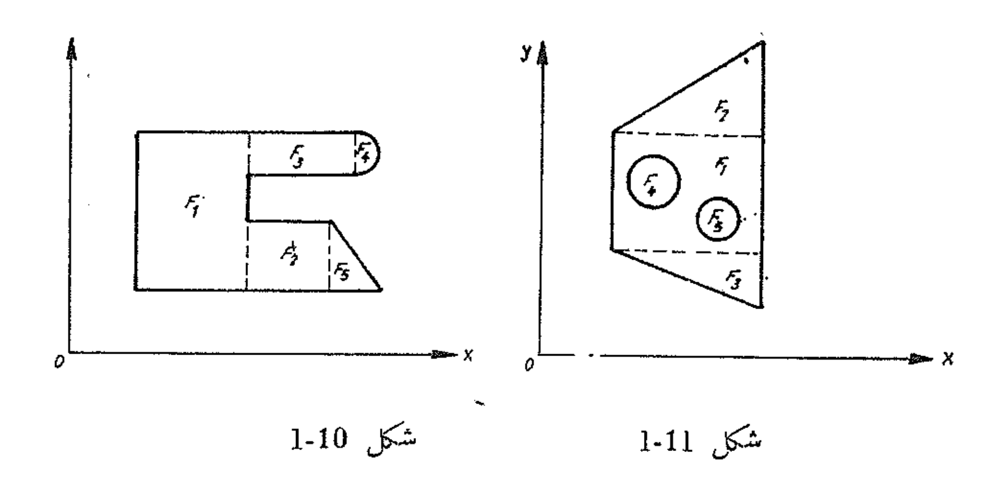
$$F = \int_{F_1} dF + \int_{F_2} dF + \cdots + \int_{F_n} dF = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu$$

بالاستفادة بعزوم الدرجة الثانية للسطوح الجزئية F_ν المنسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية x , y :

$$\left.\begin{aligned} I_{xx\nu} &= \int_{F_\nu} y^2\, dF \\ I_{yy\nu} &= \int_{F_\nu} x^2\, dF \\ I_{xy\nu} &= \int_{F_\nu} xy\, dF \\ I_{p\nu} &= \int_{F_\nu} r^2\, dF \end{aligned}\right\} \quad \nu = 1, 2, \cdots, n$$

يتم الحصول على عزوم الدرجة الثانية للسطح المركب F (السطح الكلي) :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_F y^2\, dF = \int_{F_1} y^2\, dF + \cdots + \int_{F_n} y^2\, dF = \sum_{\nu=1}^{n} I_{xx\nu} \\ I_{yy} &= \int_F x^2\, dF = \int_{F_1} x^2\, dF + \cdots + \int_{F_n} x^2\, dF = \sum_{\nu=1}^{n} I_{yy\nu} \\ I_{xy} &= \int_F xy dF = \int_{F_1} x\, y\, dF + \cdots + \int_{F_n} xy\, dF = \sum_{\nu=1}^{n} I_{xy\nu} \\ I_p &= \int_F r^2\, dF = \int_{F_1} r^2\, dF + \cdots + \int_{F_n} r^2\, dF = \sum_{\nu=1}^{n} I_{p\nu} \end{aligned} \qquad (1\text{-}17)$$



شكل 1-10 شكل 1-11

اما هذه النتيجة فتشير الى ان عزوم الدرجـــة الثانية للسطح المركب (السطح الكلي) F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية x , y يساوي مجموع عزوم الدرجة الثانية للسطوح الجزئيـــة F_ν (المشكلة للسطح F) بالنسبة لنفس مجموعة المحاور الاحداثية x , y . اما اذا احتـوى السطح المركب على بعض الفجوات (او الثقوب) كما يشير الشكل (1-11) وبحيث يمكن تمثيل السطح كالتالي :

$$F = F_1 + F_2 + F_3 - F_4 - F_5$$

عندئذ ينبغي ارفاق عزوم الدرجة الثانية للفجوات (سطوح الثقوب) باشارة سالبة بحيث تصبح العلاقة بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_{xx1} + I_{xx2} + I_{xx3} - I_{xx4} - I_{xx5} \\ I_{yy} &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy3} - I_{yy4} - I_{yy5} \\ I_{xy} &= I_{xy1} + I_{xy2} + I_{xy3} - I_{xy4} - I_{xy5} \\ I_p &= I_{p1} + I_{p2} + I_{p3} - I_{p4} - I_{p5} \end{aligned} \qquad (1\text{-}18)$$

هنا ايضاً يجب الانتباه الى ان كافة عزوم الدرجة الثانية منسوبة الى نفس مجموعة المحـــاور الاحداثيه x , y .

١ ـ ٢ ـ ٣ أمثلة

مثـال 5 :

مقطع عرضي بشكل مثلث قائم الزاوية (شكل 1-12) .

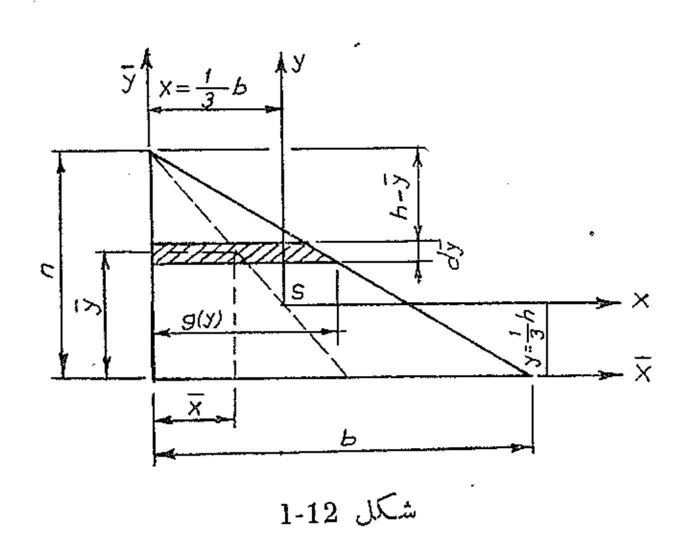
المعطى : أبعاد المثلث b , h .

المطلوب :

١ ـ حساب جداء العطالة I_{xy} , $I_{\bar{x}\bar{y}}$.

٢ ـ حساب $I_{\bar{x}\bar{x}}$, $I_{\bar{y}\bar{y}}$, $I_{\bar{x}\bar{y}}$ باقتطاع عنصر تفاضلي .

٣ ـ حساب I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} بالاعتماد على الطلب الثاني واستخدام علاقات شتاينر .



شكل 1-12

الحـل :

١ ـ حساب جداء العطالة I_{xy} و $I_{\bar{x}\bar{y}}$.

لايجاد جداء العطالة $I_{\bar{x}\bar{y}}$ يقسم السطح بموازاة احد المحاور $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ (هنا يختار بموازاة المحور $\bar{x}$) الى شرائح رقيقة (قدر الامكان) .

يمكن اعتبار كل شريحة مستطيلا (هنا عرضه $g\ (\bar{y})$ وسماكته $d\bar{y}$) مساحته :

$$dE = g\ (\bar{y})\ d\ \bar{y}$$

في هذه العلاقة يرى ان طول الشريحة $g\ (\bar{y})$ ليس ثابتاً بل هو تابع للاحداثي $\bar{y}$. من تشابه المثلثات يمكن حساب $g\ (\bar{y})$:

$$\frac{g\ (\bar{y})}{b} = \frac{h - \bar{y}}{h} \qquad : \qquad g\ (\bar{y}) = \frac{h - \bar{y}}{h}\ b$$

حدود التكامل: من $\bar{y} = 0$ حتى $\bar{x} = h$.

كما وان :

$$\bar{x} = \frac{1}{2} g(\bar{y})$$

بالتبديل فى علاقة ايجاد جداء العطالة ينتج :

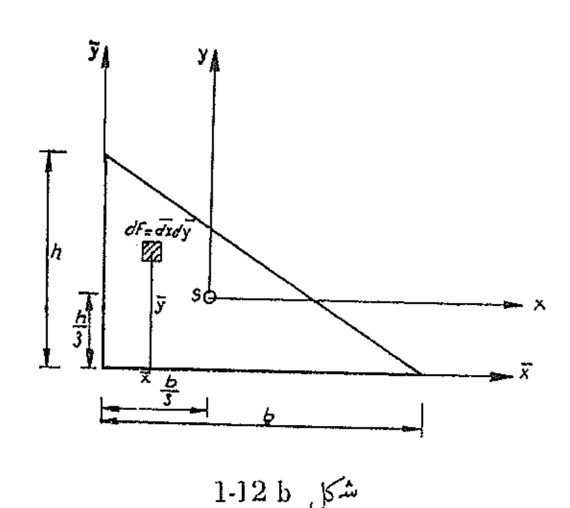
$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x}\,\bar{y}\,dF = \int_0^h \frac{1}{2} g(\bar{y}) \cdot \bar{y} \cdot g(\bar{y})\, d\bar{y} = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h - \bar{y})^2\, \bar{y}\, d\bar{y}$$

$$= \frac{b^2 h^2}{24} \qquad (1\text{-}19)$$

بتطبيق هذه النتيجة في علاقة شتاينر يمكن حساب جداء عطالة المثلث قائم الزاوية بالنسبة لاية مجموعة من المحاور توازي اضلاعه القائمة (قاعدته وارتفاعه) . وبذلك يمكن ايجاد I_{xy} بالنسبة للمحاور المركزية x , y :

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} - \bar{x}_s\,\bar{y}_s\,F = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{1}{3} b \cdot \frac{1}{3} h \cdot \frac{1}{2} bh = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

٢ ـ حساب عزوم الدرجة الثانية $I_{\bar{x}\bar{x}}$, $I_{\bar{y}\bar{y}}$, $I_{\bar{x}\bar{y}}$ باقتطاع عنصر تفاضلي صغير من المثلث (شكل 1-12 b) .



شكل 1-12 b

مساحة العنصر التفاضلي :

$$dF = d\bar{x}\; d\bar{y}$$

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2\, dF = \int_0^b d\bar{x} \int_0^{h(1-\bar{x}/b)} \bar{y}^2\, d\bar{y} = \int_0^b \frac{\bar{y}^3}{3}\Big|_0^{h(1-\bar{x}/b)} d\bar{x} =$$

$$= \frac{h^3}{3}\int_0^b \left(1 - \frac{\bar{x}}{b}\right)^2 d\bar{x} = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_F \bar{x}^2\, dF = \int_0^b \bar{x}^2\, dx \int_0^{h(1-\bar{x}/b)} d\bar{y} = \int_0^b \bar{x}^2 \cdot \bar{y}\Big|_0^{h(1-\bar{x}/b)} d\bar{x} =$$

$$= h\int_0^b \bar{x}^2 \left(1 - \frac{\bar{x}}{b}\right) d\bar{x} = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x}\,\bar{y}\, dF = \int_0^b \bar{x}\, d\bar{x} \int_0^{h(1-\bar{x}/b)} \bar{y}\, d\bar{y} = \int_0^b \bar{x}\, \frac{\bar{y}^2}{2}\Big|_0^{h(1-\bar{x}/b)} d\bar{x}$$

$$= \frac{h^2}{2}\int_0^b - \left(1 - \frac{\bar{x}}{b}\right)^2 d\bar{x} = \frac{b^2 h^2}{24}$$

٣ ـ حساب عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} بالاستعانة بنتائج الطلب الثاني واستخدام علاقات شتاينر .

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{b h}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{yy} = \frac{b^3 h}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{b h}{2} = \frac{b^3 h}{36}$$

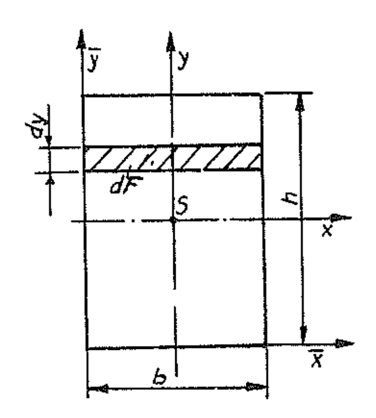
$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{b}{3}\,\frac{h}{3}\,\frac{b h}{2} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

مثال 6 :

مقطع عرضي مستطيل الشكل (شكل 1-13) .

المعطى : h , b ، $I_{xx}=\frac{bh^3}{12}$ و $I_{yy}=\frac{hb^3}{12}$ ، $I_{xy}=0$.

المطلوب : ايجاد $I_{\overline{x}\overline{x}}$, $I_{\overline{y}\overline{y}}$, $I_{\overline{x}\overline{y}}$.



شكل 1-13

الحـــل :

ان احداثيات مركز الثقل s بالنسبة لمجموعة المحاور $\overline{x}$, $\overline{y}$ هي :

$$\overline{x}_s=\frac{b}{2} \quad , \quad \overline{y}_s=\frac{h}{2}$$

باستخدام علاقة شتاينر ينتج :

$$I_{\overline{x}\overline{x}}=I_{xx}+\overline{y}_s^2 F=\frac{bh^3}{12}+\frac{h^2}{4}bh=\frac{bh^3}{3}$$

$$I_{\overline{y}\overline{y}}=I_{yy}+\overline{x}_s^2 F=\frac{hb^3}{12}+\frac{b^2}{4}bh=\frac{hb^3}{3} \qquad (1\text{-}19)$$

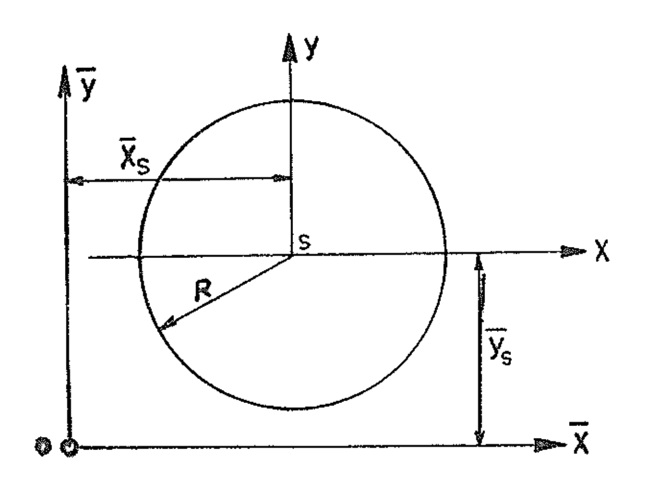
$$I_{\overline{x}\overline{y}}=I_{xy}+\overline{x}_s\overline{y}_s F=0+\frac{b}{2}\,\frac{h}{2}\,bh=\frac{b^2h^2}{4}$$

مثـال 7 :

مقطع عرضي دائري الشكل (شكل 1-14) .

المعطى : R ، $I_{xx}=I_{yy}=\frac{R^4\pi}{4}$ ، $I_{xy}=0$ ، $\overline{x}_s$ ، $\overline{y}_s$

المطلوب : حساب $I_{\overline{x}\overline{x}}$, $I_{\overline{y}\overline{y}}$, $I_{\overline{x}\overline{y}}$.



شكل 1-14

الحـل :

بأخذ معطيات المسألة في علاقة شتاينر بعين الاعتبار ينتج :

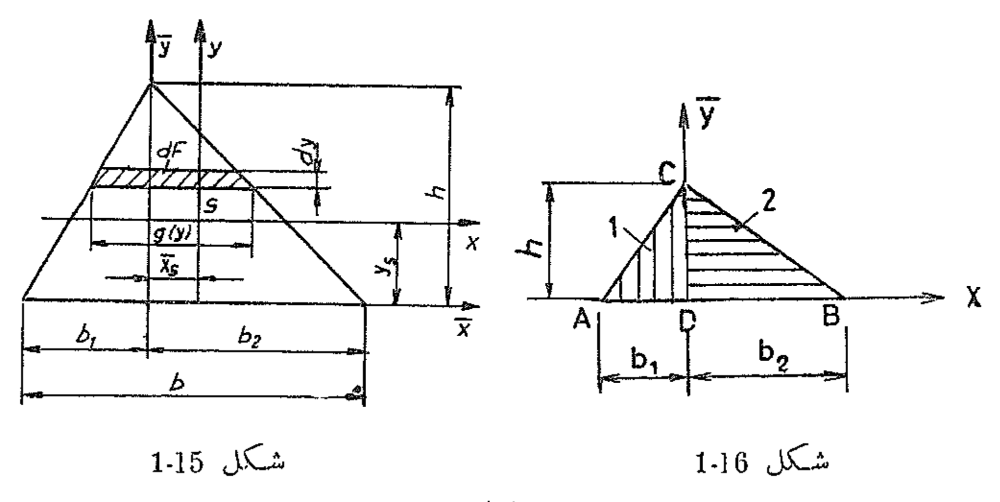
$$I_{\overline{xx}} = I_{xx} + \overline{y}_s^2 F = \frac{R^4 \pi}{4} + \overline{y}_s^2 R^2 \pi$$

$$I_{\overline{yy}} = I_{yy} + \overline{x}_s^2 F = \frac{R^4 \pi}{4} + \overline{x}_s^2 R^2 \pi$$

$$I_{\overline{xy}} = I_{xy} + \overline{x}_s \overline{y}_s F = 0 + \overline{x}_s \overline{y}_s R^2 \pi$$

مثـال 8 :

مقطع عرضي مثلثي الشكل (شكل 1-15) .



شكل 1-15

شكل 1-16

المعطى : ابعاد المثلث b , b_1 , b_2 , h .

المطلوب : حساب عزوم المطالة التالية :

$$I_{\overline{xy}} \;,\; I_{\overline{yy}} \;,\; I_{yy} \;,\; I_{\overline{xx}} \;,\; I_{xx}$$

الحــل :

مساحة الشريحة :

$$dF = g(y) \,.\, dy$$

حيث ان g هو تابع للمحور y ويحسب من علاقة التناسب :

$$\frac{g(y)}{b} = \frac{h-(y+\overline{y}_s)}{h} = \frac{\frac{2}{3}h-y}{h}$$

ابعاد مركز الثقل :

$$\overline{x}_s = \frac{b_2-b_1}{3} \qquad , \qquad \overline{y}_s = \frac{h}{3}$$

لحساب I_{xx} ينطلق من المعادلة الاصلية، وبذلك ينتج :

$$I_{xx} = \int_F y^2\, dF = \int_{y=-h/3}^{+2h/3} y^2\, g(y)\, dy = \frac{b}{h}\int_{y=-h/3}^{+2h/3} \left(\frac{2}{3}hy^2 - y^3\right) dy = \frac{bh^3}{36} \qquad (1\text{-}20)$$

بتطبيق قاعدة شتاينر يمكن الحصول على $I_{\overline{xx}}$:

$$I_{\overline{xx}} = I_{xx} + \overline{y}_s^2\, F = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} \qquad (1\text{-}21)$$

لحساب عزم المطالة $I_{\overline{y}\overline{y}}$ يجزىء المثلث الاصلي الى مثلثين جزئيين يشتركان مع بعض في القاعدة $CD=h$. اما الارتفاعات فهي $AD=b_1$ و $DB=b_2$ (شكل 1-16) . يمكن الحصول على عزوم عطالة كلا المثلثين بالنسبة للمحور $\overline{y}$ مباشرة وذلك باستخدام العلاقة (1-21) :

$$I_{\overline{yy}1} = \frac{hb_1^3}{12} \qquad , \qquad I_{\overline{yy}2} = \frac{hb_2^3}{12}$$

اما عزم العطالة $I_{\bar{y}\bar{y}}$ فيمثل مجموع عزوم عطالة كلا المثلثين 1 , 2 :

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{\bar{y}\bar{y}1} + I_{\bar{y}\bar{y}2} = \frac{hb_1^3}{12} + \frac{hb_2^3}{12} = \frac{h}{12}(b_1^3+b_2^3) \quad (1\text{-}22)$$

من هذه المعادلة وباستخدام علاقة شتاينر ينتج :

$$I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{x}_s^2 F = \frac{h}{12}(b_1^3 + b_2^3) - \frac{(b_2-b_1)^2}{9}\frac{bh}{2}$$

$$= \frac{hb}{36}(b^2 - b_1 b_1) \quad (1\text{-}23)$$

لحساب جداء العطالة يستخدم نفس التقسيم السابق مستعاناً بجداء عطالة المثلث قائم الزاوية الذي تم ايجاده في المثال 5 (شكل 12-1) وبذلك ينتج :

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{\bar{x}\bar{y}1} + I_{\bar{x}\bar{y}2} = -\frac{b_1^2 h^2}{24} + \frac{b_2^2 h^2}{24} = \frac{h^2}{24}(b_2^2 - b_1^2)$$

(قيمة I_{xy1} سالبة لان احد الاضلاع بعكس اتجاه x) .

في حالة عدم الاستعانة بالنتيجة السابقة والرغبة في ايجاد $I_{\bar{x}\bar{y}}$ بطريقة التكامل ، يحتفظ بفكرة تقسيم المثلث الى مثلثين قائمين .

مساحة العنصر السطحي :

$$dF = d\bar{x}\, d\bar{y}$$

في حالة اللجوء الى التكامل المزدوج ينبغي اختيار متغير مستقل (unabhängige Variable) وآخر تابع له (abhängige Variable) ، وبذلك ينتج ، من اجل المثلث الايسر 1 ($\bar{x}$ هي تابع للمتغير) :

$$I_{\bar{x}\bar{y}1} = \int_0^h \int_{\bar{x}1}^0 \bar{x}\,\bar{y}\, d\bar{x}\, d\bar{y} = -\int_0^h \frac{\bar{x}_1^2}{2}\bar{y}\, d\bar{y}$$

بالاستعانة بعلاقة التشابه :

$$\frac{\bar{x}_1}{b_1} = \frac{h-\bar{y}}{h}$$

ينتـج :

$$I_{\bar{x}\bar{y}_1} = -\frac{b_1^2}{2}\int_0^h \left(1-\frac{\bar{y}}{h}\right)\bar{y}\,d\bar{y} = -\frac{b_1^2 h^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{b_1^2 h^2}{24}$$

من اجل المثلث الاخير ينتج بطريقة مشابهة :

$$I_{\bar{x}\bar{y}_2} = -\frac{b_2^2 h^2}{24}$$

بواسطتها يتم الحصول على جداء المطالة للمثلث الكلي :

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{h^2}{24}\,(b_2^2 - b_1^2) \qquad (1\text{-}24)$$

للحصول على جداء المطالة I_{xy} تستخدم علاقة شتاينر :

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} - \bar{x}_s\bar{y}_s F = \frac{h^2}{24}(b_2^2 - b_1^2) - \frac{b_2 - b_1}{3}\,\frac{h}{3}\,\frac{(b_2+b_1)\,h}{2}$$

$$= -\frac{h^2\,(b_2^2 - b_1^2)}{72}$$

مثـال 9 :

مقطع عرضي على شكل نصف دائرة (شكل 1-17) .

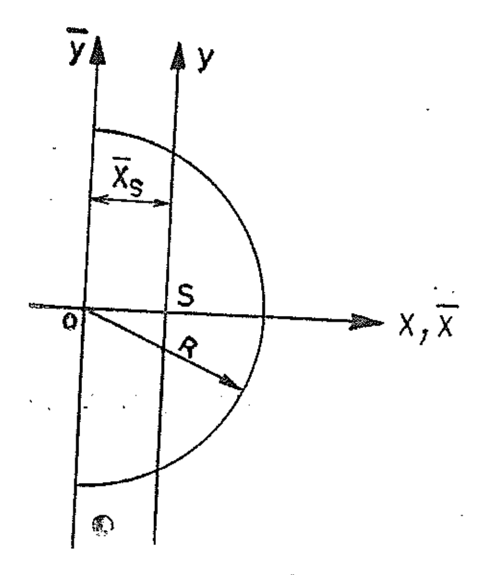
المعطى : نصف قطر الدائرة R وبعد مركز الثقل $\bar{x}_s = 4R/3\pi$ عن المحور $\bar{y}$.

المطلوب : ايجاد عزوم المطالة I_{xx} , I_{yy} .

الحـل :

حسب قواعد حساب عزوم عطالة سطح مركب يرى ان I_{xx} تساوي نصف عزم عطالة الدائرة الـكاملة بالنسبة للمحور x :

$$I_{xx} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{8} \qquad (1\text{-}25)$$



شكل 1.17

نفس الكلام السابق يصلح بالنسبة للمحور $\bar{y}$ وبذلك ينتج :

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{8} \qquad (1\text{-}26)$$

باستخدام علاقة شتاينر يتم الحصول على عزم العطالة I_{yy} :

$$I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{x}_s^2 F = \frac{\pi R^4}{8} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^4}{8}\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right) \quad (1\text{-}27)$$

مثال 10 :

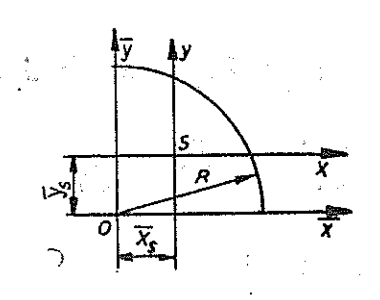
مقطع عرضي على شكل ربع دائرة (شكل 1-18) .

المعطى : نصف قطر الدائرة R وأبعاد مركز الثقل $\bar{x}_s = \bar{y}_s = \frac{4R}{3\pi}$ عن المحاور الاحداثية $\bar{y}$, $\bar{x}$.

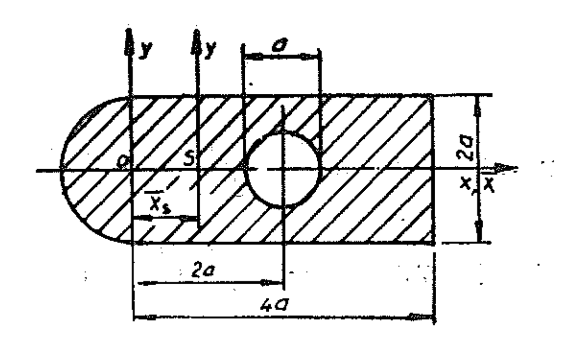
المطلوب : ايجاد جداءات العطالة $I_{\bar{x}\bar{y}}$, I_{xy} .

الحل :

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x}\,\bar{y}\,dF = \int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} r^3 \sin\varphi \cos\varphi \, dr\, d\varphi = \frac{R^4}{8}$$



شكل 1-18



شكل 1-19

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} - \bar{x}_s \bar{y}_s F = \frac{R^4}{8} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi R^2}{4} = \frac{9\pi - 32}{72\pi} R^4$$

مثـال 11 :

المقطع العرضي الممثل في الشكل (1-19) .

المعطى : ابعاد المقطع العرضي .

المطلوب : حساب $I_{\bar{x}\bar{x}}$, $I_{\bar{y}\bar{y}}$, $I_{\bar{x}\bar{y}}$, I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} .

الحل :

اذا تألف المقطع العرضي المركب من مجموعة سطوح بسيطة عزوم عطالتها معلومة ، بذلك يحسب عزم العطالة الكلي بالنسبة لمحور ما بأنه مجموع عزوم عطالة السطوح الجزئية البسيطـه بالنسـبة لذلك المحور . تعتبر الثقوب والفجوات سطوحا سالبة .

ان احداثيات مركز ثقل المقطع العرضي الممثل في الشكل (1-19)هي :

$$\bar{x}_s = \frac{1}{F} \Sigma \bar{x}_i F_i = \frac{\left(-\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}\right)\frac{1}{2}\pi a^2 + 2a \,.\, 4a \,.\, 2a - 2a\frac{\pi a^2}{4}}{\frac{1}{2}\pi a^2 + 4a \,.\, 2a - \frac{\pi a^2}{4}}$$

$$= \frac{-8 + 192 - 6\pi}{96 + 3\pi} a = \frac{184 - 6\pi}{96 + 3\pi} a$$

$$= 1,57 \; a$$

$$\bar{y}_s = 0$$

بعد الحصول على هذه النتيجة ينتج :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \sum_i I_{\bar{x}\bar{x}i} = \frac{4a(2a)^3}{12} + \frac{\pi a^4}{8} - \frac{\pi a^4}{64} = \left(\frac{8}{3} + \frac{7\pi}{64}\right) a^4 = 3{,}01 a^4$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \sum I_{\bar{y}\bar{y}i} = \left[\frac{2a \cdot (4a)^3}{12} + (2a)^2 \cdot 4a \cdot 2a\right] + \frac{\pi a^4}{8}$$

$$- \left[\frac{\pi (a/2)^4}{4} + (2a)^2 \frac{\pi a^2}{4}\right]$$

$$= \frac{2a(4a)^3}{3} + \frac{\pi a^4}{8} - \left(\frac{\pi a^4}{64} + 4a^2 \frac{\pi a^2}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{128}{3} - \frac{57\pi}{64}\right) a^4 = 39{,}87\ a^4$$

(بسبب التناظر) $I_{\bar{x}\bar{y}} = 0$

بواسطة العلاقة التالية :

$$F = 8a^2 + \frac{\pi a^2}{4} = \left(8 + \frac{\pi}{4}\right) a^2 = 8{,}785\ a^2$$

يتم الحصول على عزوم المطالة المحورية :

$$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}_s^2 F = I_{\bar{x}\bar{x}}$$

$$I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{x}_s^2 F = 39{,}87\ a^4 - 1{,}57^2\ a^2 \cdot 8{,}785\ a^2 = 18{,}27\ a^4$$

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} - \bar{x}_s \bar{y}_s F = 0$$

مثـال 12 :

مقطع عرضي على شكل حلقة دائرية (شكل 1.20).

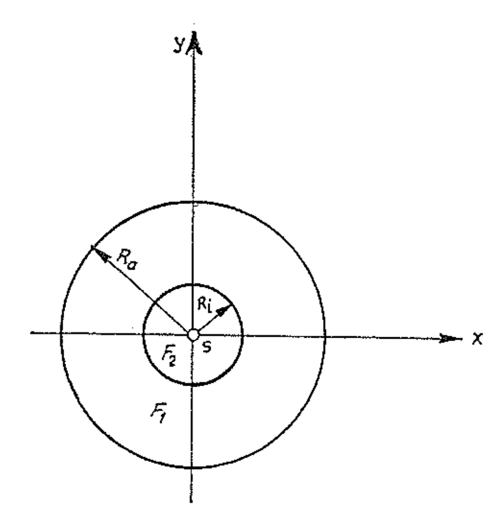
المعطى : نصف قطر الحلقة الخارجي R_a ونصف قطر الحلقة الداخلي R_j .

المطلوب : ايجاد عزوم المطالة I_{xx} ; I_{yy} , I_p .

الحـل :

لاسباب التناظر :

$$I_p = 2\,I_{xx} = 2\,I_{yy}$$



شكل 1-20

عزم عطالة الحلقة = عزم عطالة الدائرة الخارجية المليئة ـ عزم عطالة الدائرة الداخلية المليئة (عزم عطالة الثقب) :

$$I_{xx} = I_{xx1} - I_{xx2} = \frac{\pi R_a^4}{4} - \frac{\pi R_i^4}{4} = \frac{\pi}{4}(R_a^4 - R_i^4) = I_{yy}$$

$$I_p = I_{p1} - I_{p2} = \frac{\pi R_a^4}{2} - \frac{\pi R_i^4}{2} = \frac{\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4)$$

مثال 13 :

مقطع عرضي مسدسي الشكل (مضلع سداسي منتظم) (شكل 1.21).

المعطى : طول ضلع المسدس a .

المطلوب : إيجاد عزم العطالة I_{xx} .

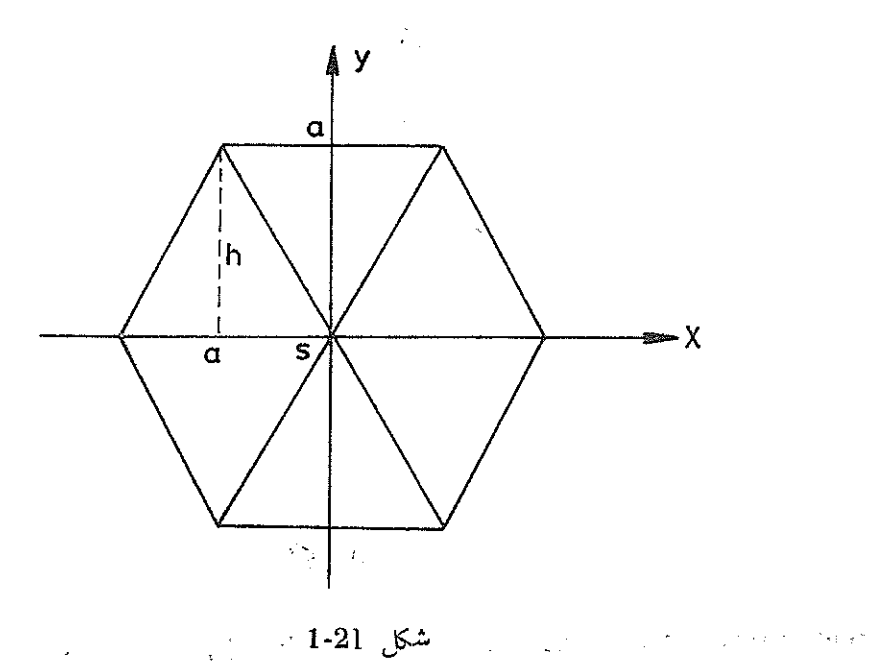
الحـل :

بتقسيم المسدس الى ستة مثلثات ، أربعة منها تنطبق قاعدتها على المحور x ، ينتج :

$$I_{xx} = 4 \cdot \frac{a h^3}{12} + 2 \cdot \frac{a h^3}{4} = \frac{5}{6} a h^3$$

وبما أن :

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



شكل 1-21

فان العلاقة الاخيرة تأخذ الشكل التالي :

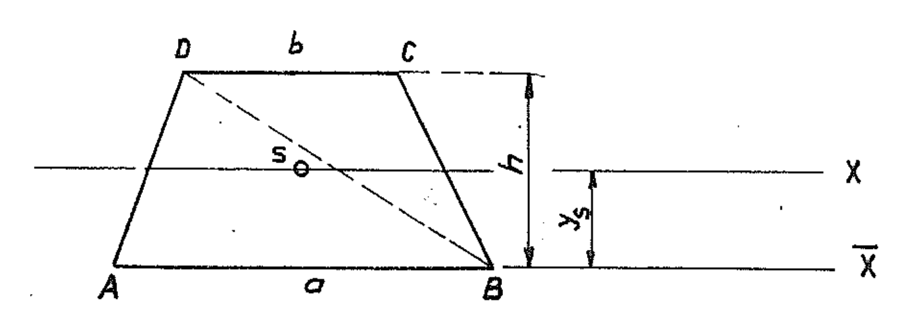
$$I_{xx} = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4$$

مثـال 14 :

مقطع عرضي على شكل شبه منحرف (شكل 1.22) .

المعطى : الابعاد h , b , a .

المطلوب : حساب عزوم المطالة $I_{\bar{x}\bar{x}}$ و I_{xx} .



شكل 1-22

الحـل :

يقسم شبه المنحرف الى المثلثين ABD و BCD . بعد ذلك يحسب عزم عطالة شبـــه المنحرف بالنسبة للمحور $\bar{x}$ الذي ينطبق على قاعدة شبه المنحرف السفلية وهو يساوي مجموع عزوم عطالة المثلثين بالنسبة لنفس المحور . بالاستفادة من عزوم عطالة المثلث التي تم حســـابها في المثال 8 (الشكل 1.15) ينتج :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{ah^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{h^3}{12}(a+3b)$$

يرمز لبعد المحور $\bar{x}$ عن المحور x بالحرف e أما قيمتـه فتحسب بطريقة ايجـاد مراكز الثقـل وهي تســاوي :

$$e = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$$

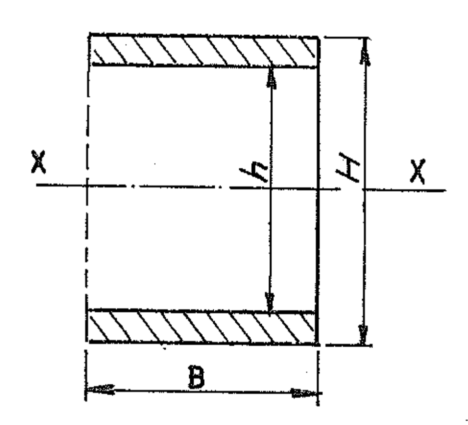
باستخدام علاقة شتاينر ينتج :

$$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} - F y_s^2 = \frac{h^2}{12}(a+3b) - \frac{h}{2}(a+b) \cdot \frac{h^2}{3} \frac{(a+2b)^2}{(a+b)^2}$$

$$I_{xx} = \frac{h^3}{36} \frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}$$

مثـال 15 :

القطع العرضي الممثل فى الشكل (23..) .



شكل 1-25

المعطى : B , H , h .

المطلوب : حساب I_{xx} .

باعتبار أن السطح يتألف من مستطيل أبعاده B , H ويحتوي على فجوة أبعادهـا B و h فان عزم عطالة الشكل الفعلي يساوي عزم عطالة المستطيـــل منقوصاً منه عزوم عطالة الفجوة مستطيلة الشكل :

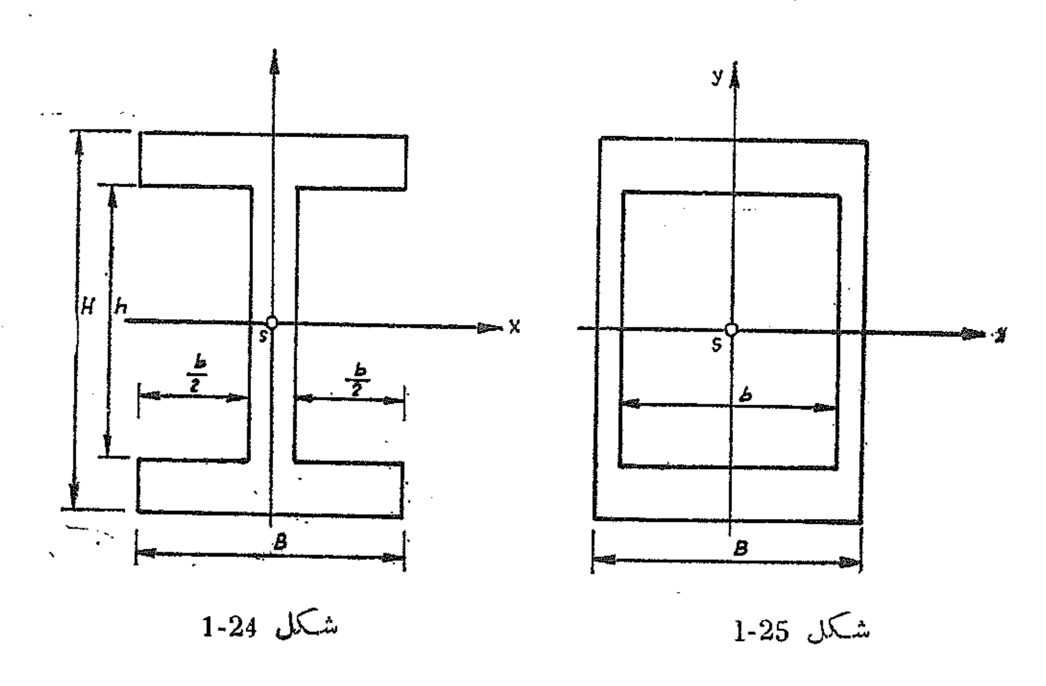
$$I_{xx} = \frac{B\,H^3}{12} - \frac{B\,h^3}{12} = \frac{B}{12}(H^3 - h^3)$$

مثـال 16 :

المقاطع العرضية الممثلة في الشكل (1.24) والشكل(1.25) .

المعطى : أبعاد المقاطع العرضية .

المطلوب : حساب عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} لهذه السطوح (x, y هي محاور مركزية) .



شكل 1-24   شكل 1-25

الحـل :

ان عزم عطالة السطح الممثل في الشكل (1.24) بالنسبة للمحور x هو :

$$I_{xx} = \frac{B\,H^3}{12} - \frac{b\,h^3}{12} = \frac{1}{12}(BH^3 - bh^3)$$

$$I_{xx} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}(BH^3 - bh^3)$$

اما عزم عطالته بالنسبة للمحور y فهو :

$$I_{yy} = \frac{(H-h)B^3}{12} + \frac{h(B-b)^3}{12} = \frac{1}{12}[(H-h)B^3 + h(B-b)^3]$$

كما ان عزم عطالة السطح الممثل في الشكل (1-25) بالنسبة للمحور x هو نفس عـزم عطالة السطح الممثل في الشكل (1-24) . اما عزم عطالته بالنسبة للمحور y فهو :

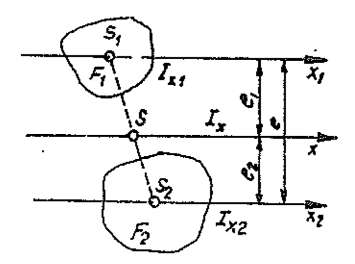
$$I_{yy} = \frac{HB^3}{12} - \frac{hb^3}{12} = \frac{1}{12}(HB^3 - hb^3)$$

مثـال 17 :

مقطعان عرضيان كما يشير الشكل (1-26) .

المعطى : مساحة المقطع العرضي الاول F_1 وعزم عطالتهبالنسبة للمحور المركزي الذاتي I_{x1x1} وكذلك مساحة المقطع العرضي الثاني F_2 وعزم عطالته بالنسبة للمحور المركزي الذاتي I_{x2x2} وكذلك البعد العمودي بين مركز ثقل السطح الاول عن مركز ثقل السطح الثاني e . المحـاور x_1 ، x_2 هي محاور متوازية .

المطلوب : ايجاد عزم عطالة كلا السطحين (باعتبارها سطحاً مركباً واحداً) بالنسبـة للمحـور المركزي المشترك I_{xx} والذي يوازي كل من x_1 ، x_2 .



شكل 1-26

الحـل :

بدون معرفة مكان مركز الثقل المشترك s (شكل 1-26) يستطاع ايجاد القيمة المطلوبة :

$$I_{xx} = \sum_i I_{xxi} = I_{xx1} + I_{xx2}$$

ليفترض مبدئياً ان البعد العمودي بين المحورين x_1 , x والذي يرمز له بـ e_1 والبعد العمودي بين المحورين x_2 , x والذي يرمز له بـ e_2 هي قيم معلومة . لذلك يمكن بسهولة ايجاد عزم العطالة I_{xx} باستخدام العلاقة الاخيرة والاستعانة بعلاقة شتاينر :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= (I_{x1x1} + e_1^2 F_1) + (I_{x2x2} + e_2^2 F_2) \\ &= I_{x1x1} + I_{x2x2} + e_1^2 F_1 + e_2^2 F_2 \end{aligned} \qquad (1\text{-}28)$$

بما ان المحور x يمر من مركز الثقل المشترك للسطحين F_1 و F_2 فان العزم الستاتيكي المشترك للسطحين بالنسبة له يساوي صفراً .

العزم الستاتيكي للسطح F_1 بالنسبة للمحور x يساوي $F_1 e_1$.

العزم الستاتيكي للسطح F_2 بالنسبة للمحور x يساوي $-F_2 e_2$ (اشارة سالب لان مركز الثقل s_2 يقع تحت المحور x) .

العزم الستاتيكي المشترك للسطحين F_1 و F_2 بالنسبة للمحور x المار من مركز ثقلهما المشترك هو اذاً :

$$F_1 e_1 - F_2 e_2 = 0$$

اي ان

$$F_1 e_1 = F_2 e_2$$

اما الحدود الاخيرة من العلاقة (1-28) :

$$e_1^2 F_1 + e_2^2 F_2 = (e_1 F_1) e_1 + (e_2 F_2) e_2$$

فتكتب بواسطة العلاقة الاخيرة كما يلي :

$$e_1^2 F_1 + e_2^2 F_2 = F_2 e_2 e_1 + F_3 e_2^2 = F_2 e_2 (e_1 + e_2) = F_2 e_2 e \qquad (1\text{-}29)$$

يمكن حساب بعد مركز ثقل السطح الثاني عن مركز الثقل المشترك للسطحين e_2 كما يلي :

العزم الستاتيكي للسطح F_1 بالنسبة للمحور x_2 يساوي $F_1 e$.

العزم الستاتيكي للسطح F_2 بالنسبة للمحور x_2 يساوي 0 .

العزم الستاتيكي للسطحين F_1 و F_2 بالنسبة للمحور x_2 يساوي إذاً $F_1 e$. من جهـة ثانيـة يرى ان العزم الستاتيكي للسطحين F_1 و F_2 بالنسبة للمحـــور x_2 يساوي $(F_1+F_2)e_2$ وبما ان كلا العلاقتين تمثل نفس القيمة لذلك يمكن وضع اشارة المساواة بينهما اي :

$$(F_1 + F_2)e_2 = F_1 e$$

ومنها ينتج :

$$e_2 = \frac{F_1}{F_1+F_2} e$$

بتبديل هذه القيمة في العلاقة (1-29) وبعد ذلك بتبديل الناتج في علاقـــة ايجاد I_{xx} يتم الحصول على عزم العطالة المطلوب بدلالة المعطيات :

$$I_{xx} = I_{x1x1} + I_{x2x2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 F_2} e^2 \qquad (1.30)$$

تحتوي هذه العلاقـة فقط على البعد بين المحورين x_1 , x_2 دون الحاجـــة لمعرفة مركز الثقل المشترك .

مثـال 18 :

مقطعان عرضيان كما يشير الشكل (1-27) .

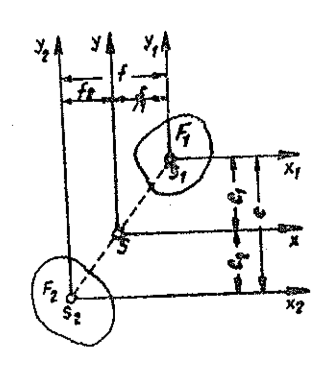
المعطى : مساحة المقطع العرضي الاول F_1 وجداء عطالته I_{x1y1} بالنسبة للمحاور الذاتيـــة x_2 , y_2 ومساحة المقطع العرضي الثاني وجداء عطالته I_{x2y2} بالنسبة للمحاور الذاتية x_2 و y_2 وكذلك البعد العمودي بين المحورين x_1 , x_2 الذي يرمز له بـ e وكذلك ايضاً البعد العمودي بين المحورين y_1 , y_2 والذي يرمز له بـ f .

مجموعة المحاور المتعامدة x_1 , y_1 توازي مجموعة المحاور المتعامدة x_2 , y_2 .

المطلوب : ايجاد جداء عطالة السطحين باعتبارها سطحاً مركباً واحداً بالنسبة للمحاور (x , y) الموازية لمجموعتي المحاور (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) والمـارة من مركز الثقـــل المشترك للسطحين F_1 , F_2 .

الحـل :

يحسب جداء العطالة المشترك بواسطة العلاقة التالية :



شكل 1-27

$$I_{xy} = \sum_i I_{xyi} = I_{xy1} + I_{xy2}$$

باستخدام علاقة شتاينر ينتج :

$$I_{xy} = [\, I_{x1y1} + F_1 e_1 f_1 \,] + [\, I_{x2y2} + F_2 (-e_2)(-f_2) \,]$$

$$= I_{x1y1} + I_{x2y2} + F_1 e_1 f_1 + F_2 e_2 f_2 \qquad (1.31)$$

تماماً كما في المسألة السابقة يمكن الكتابة :

$$e_1 = \frac{F_2 e}{F_1 + F_2} \quad ; \quad e_2 = \frac{F_1 e}{F_1 + F_2}$$

بالتعويض في العلاقة (1-31) يتم الحصول على العلاقة الآتية :

$$I_{xy} = I_{x1y1} + I_{x2y2} + \frac{F_1 F_2 f_1}{F_1 + F_2} e + \frac{F_1 F_2 f_2}{F_1 + F_2} e$$

$$= I_{x1y1} + I_{x2y2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 F_2} e (f_1 + f_2)$$

ومن الشكل (1-27) يرى ان :

$$f = f_1 + f_2$$

بتبديلها في العلاقة الاخيرة ينتج :

$$I_{xy} = I_{x1y1} + I_{x2y2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e f$$

في الحالة الممثلة في الشكل (1-27) حيث ان مراكز الثقل S_1 ، S_2 تقع في الربع الاول والربع الثالث من مجموعة الاحداثيات (x , y) فان الحد الاخير من العلاقة كان موجباً .

أما إذا وقعت S_1 , S_2 في الربع الثاني والربع الرابع من مجموعة الاحداثيات x , y فان الحد الاخير من العلاقة يكون سالباً .

(في حالة كون e≠0 و f≠0 عندئذ لا توجد مواقع اخرى للاحداثيات وذلك لوجوب وقوع مركز الثقل المشترك على الخط الواصل بين S_1 , S_2) .

ليلاحظ إذاً مايلي : عندما تقع S_1 , S_2 في أية أرباع وكانت لاحداثياتها نفس الاشارة يجب أن يكون الحد الأخير موجباً . وعندما تقع S_1 , S_2 في الارباع بحيث تكون لاحداثياتها اشارة مختلفة يجب ان يكون الحد الاخير سالباً . وبذلك تصبح العلاقة الاخيرة كالتالي :

$$I_{xy} = I_{x1y1} + I_{x2y2} \pm \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e f \qquad (1.32)$$

(I_{x1y1} و I_{x2y2} تبدل باشارتها أما e , f فتبدل بقيمتها المطلقة) .

مثـال 19 :

مقطع عرضي على شكل قطع ناقص (شكل 1-28) .

المعطى : انصاف اقطار القطع الناقص a , b .

المطلوب : ايجاد عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} بالنسبة للمحاور المركزية x , y .

الحـــل :

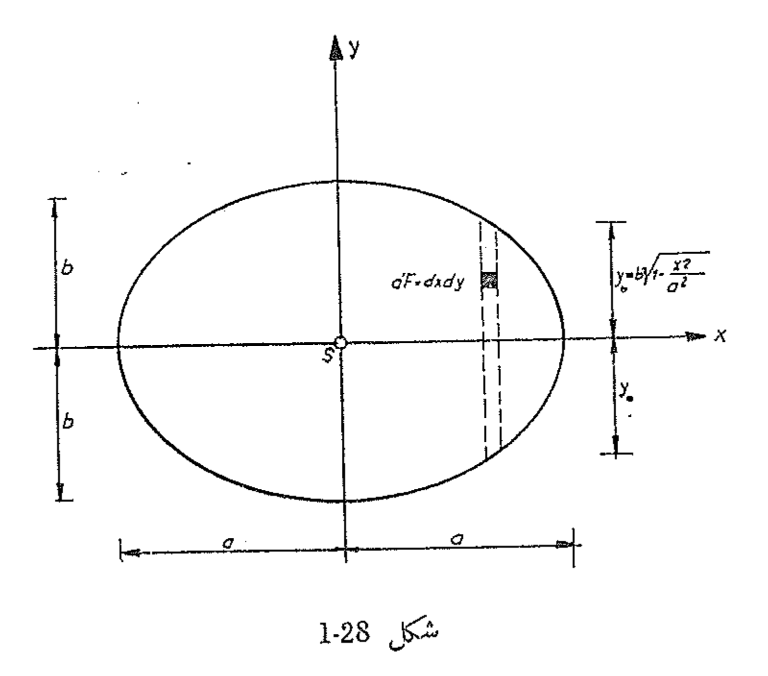
باقتطاع عنصر تفاضلي صغير مساحته :

$$dF = dx\,dy$$

يتم الحصول على عزوم الدرجة الثانية المطلوبة :

$$I_{xx} = \int_F y^2\, dF = \int_{-a}^{+a} x^2\, dx \int_{-y_0}^{+y_0} dy = \int_{-a}^{+a} x^2\, y \Big|_{-y_0}^{+y_0} . dx =$$

$$= 2b \int_{-a}^{+a} x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$



شكل 1-28

بالاستعانة بالعلاقة :

$$x = a \sin \frac{\varphi}{2}$$

فان العلاقة السابقة تصبح كما يلي :

$$I_{yy} = a^3 b \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{a^3 b}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{a^3 b}{4} \pi$$

باستبدال انصاف الاقطار a , b يتم الحصول على القيمة الثانية لعزم العطالة :

$$I_{xx} = \frac{b^3 a}{4} \pi$$

ولاسباب التناظر فان :

$$I_{xy} = 0$$

حالة خاصة (المقاطع العرضية الكيفية) :

اذا طلب تعيين عزوم الدرجة الثانية لسطح كيفي الشكل عندئذ يتوجب تقسيم هـــذا السطح (السطح الكلي) F الى سطوح جزئيـة بسيطـة (مستطيل ، مثلث ، دائرة والخ) عزوم عطالتها معلومة . اما القيم المطلوبة فيتم الحصول عليها حسب العلاقة (1-17) بالاستعانة بعزوم

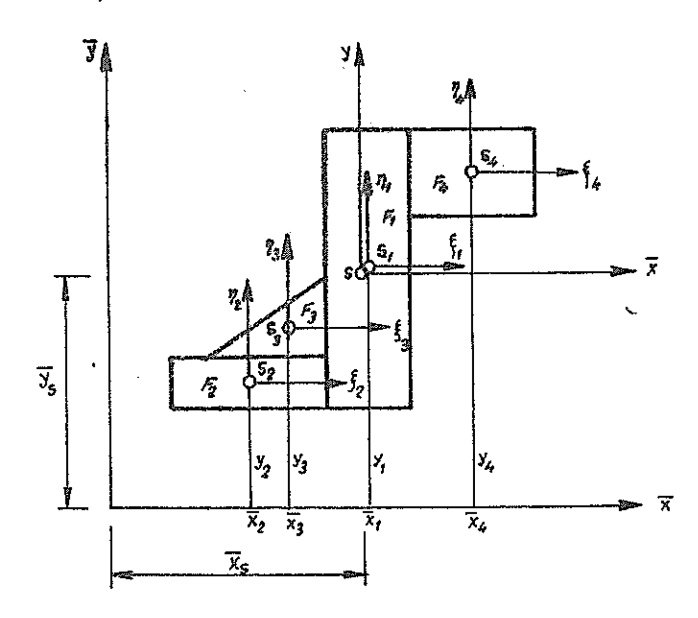
عطالة السطوح الجزئية . على العموم يطلب ايجاد عزوم الدرجة الثانية للسطح الكلي بالنسبة لمجموعة محاور احداثية متعامدة مركزية .

يفضل اجراء ذلك ضمن جدول . يشير الشكل (1-29) الى المقطع العرضي المطلوب حساب عزوم عطالته بالنسبة لمجموعة المحاور المركزية x , y . للقيام بذلك تثبيت بمجموعة محاور احداثية ما وليرمز لها بـ $\bar{x}$ و $\bar{y}$. تحدد مراكز ثقل السطوح الجزئية F_ν بتعيين الاحداثيات $\bar{x}_\nu$, $\bar{y}_\nu$ اما عزوم عطالتها بالنسبة لمحاورها المركزية الذاتية ξ_ν , η_ν فتحدد بمعرفة القيم $I_{\xi\xi\nu}$ و $I_{\eta\eta\nu}$ و $I_{\xi\eta\nu}$. من اجل المحاور x , y يتم الحصول على عزوم العطالة الجزئية $I_{xx\nu}$, $I_{yy\nu}$, $I_{xy\nu}$ هكذا :

$$I_{xx\nu} = I_{\xi\xi\nu} + (\bar{y}_\nu - \bar{y}_s)^2 F_\nu$$

$$I_{yy\nu} = I_{\eta\eta\nu} + (\bar{x}_\nu - \bar{x}_s)^2 F_\nu$$

$$I_{xy\nu} = I_{\xi\eta\nu} + (\bar{x}_\nu - \bar{x}_s)(\bar{y}_\nu - \bar{y}_s) F_\nu$$



شكل 1-29

وبالاستعانة بها يتم الحصول على عزوم عطالة السطح الكلي :

$$I_{xx} = \sum_{\nu=1}^{n} I_{xx\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} I_{\xi\xi\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} (\bar{y}_\nu - \bar{y}_s)^2 F_\nu$$

$$I_{yy} = \sum_{\nu=1}^{n} I_{yy\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} I_{\eta\eta\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} (\bar{x}_\nu - \bar{x}_s)^2 F_\nu$$

$$I_{xy} = \sum_{\nu=1}^{n} I_{\epsilon y\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} I_{\xi\eta\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} (\bar{x}_\nu - \bar{x}_s)(\bar{v}_\nu - \bar{y}_s) F_\nu$$

اما ابعاد مركز الثقل $\bar{x}_s$, $\bar{y}_s$ للسطح الكلي فيتم الحصول عليها حسب العلاقة :

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \bar{x}_\nu F_\nu}{F} \quad ; \quad \bar{y}_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \bar{y}_\nu F_\nu}{F}$$

يفضل اجراء الحساب ضمن الجدول التالي :

ν	$\bar{x}_\nu$	$\bar{y}_\nu$	F_ν	$\bar{x}_\nu F_\nu$	$\bar{y}_\nu F_\nu$	$a_\nu = \bar{x}_\nu - \bar{x}_s$	$b_\nu = \bar{y}_\nu - \bar{y}_s$	a_ν^2	b_ν^2	$a_\nu b_\nu$
الواحدة	m	m	m^2	m^3	m^3	m	m	m^2	m^2	m^2
1										
2										
⋮										
ν										
⋮										
n										
Σ	·	·	F = ..	...	...	·	·	·	·	·

ν	$I_{\xi\xi\nu}$	$I_{\eta\eta\nu}$	$I_{\xi\eta\nu}$	$a_\nu^2 F_\nu$	$b_\nu^2 F_\nu$	$a_\nu b_\nu F_\nu$
الواحدة	m^4	m^4	m^4	m^4	m^4	m^4
1 2 ⋮ ν ⋮ n						
Σ	...	...	..	...	...	...

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \bar{x}_\nu F_\nu}{F} \quad , \quad y_s = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \bar{y}_\nu F_\nu}{F}$$

$$I_{xx} = \sum_{\nu=1}^{n} I_{\xi\xi\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2 F_\nu \quad , \quad I_{yy} = \sum_{\nu=1}^{n} I_{\eta\eta\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 F_\nu \quad ;$$

$$I_{xy} = \sum_{\nu=1}^{n} I_{\xi\eta\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu F_\nu$$

مثـال 20 :

المقطع العرضي الممثل في الشكل(30-1) .

المعطى : ابعاد المقطع العرضي .

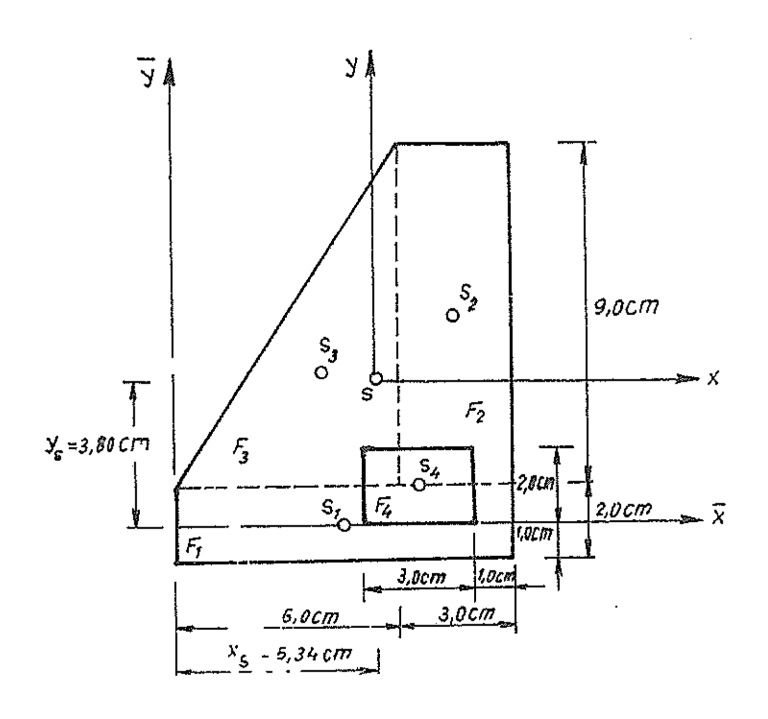
المطلوب : حساب عزوم الدرجة الثانية للسطح المذكور بالنسبة للمحاور المركزية x , y .

الحـل :

تبلغ عزوم الدرجة الثانية للسطوح الجزئية بالنسبة لمحاورها المركزية الذاتية :

$$I_{\xi\xi 1} = \frac{9{,}0 \cdot 2{,}0^3}{12} = 6{,}00 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{\xi\xi 2} = \frac{3{,}0 \cdot 9{,}0^3}{12} = 182{,}25 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta\eta 1} = \frac{2.0 \cdot 9{,}0^3}{12} = 121{,}50 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{\eta\eta 2} = \frac{9{,}0 \cdot 3{,}0^3}{12} = 20{,}25 \text{ cm}^4$$



شكل 1.30

$I_{\xi\eta 1} = 0$; $I_{\xi\eta 2} = 0$

$I_{\xi\xi 3} = \frac{6.0 \cdot 9,0^3}{36} = 121,50 \text{ cm}^4$; $I_{\xi\xi 4} = \frac{3,0 \cdot 2,0^3}{12} = 2,00 \text{cm}^4$

$I_{\eta\eta 3} = \frac{9,0 \cdot 6,0^3}{36} = 54,00 \text{ cm}^4$; $I_{\eta\eta 4} = \frac{2,0 \cdot 30^3}{12} = 4,50 \text{cm}^4$

$I_{\xi\eta 3} = \frac{9,0^2 \cdot 6,0^2}{72} = 40,50 \text{ cm}^4$; $I_{\xi\eta 4} = 0$

يمكن الحصول على عزوم الدرجة الثانية للسطح بالنسبة لمجموعة المحاور x , y بواسطة الجدول التالي :

ν	$\bar{x}_\nu$	$\bar{y}_\nu$	F_ν	$\bar{x}_\nu F_\nu$	$\bar{y}_\nu F_\nu$	$a_\nu = \bar{x}_\nu - \bar{x}_s$	$b_\nu = \bar{y}_\nu - \bar{y}_s$	a_ν^2	b_ν^2	$a_\nu b_\nu$
الواحدة	cm	cm	cm^2	cm^3	cm^3	cm	cm	cm^2	cm^2	cm^2
1	4,5	0,0	18,0	81,0	0,0	– 0,8409	–3,7955	0 7071	14,4058	3,1916
2	7,5	5,5	27,0	202,5	148,5	2,1591	1,7045	4,6617	2,9053	3,6802
3	4,0	4,0	27,0	108,0	108,0	– 1,3409	0,2045	1,7980	0,0418	– 0,2742
4	6,5	1,0	6,0	– 39,0	– 6,0	1,1591	– 2,7955	1,3435	7,8148	– 3,2403
Σ	.	.	66,0	352,5	250,5	.	.	.	.	.

ν	$I_{\zeta\zeta\nu}$	$I_{\eta\eta\nu}$	$I_{\xi\eta\nu}$	$a_\nu^2 F_\nu$	$b_\nu^2 F_\nu$	$a_\nu b_\nu F_\nu$
الواحدة	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4	cm^4
1	6,00	121,50	0,00	12,7278	259,3044	57,4488
2	182,25	20,25	0, 00	125,8659	78,4431	99,3654
3	121,50	54,00	– 40,50	48,5460	1,1286	7,4034
4	– 2,00	– 4,50	0,00	– 8,0610	– 46,8888	19,4418
Σ	307,75	191,25	– 40,50	179,0787	291,9875	168.8526

$$\bar{x}_s = \frac{352,5}{66,0} = 5,3409 \text{ cm} \quad ; \quad \bar{y}_s = \frac{250,5}{66,0} = 3,7955 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = 307,75 + 291,99 = 599,74 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = 191,25 + 179,08 = 370,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = -40,50 - 168,85 = -209,35 \text{ cm}^4$$

١ ـ ٢ ـ ٤ عزوم الدرجة الثانية في حالة دوران مجموعة المحاور الاحداثية في مستوي السطح

ستتم في هذه الفقرة ، دراسة التغير الذي يطرأ على عزوم الدرجة الثانية للسطح F عندما تدور مجموعة المحاور الاحداثية (مجموعة النسب) في مستوي السطح F . بتصور دوران مجموعة الاحداثيات x , y (التي هي مجموعة ما من المحاور الاحداثية الموجودة في السطح F) حول مبدأها بزاوية φ يتم الحصول على مجموعة جديدة من المحاور الاحداثية ξ , η تشترك مع المجموعة الاصلية في المبدأ (تقاس الزاوية φ حسب المفهوم الرياضي الموجب ، اي انها تعتبر موجبة عندما تبتدأ عند المحور x الموجب ثم تدور متجهة الى المحور y الموجب بأقرب طريق. فمثلا الزاوية φ الممثلة في الشكل (31-1) تعتبر موجبة عندما تدور بعكس عقارب الساعة) .

ان الهدف من هذه الفقرة هو التوصل الى امكانية تساعد على التحول من قيم معلومة لعزوم الدرجة الثانية للسطح F المنسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية x , y الى قيم مجهولة لعزوم الدرجة الثانية لنفس السطح F ولكن المنسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية الجديدة ξ , η .

او بتعبير مختصر :

المعطى : موضع مجموعة المحاور الاحداثية وعزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لها وهي I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} وكذلك موضع مجموعة المحاور الاحداثية ξ , η التي تشترك مع المجموعة x , y في المبدأ وتشكل معها الزاوية φ .

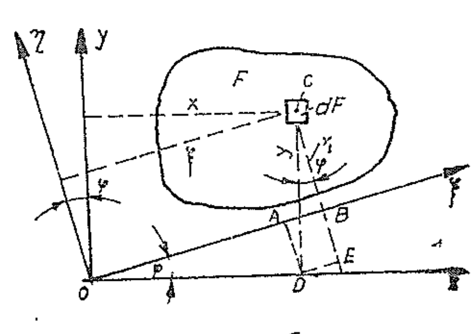
المطلوب : ايجاد عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور ξ , η بدلالة عزوم الدرجة الثانية لنفس السطح F بالنسبة لمجموعة المحاور x , y ودلالة الزاوية φ .

حسب التعريف فان عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية x , y هي :

$$I_{xx} = \int_F y^2 \, dF \quad ; \quad I_{yy} = \int_F x^2 \, dF \quad ; \quad I_{xy} = \int_F xy \, dF \qquad (1\text{-}33)$$

اما عزوم الدرجة الثانية لنفس السطح F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية ξ ، η فهي :

$$I_{\xi\xi} = \int_F \eta^2 \, dF \quad , \quad I_{\eta\eta} = \int_F \xi^2 \, dF \quad , \quad I_{\xi\eta} = \int_F \xi \, \eta \, dF \qquad (1\text{-}34)$$



شكل 1-31

من الشكل (1-31) يمكن التوصل الى علاقات تربط بين احداثيات مركز ثقل العنصر السطحي dF (والذي سيرمز له بالحرف c) في كلا المجموعتين :

$$\xi = \overline{OA} + \overline{AB} \qquad (1\text{-}35)$$

$$\eta = \overline{CE} - \overline{BE}$$

حيث ان :

$$\overline{OA} = \overline{OD} \cos \varphi = x \cos \varphi$$

$$\overline{AB} = \overline{DE} = y \sin \varphi$$

$$\overline{CE} = \overline{CD} \cos \varphi = y \cos \varphi$$

$$\overline{BE} = \overline{AD} = x \sin \varphi$$

بتبديل هذه القيم في العلاقة (1-35) يتم الحصول على معـادلات تحويل احداثيات النقطـة بالنسبة لمجموعتين من الاحداثيات تشترك في المبدأ وتدور احداهما حول الاخرى بزاويه φ :

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi \qquad (1\text{-}36)$$

$$\eta = - x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

بتبديل العلاقة (1-36) في العلاقة (1-34) يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$I_{\xi\xi}(\varphi)=\int_F \eta^2\, dF = \int_F (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2\, dF =$$

$$= \sin^2\varphi \int_F x^2\, dF - 2\sin\varphi\cos\varphi \int_F xy\, dF + \cos^2\varphi \int_F y^2 dF$$

$$I_{\eta\eta}(\varphi) = \int_F \xi^2\, dF = \int_F (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2\, dF =$$

$$= \cos^2\varphi \int_F x^2\, dF + 2\sin\varphi\cos\varphi \int_F x\, y\, dF + \sin^2\varphi \int_F y^2 dF \qquad (1\text{-}37)$$

$$I_{\xi\eta}(\varphi)=\int_F \xi\ \eta\ dF=\int_F (x\cos\varphi + y\sin\varphi)(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\, dF =$$

$$= \sin\varphi\cos\varphi \left(\int_F y^2\, dF - \int_F x^2\, dF\right) + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\int_F xy dF$$

بالاستعاضة عن التكاملات بقيمها وذلك حسب المعادلات (1-33) يتم الحصول ، بعد الترتيب ، على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned} I_{\xi\xi}(\varphi) &= I_{xx}\cos^2\varphi + I_{yy}\sin^2\varphi - 2\, I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \\ I_{\eta\eta}(\varphi) &= I_{xx}\sin^2\varphi + I_{yy}\cos^2\varphi + 2\, I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \\ I_{\xi\eta}(\varphi) &= (I_{xx}-I_{yy})\sin\varphi\cos\varphi + I_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{aligned} \qquad (1\text{-}38)$$

بالاستعانة بالعلاقات الهندسية المثلثية التالية :

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi) \quad ; \quad \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$$

$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi \quad ; \quad \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$$

وبتبديلها في العلاقات (1-38) يتم الحصول على معادلات التحويل التي يتم بفضلها الحصول على عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة الاحداثيات ξ , η المـــدورة بزاوية φ حول مجموعة الاحداثيات y , x التالية :

$$
\begin{aligned}
I_{\xi\xi}(\varphi) &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi \\
I_{\eta\eta}(\varphi) &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\varphi + I_{xy}\sin 2\varphi \\
I_{\xi\eta}(\varphi) &= \qquad\qquad + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi
\end{aligned}
\qquad (1\cdot39)
$$

بجمع العلاقتين (1-39 a,b) والمقارنة مع العلاقة (6 -1) يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$I_{\xi\xi}(\varphi) + I_{\eta\eta}(\varphi) = I_{xx} + I_{yy} = I_p \qquad (1\cdot40)$$

من هذه العلاقة يستنتج أن مجموع عزوم العطالة المحورية لايتأثر بدوران مجموعة المحاور الاحداثية بل يبقى ذاته دون تغير . فبدوران مجموعة الاحداثيات حول المبدأ بزاوية ما ولتكن φ يبقى مجموع عزوم عطالة سطح ثابتاً ويســـاوي عزم العطالة القطبي للسطح بالنسبة لمبدأ مجموعة المحاور الاحداثية .

باجراء العملية التالية :

$$I_{\xi\xi}(\varphi)\, I_{\eta\eta}(\varphi) - [I_{\xi\eta}(\varphi)]^2 \qquad (1\cdot41)$$

وذلك بعد الاستعانة بالعلاقة (1-38) يتم الحصول على العلاقة الآتية :

$$I_{\xi\xi}(\varphi)\, I_{\eta\eta}(\varphi) - I_{\xi\eta}^2(\varphi) = I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2$$

تصلح العلاقات (1,40) و (1,41) لكل الزوايا التي تدورها مجموعة المحاور الاحداثيـــة حول نقطة ثابتة وتسمى **لامتغيرات تنسور العطالة.**

١ ـ ٣ محاور العطالة الاساسية (الرئيسية) وعزوم العطالة بالنسبة لها

١ ـ ٣ ـ ١ الطريقة التحليلية لايجاد محاور العطالة الرئيسية وعزوم العطالة الرئيسية .

ان عزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية المدورة ξ , η التي تم حسابها في الفقرة الاخـــيرة ، هي توابع للقيم الثابتة I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} وكذلك لزاوية الدوران المتغيرة φ . إذاً تتغير عزوم الدرجة الثانية للسطوح بتغـــير الزاوية φ . وبذلك يطرح السؤال التالي نفسه :

ماهي الزاوية φ (وماهي الاوضاع التي تأخذها الاحداثيات ع و η) التي تأخذ عندها عزوم العطالة المحورية $I_{ξξ}$ و $I_{ηη}$ قيمة حدية .

باشتقاق التوابع $I_{ξξ}(φ)$ و $I_{ηη}(φ)$ بالنسبة للزاوية المتغيرة φ ثم جعلها مساوية للصفر ، يتم الحصول على المعادلات الشرطية اللازمة للحصول على القيم الحدية التالية :

$$\frac{dI_{ξξ}(φ)}{dφ} = 0 = -2\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2φ + I_{xy} \cos 2φ\right) = -2 I_{ξη}$$

(1-42)

$$\frac{dI_{ηη}(φ)}{dφ} = 0 = 2\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2φ + I_{xy} \cos 2φ\right) = +2 I_{ξη}$$

كلا العلاقتين تؤدي لنفس النتيجة وتتحقق من اجل الزاوية $φ = φ_0$ التي تحقق العلاقةالتالية :

$$\boxed{\operatorname{tg} 2φ_0 = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}} \qquad (1\text{-}33)$$

بتعيين الزاوية $φ_0$ يتحدد وضع مجموعة المحاور الاحداثية التي تأخـــذ عزوم العطالة المحورية بالنسبة لها قيمة حدية . من الآن فصاعد سوف يرمز لمجموعة المحاور الاحداثية هذه بـ 1 و 2 وتسمى **بمحاور العطالة الرئيسية** كما سيرمز لعزوم العطالة بالنسبة لها بـ I_{11} و I_{22}وتسمى **بعزوم العطالة الرئيسية** (وهي تمثل القيم الحدية لعزوم عطالة السطح F) .

اذا حققت الزاوية $φ_0$ العلاقة السابقة فان الزاوية $φ_0 + π/2$ تحققهـا أيضاً . هذا يعني ان تدوير المحور ع عن الوضع $φ_0$ ، الذي تظهر فيه القيمة الحدية الاولى ، بزاوية قائمـــة يؤدي لان تأخذ $I_{ξξ}$ قيمة حدية ثانية . بكلام آخر :

عندما تأخذ $I_{ξξ}$ قيمة حدية فان عزم العطالة $I_{ηη}$ يأخذ في نفس الوقت قيمة حدية أيضاً . أما الحلول الاخرى المعادلة (1-43) فلا تعطي شيئاً جديداًبل تؤدي للعودة الى المحاور ع , η. للتأكد فيما اذا كان لعزوم العطالة المحورية قيمة أعظمية وقيمة أصغرية يلجأ لدراسة مشتقاتهـا الثانية وهي التي تحدد ذلك :

$$\frac{d^2 I_{ξξ}(φ_0)}{dφ^2} = -2\left[(I_{xx} - I_{yy}) \cos 2φ_0 - 2 I_{xy} \sin 2φ_0\right]$$

(1-44)

$$\frac{d^2 I_{ηη}(φ_0)}{dφ^2} = 2\left[(I_{xx} - I_{yy}) \cos 2φ_0 - 2 I_{xy} \sin 2φ_0\right]$$

بالأستعانة بالعلاقات الرياضية التالية :

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2 2\varphi_0}} = \frac{\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}}{\pm\sqrt{\left(\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}} \tag{1-45}$$

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{tg\, 2\varphi_0}{\pm\sqrt{1+tg^2 2\varphi_0}} = \frac{-I_{xy}}{\pm\sqrt{\left(\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

يتم الحصول من العلاقات (1-44) على النتائج التالية :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 I_{\xi\xi}(\varphi_0)}{d\varphi^2} &= \pm 4\sqrt{\left(\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \\ \frac{d^2 I_{\eta\eta}(\varphi_0)}{d\varphi^2} &= \pm 4\sqrt{\left(\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-46}$$

لتحقيق العلاقة (1-43) ينبغي أخذ إحدى اشارات الجذر الموجودة في العلاقات (1-45) فقط . اذا لم يأخذ المشتق الثاني عند الزاوية φ_0 قيمة الصفر بذلك تكون لعـــزوم العطالة المحورية بالنسبة للمحاور 1 و 2 قيماً حدية فعلا .

عندما يفترض أن $I_{xx}=I_{yy}$ وأن $I_{xy}=0$ عندئـــذ ينعدم المشتق الثاني . وبذلك تعطي العلاقات (1-39) النتائج التالية :

$$I_{\xi\xi}(\varphi) = I_{\eta\eta}(\varphi) = I_{xx} = I_{yy} \quad ; \quad I_{\xi\eta}(\varphi) = I_{xy} = 0$$

ان استقلال عزوم عطالة السطوح عن دوران مجموعة النسب يتحقق ، على سبيـــل المثال في الدائرة او المربع وذلك عندما ينطبق مبدأ الاحداثيات في مركز ثقل السطح .

من المعادلات (1-46) يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\frac{d^2 I_{\xi\xi}(\varphi_0)}{2} = -\frac{d^2 I_{\eta\eta}(\varphi_0)}{d\varphi^2} \tag{1-47}$$

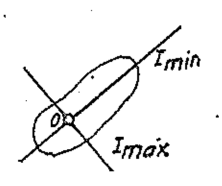
اذا كان عزم العطالة المحوري I_{11} اعظمياً فان عـزم العطالة I_{22} يكون اصغرياً والعكس صحيح . بتبديل $\varphi = \varphi_0$ في العلاقة (1-39) يتم الحصـول على عزم عطالة سـطح بالنسبة لمجموعة المحاور الرئيسية 1 و 2 وذلك بعد اعتبار العلاقة (1-36) فيها . فاذا اختـيرت فيهـا الاشارة العليا عندئذ ينتج كقيمة اعظمية :

$$I_{11} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \max I \qquad (1\text{-}48a)$$

وكقيمة اصغرية :

$$I_{22} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \min I \qquad (1\text{-}48b)$$

لهذه العلاقات ، اثناء التطبيـق ، سيئة واحدة وهي عـدم التمكن من معرفة اي العزمـين الرئيسين يتبـع الزاوية φ_0 وأيهما يتتبـع الزاوية $\varphi_0 + \pi/2$. لكن في الحيـاة العملية ينـدر ان لا يفرق بين المحور الذي يؤدي للعزم الرئيسي الاعظمي وبين المحور الذي يؤدي للعزم الرئيسي الاصغري ، فالمحاور الرئيسيـة تتبـع دائماً بشـكل تقريبي امتـــداد السطح ، فعزم العطالة الرئيسي الاعظمي ينسب الى المحـــور الذي يتعامد مع أطول محور يمتد في السطح (الشكل 1-32) .



شكل 1-32

بتبديل $\varphi = \varphi_0$ في العلاقات (1-39) يتم الحصول على عزوم العطالة الرئيسية ممثـلة بالشـكل الجديد التالي :

$$\left.\begin{aligned} I_{11} &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\varphi_0 - I_{xy}\sin 2\varphi_0 \\ I_{22} &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\varphi_0 + I_{xy}\cos 2\varphi_0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}50)$$

$$I_{12} = 0$$

في هذه العلاقات تعوض اصغر قيمة مطلقة للزاوية φ_0 التي يتم الحصول عليها من العلاقة(1-43) اي تؤخذ ، في حالة كون $tg\,2\varphi_0 > 0$ ، الزاوية الواقعة في الربع الاول وتؤخذ ، عندما تكون $tg\,2\varphi_0 < 0$ ، الزاوية الواقعة في الربع الرابع .

تشير المعادلات (1-42) الى انعدام جداء العطالة بالنسبة لمحاور العطالة الرئيسية (المحاور الرئيسية) . مما ذكر كله يمكن الان تعريف **المحاور الرئيسية** (للعطالة) بانها المحاور التي تأخذ عزوم العطالة المحوريه بالنسبة لها قيماً حدية وهي المحاور التي ينعدم ايضاً جداء العطالة بالنسبة لها .

في حالة مرور محاور العطالة الرئيسية من مركز ثقل السطح عندئذ تسمى **بالمحاور الرئيسية المركزية** ، لكن في اغلب الاحيان ، وحيث ان هذه المحاور هي اكثر المحاور استعمالا تختصر تسميتها في بعض المراجع وفي الفصول التالية من هذا الكتاب ليطلق عليها اسم محاور العطالة الرئيسية (المقصود من ذلك هو المحاور الرئيسية المركزية للعطالة) . بشكل مختصر يمكن التأكيد على بعض الصفات الهامة التالية :

من بين كافة المحاور المارة من نقطة ما يوجد هناك دائماً محوران متعامدان تأخذ عزوم العطالة بالنسبة لها قيمة اعظمية وقيمة اصغرية. تسمى هذه المحاور بمحاور العطالة الرئيسية ويرمز لها بـ 1 و 2 اما عزوم العطالة بالنسبة لها فتسمى بعزوم العطالة الرئيسية ويرمز لها بـ I_{11} , I_{22} أما جداء العطالة فينعدم بالنسبة لها .

عندما يكون أحد محاور النسب أو كلاهما محوراً لتناظر السطح عندئذ ينعدم جداء العطالةوبذلك فان محاور التناظر هي دائماً محاور رئيسية للعطالة .

تعين عزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة للمحاور ξ و η بالاستعانة بعزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة للمحاور x , y والزاوية φ حسب العلاقة (1-39) ، حيث ان x , y هي مجموعة ما من المحاور الاحداثية التي تدور مجموعة المحاور الاحداثية η , ξ حولها بالزاوية φ .

في حالة انطباق مجموعة المحاور x , y على المحاور الرئيسية 1 و 2 عندئذ تصبح عزوم الدرجة الثانية للسطح بالشكل التالي :

$$I_{xx} \longrightarrow I_{11} \quad ; \quad I_{yy} \longrightarrow I_{22} \quad ; \quad I_{xy} \longrightarrow 0$$

بتبديل هذه القيم في العلاقات (1-38) و (1-39) يتم الحصول العلاقات التي تربط بين عزوم الدرجة الثانية للسطح بالنسبه لمجوعة المحاور ع ، η بدلالتها بالنسبة للمحاور الرئيسية (بدلالة I_{11} ، I_{22}) (تشترك كلا المجموعتين بالمركز وتدور الاولى حول الاخرى بزاوية φ)التالية :

$$I_{\xi\xi} = I_{11}\cos^2\varphi + I_{22}\sin^2\varphi = \frac{I_{11}+I_{22}}{2} + \frac{I_{11}-I_{22}}{2}\cos 2\varphi$$

$$I_{\eta\eta} = I_{11}\sin^2\varphi + I_{22}\cos^2\varphi = \frac{I_{11}+I_{22}}{2} - \frac{I_{11}-I_{22}}{2}\cos 2\varphi$$

$$I_{\xi\eta} = (I_{11}-I_{22})\sin\varphi\cos\varphi = \frac{I_{11}-I_{22}}{2}\sin 2\varphi$$

(1-51)

بنفس الطريقة التي حددت فيها المحاور الرئيسية للعطالة يحدد وضع المحاور التي يأخذ جداء العطالة بالنسبة لها قيمة حدية ، فمن الشرط :

$$\frac{d I_{\xi\eta}}{d\varphi} = 0$$

وبتسمية هذه الزاوية بـ φ_1 ينتج :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2 I_{xy}} = -\operatorname{ctg} 2\varphi_0$$

من هذه العلاقة ينتج ان :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 \cdot \operatorname{tg} 2\varphi_0 = -1$$

وهذا يعني ان :

$$\varphi_1 = \varphi_0 \pm \frac{\pi}{4}$$

وبذلك فان محاور جداء العطالة الحدية تنصف الزاوية القائمة بين محاور العطالة الرئيسية 1 و 2 .

١ ـ ٣ ـ ٢ أمثلة :

مثال 21 :

المقطع العرضي الممثل في الشكل (1-33) .

المعطى : ابعاد المقطع العرضي .

المطلوب : حساب عزوم العطالة الرئيسية المركزية وموضع محاور العطالة الرئيسية .

الحل :

بالاستعانة بقيم عزوم العطالة التي تم الحصول عليها في المثال 19 :

$$I_{xx} = 599{,}74 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{yy} = 370{;}33 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{xy} = \pm 209\ 35 \text{ cm}^4$$

وبالقيم التالية :

$$\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = 485{,}03 \text{ cm}^4 \quad , \quad \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} = 114{,}70 \text{ cm}^4$$

يتم الحصول من العلاقات (48-1) على عزوم العطالة الرئيسية :

$$I_{11} = 485{,}03 + \sqrt{114{,}70^2 + (209{,}35)^2} = 723{,}75 \text{ cm}^4$$

$$I_{22} = 485{,}03 - \sqrt{114{,}70^2 + (209{,}35)^2} = 246{,}32 \text{ cm}^4$$

أما موضع المحاور الرئيسية فيتعين بواسطة العلاقة (43-1) :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{2 \cdot 209{,}35}{370{,}33 - 599{,}74} = -1{,}8251$$

$$2\varphi_0 = 61^\circ\ 18' \quad ; \quad \varphi_0 = 30^\circ\ 39'$$

لقد تم في الشكل (33-1) تمثيل المحاور الرئيسية .

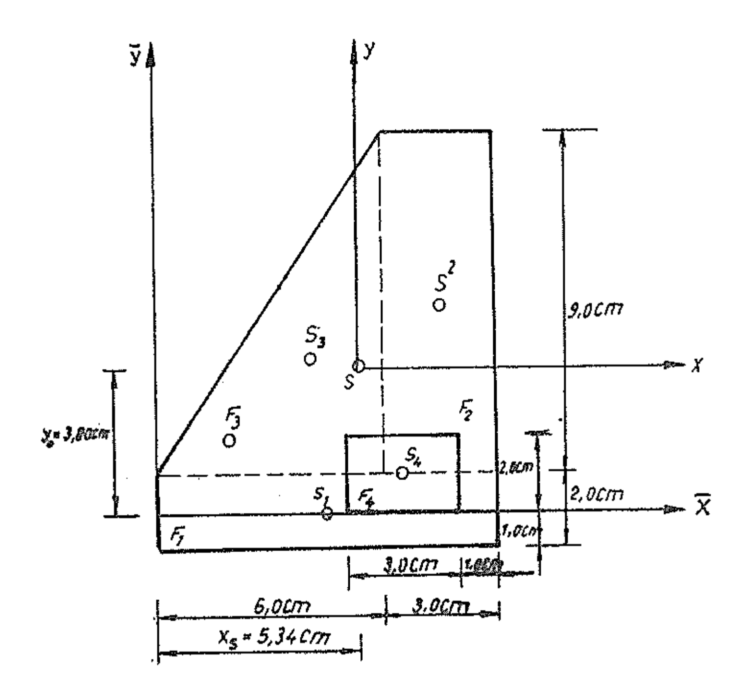
مثال 22 :

السطح F الممثل في الشكل (34-1) .

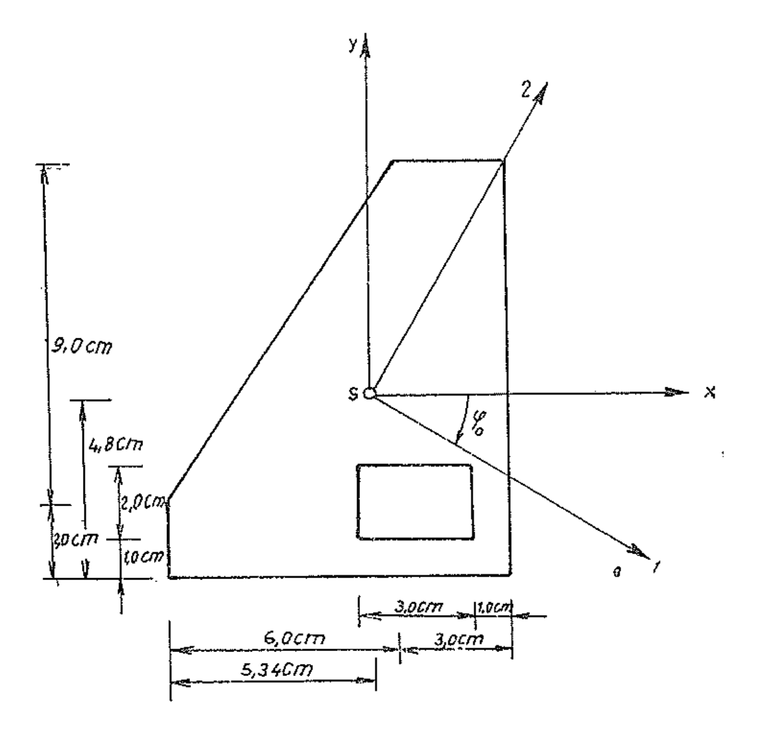
المعطى : عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور x , y :

$$I_{xx} = 120 \text{ cm}^4 \quad , \quad I_{yy} \quad 55 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{xy} = -30 \text{ cm}^4 \quad , \quad \varphi = 30^\circ$$

المطلوب : تحويل عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور ξ , η التي تدور حول المجموعة x , y بالزاوية $\varphi = 30^\circ$ (شكل 34-1) .



شكل 1-33



شكل 1-34

الحـــل :

بالاستعانة بالعلاقات المثلثية:

$$\sin(-60°) = -\sin 60°$$

$$\cos(-60°) = +\cos 60°$$

وبتبديل القيم المعطاة في العلاقة (1.39) ينتج :

$$I_{\xi\xi} = \frac{120+55}{2} + \frac{120-55}{2}\cos(-60°) - (-30)\sin(-60°)$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{120+55}{2} - \frac{120-55}{2}\cos(-60°) + (-30)\sin(-60°)$$

$$I_{\xi\eta} = \quad + \frac{120-55}{2}\sin(-60°) + (-30)\cos(-60°)$$

بالحل ينتج :

$$I_{\xi\xi} = 77{,}7\ cm^4 \quad ; \quad I_{\eta\eta} = 97{,}3\ cm^4 \quad ; \quad I_{\xi\eta} = 43{,}2\ cm^4$$

١ ـ ٣ ـ ٣ الطريقة التخطيطية لتعيين محاور العطالة الرئيسية وعزوم العطالةالرئيسية

اذا علمت عزوم الدرجة الثانية I_{xy} , I_{yy} , I_{xx} لسطح ما بالنسبة للمحورين المتعامدينx , y فبالامكان الانطلاق من المعادلات (1-45) او (1-43) للحصول على محوري العطالة الرئيسين وكذلك بالامكان الانطلاق من المعادلات (1-50) وتعيين العزمين الرئيسيين للعطالة (عزوم العطالة بالنسبة للمحورين الرئيسيين) . ومن الممكن أيضاً ايجاد هذين المحورينوقيمة كل من العزمين الرئيسيين باستعمال الطريقة التخطيطية بتحقيق تلك المعادلات . حيث يوجد في متناول اليد لهذه الغاية طريقان تخطيطيان :

I ـ دائرة عطالة مور

يمكن إعطاء علاقات التحويل (1.39) (علاقات ايجاد عزوم الدرجة الثانيــة للسطح بالنسبة لمجموعة المحاور المدورة ξ , η) :

$$I_{\xi\xi} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{\xi\eta} = \qquad + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi$$

بواسطة الطريقة العائدة للعالم مور (Otto MOHR) والمساة بدائرة عطالة مور معناً هندسياً .
من المعادلات الثلاثة السابقة يمكن استخراج العلاقات التالية :

$$\left(I_{\xi\xi} - \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2}\right)^2 = \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi\right)^2$$

$$\left(I_{\eta\eta} - \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi\right)^2$$

$$I_{\xi\eta}{}^2 = \left(+\frac{I_{xy} - I_{yy}}{2} \sin 2\varphi - I_{xy} \cos 2\varphi\right)^2$$

بجمع كل من العلاقتين الاولى والثانية مع العلاقة الثالثة يمكن اختزال الزاوية φ والحصـول على العلاقات التالية :

$$\left(I_{\xi\xi} - \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{\xi\eta}{}^2 = \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2$$

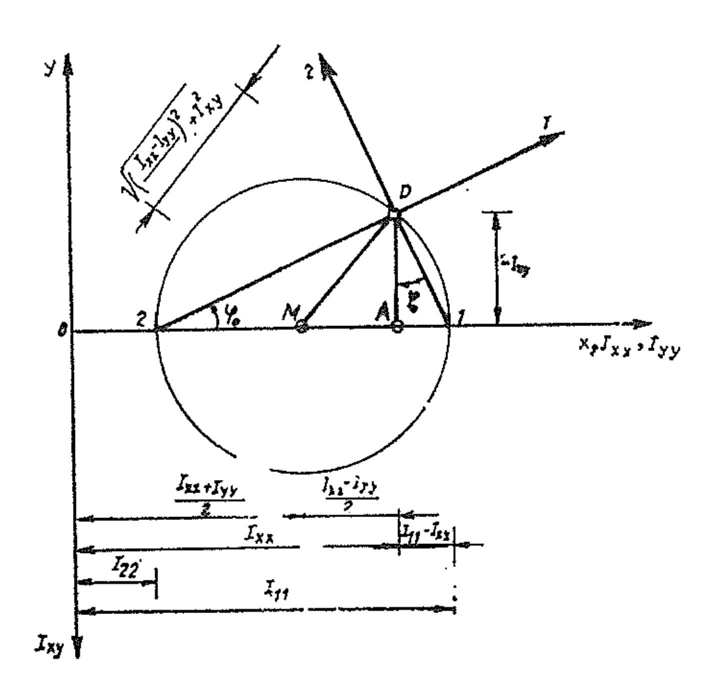
$$\left(I_{\eta\eta} - \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{\xi\eta}{}^3 = \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2$$

بتمثيل القيم الثابتة I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} والقيم المتغيرة $I_{\xi\eta}$ كفصل (احداثي افقي) وتمثيـل القيمة $I_{\xi\eta}$ كترتيب (احداثي شاقولي) (شكل 35-1) فان تلك المعادلات تمثـل معادلتي دائرتين تشترك مع بعضها بالمركز

$$\left(\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} , 0\right)$$

كما تشترك بنصف القطر

$$\sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^3 + I_{xy}{}^2}$$



شكل 1.35

برسم القيمة $\frac{I_{xx}+I_{yy}}{2}$ يتحدد مركز الدائرة M وباضافة القيمة $\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}$ يثبت موضع النقطة A . يحدد العمود ، الذي يبلغ طوله I_{xy} ، المقام من النقطة A مكان النقطة D وذلك بحيث تمثل المسافة MD نصف قطر الدائرة .

إن قيمة الاحداثي الافقي OA هي I_{xx} . تحدد نقاط تقاطع الدائرة مع الفصل (الاحداثي الافقي)، أي النقاط 1 و 2 ، عزوم المطالة الرئيسية :

$$I_{11} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{22} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

بواسطة المستقيمات D 2 و D 1 تتعين محاور المطالة الرئيسية 1 و 2 . فمن المثلث AD 1 يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = - \frac{I_{11} - I_{xx}}{I_{xy}}$$

يمكن الحصول على نفس العلاقة بتبديل المعادلة (1-45) في العلاقة الرياضية :

$$tg\,\varphi_0 = \frac{1-\cos 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0}$$

اذاً يمكن الاستعانة بدائرة عطالة مور للحصول على المحاور الرئيسية 1 و 2 وكذلك على عزوم العطالة الرئيسية وذلك عندما تكون عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة للمحاور x و y معلومة (I_{xy} , I_{yy} , I_{xx}) .

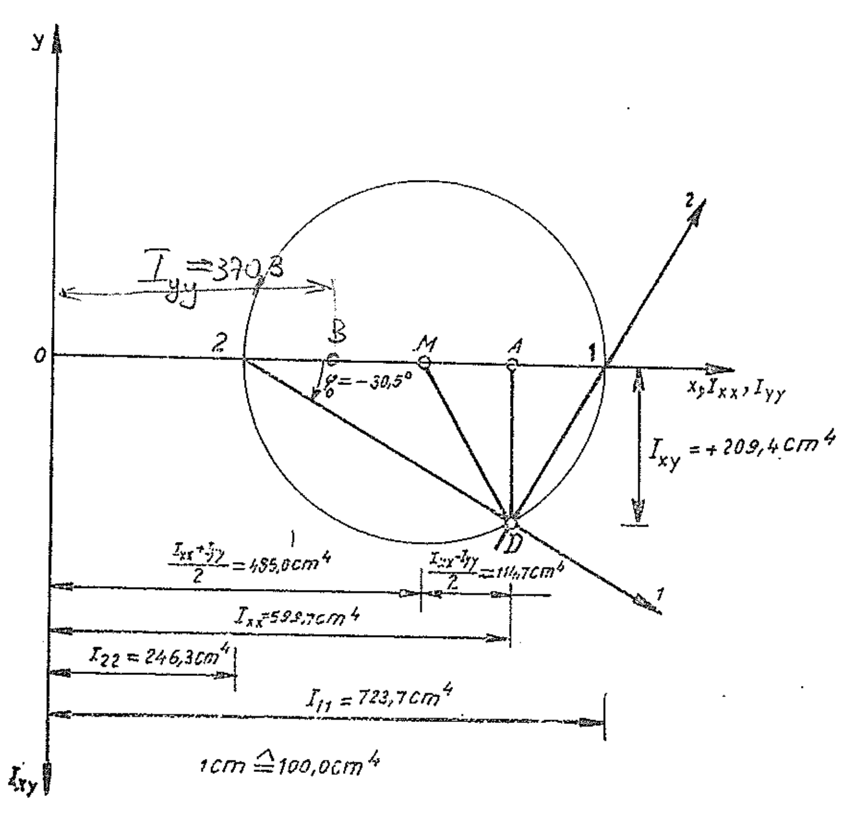
مثال 23 :

المعطى: $I_{xx}=599{,}7\ cm^4$, $I_{yy} = 370{,}3\ cm^4$, $I_{xy} = \mp 209{,}4\ cm^4$ (شكل 1-36) .

المطلوب : تعيين المحاور الرئيسية وعزوم العطالة بالنسبة لها .

الحل :

باستخدام طريقة دائرة عطالة مور (شكل 1-35) يتم الحصول على القيم المطلوبة التالية :



شكل 1-36

$I_{11} = 723{,}7\ cm^4$; $I_{22} = 246.3\ cm^4$; $\varphi_0 = -\ 30{,}5^\circ$

تلخيص طريقة انشاء دائرة عطالة مور :

آ - ايجاد عزوم العطالة الرئيسية بالاستعانة بعزوم الدرجة الثانية بالنسبة المحاور x و y المعلومة:

المعطى : I_{xy}, I_{yy}, I_{xx} .

المطلوب : $\varphi_0, I_{22}, I_{11}$.

١ - بعد اختيار مقياس رسم مناسب ، يرسم خط نسب أفقي ويؤخذ عليه ابتداء من النقطة O البعدين :

$$\overline{OA} = I_{xx} \quad , \quad \overline{OB} = I_{yy}$$

٢ - تنصف المسافة $\overline{AB}$ فيتم الحصول على النقطة M ، فيكون :

$$\overline{OM} = 0{,}5\ (I_{xx} + I_{yy})$$

$$\overline{MA} = 0{,}5\ (I_{xx} - I_{yy})$$

٣ - يرسم الخط $\overline{AD}$ عمودياً على خط النسب (خط القاعدة) وتحدد عليه النقطة D بحيث يكون :

$$\overline{AD} = I_{xy}$$

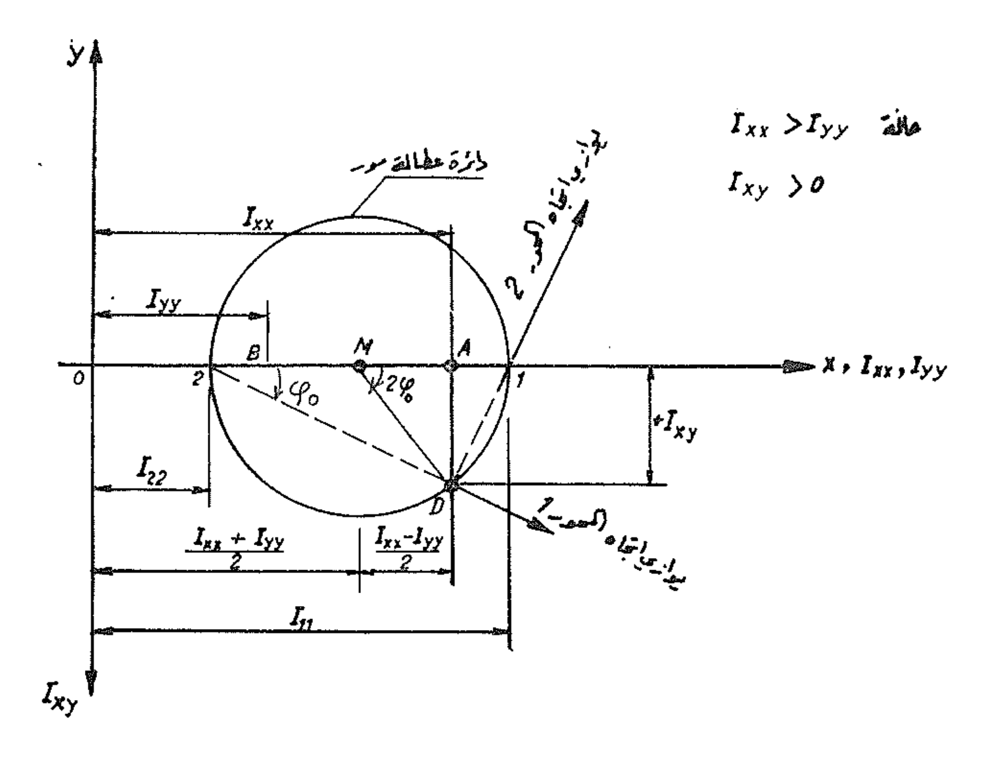
في الحالة التي يكون فيها $I_{xy} > 0$ تؤخذ D أسفل A في الاتجاه السالب للاحداثي y (شكل 1-37) .

٤ - بوصل D مع M ينتج :

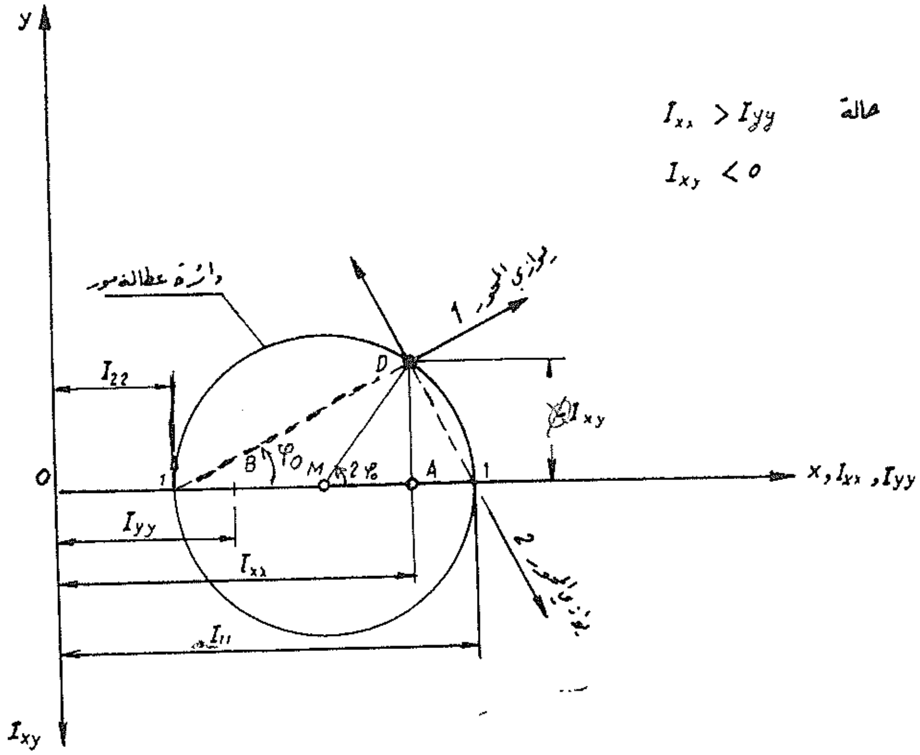
$$\overline{DM} = \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$$

بعد ذلك ترسم دائرة مركزها M ونصف قطرها $\overline{DM}$ لتقابل (لتقطع) خط النسب الافقي في نقطتين 1 و 2 . تسمى هذه الدائره بدائرة عطالة مور . ويلاحظ أن :

$$\overline{O1} = 0{,}5\ (I_{xx} + I_{yy}) + \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = I_{22}$$



حالة $I_{xx} > I_{yy}$
$I_{xy} > 0$
دائرة عطالة مور
y
x , I_{xx} , I_{yy}
I_{xy}
I_{xx}
I_{yy}
I_{22}
I_{11}
$+I_{xy}$
$\frac{I_{xx}+I_{yy}}{2}$
$\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}$
O
B
M
A
D
1
2
φ_0
$2\varphi_0$

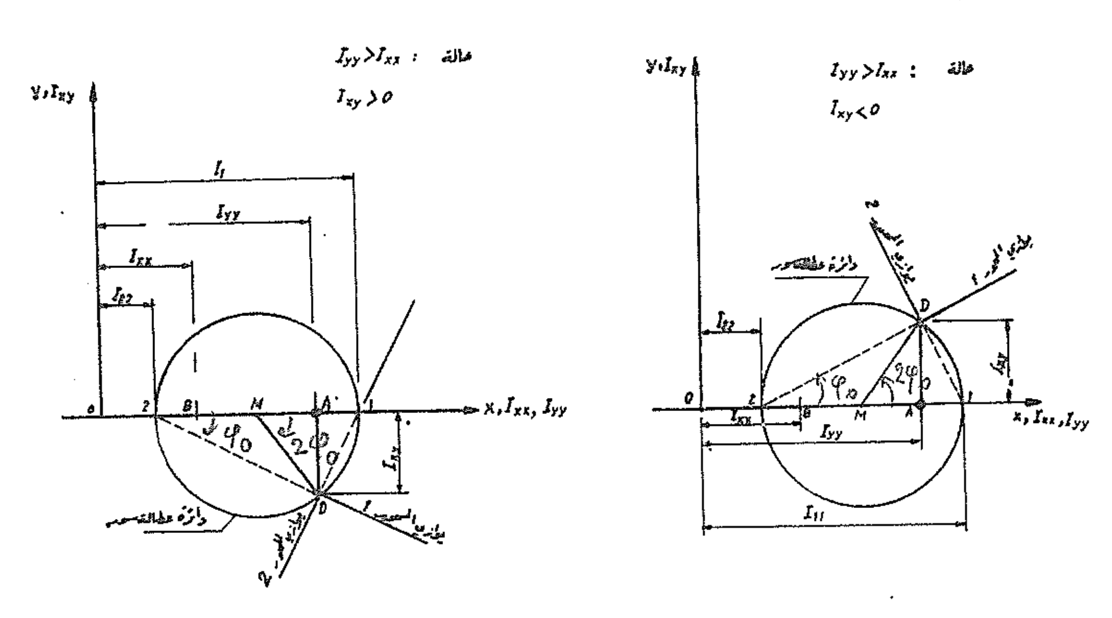


حالة $I_{xx} > I_{yy}$
$I_{xy} < 0$
دائرة عطالة مور
y
x , I_{xx} , I_{yy}
I_{xy}
I_{xx}
I_{yy}
I_{22}
I_{11}
O
B
M
A
D
1
φ_0
$2\varphi_0$

شكل 1-37

$$\overline{O2} = 0,5\,(I_{xx} + I_{yy}) + \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = I_{22}$$

كما أن ميل المستقيم $\overline{2D}$ يساوي ميل المحور الأساسي 1 (المستقيم $\overline{1D}$) نظراً لان الزاوية بين خط السبب والمستقيم $\overline{MD}$ تساوي $2\varphi_0$. وبذلك يتحدد وضع المحورين الرئيسيين وقيمة عزمي العطالة بالنسبة لهما .



شكل 1-38

حالة خاصة :

عندما تكون $I_{xx} = I_{yy}$ فان دائرة عطالة مور تتحول الى نقطة لأن M , B , A تنطبق في نقطة واحدة . وفي هذه الحالة يتضح أن :

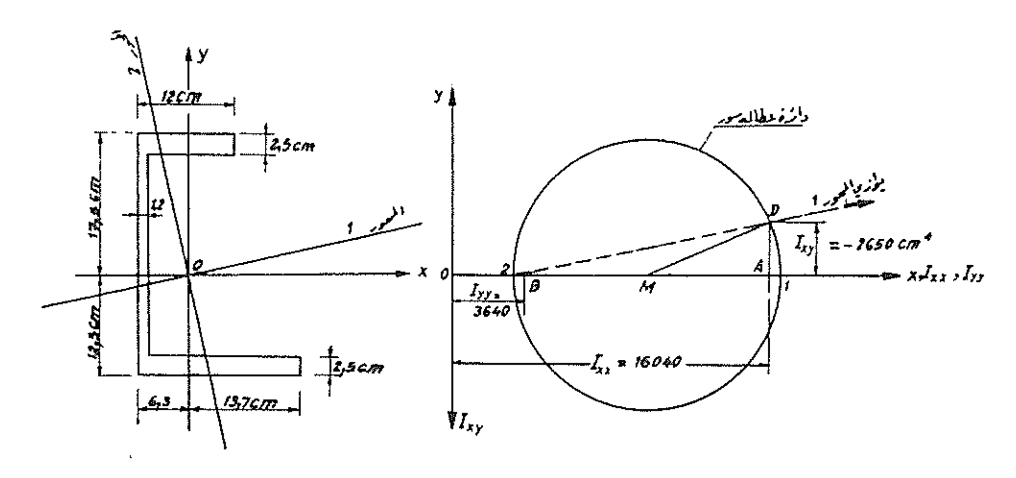
١ ـ ينصف المحوران الرئيسيان الزاوية بين المحورين x و y لأن $2\varphi_0 = \pi/2$.

٢ ـ تكون قيمة كل من العزمين الرئيسين للعطالة كما يلي :

$$I_{11} = I_{xx} + I_{xy}$$
$$I_{22} = I_{xx} - I_{xy}$$

مثال 24 :

المطلوب : تحديد المحورين الرئيسين وعزم العطالة بالنسبة لهما وذلك للمقطع العرضي المبين في الشكل (1-39) .



شكل 1-39

الحـل :

$I_{xx} = 16040 \ cm^2 \quad I_{yy} = 3640 \ cm^4 \quad I_{xy} = -2650 \ cm^4$

يظهر حل هذا المثال تخطيطياً في الشكل (1-39) .

النتيجة : من الشكل (1-39) تقرأ القيم التالية :

$$I_{11} = 16680 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{22} = 3700 \text{ cm}^4$$

ب ـ إيجاد عزوم العطالة بالنسبة لمحاور ما بالاستعانة بعزوم العطالة الرئيسية المعلومة :

المعطى : I_{11} , I_{22} , φ (أي وضع المحورين x و y) .

المطلوب : I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} .

تحليلياً يمكن استخدام العلاقات (1-51) للحصول على المطلوب . أما تخطيطياً فبالامكان الاستفادة من دائرة عطالة مور كما يظهر الشكل (1-40) هكذا :

١ ـ يرسم خط نسب يوازي المحور الرئيسي 1 وتؤخذ (وترسم) عليه الابعاد التالية :

$$\overline{O2} = I_{22}$$

$$\overline{O1} = I_{11}$$

٢ ـ تنصف المسافة $\overline{21}$ فيتم الحصول على النقطة M . بعد ذلك ترسم دائرة عطالة مور ، مركزها ينطبق على النقطة M وتمر بالنقطتين 1 و 2 .

٣ ـ من النقطة 2 يرسم خطاً مستقيماً يوازي المحور x الذي يراد ايجاد عـزم العطالة بالنسبة

له ، فيقابل (فيــــقطع) دائرة عطالة مور في نقطة أخرى هي D والتي احداثياتهــا هي $(I_{xx}, -I_{xy})$.

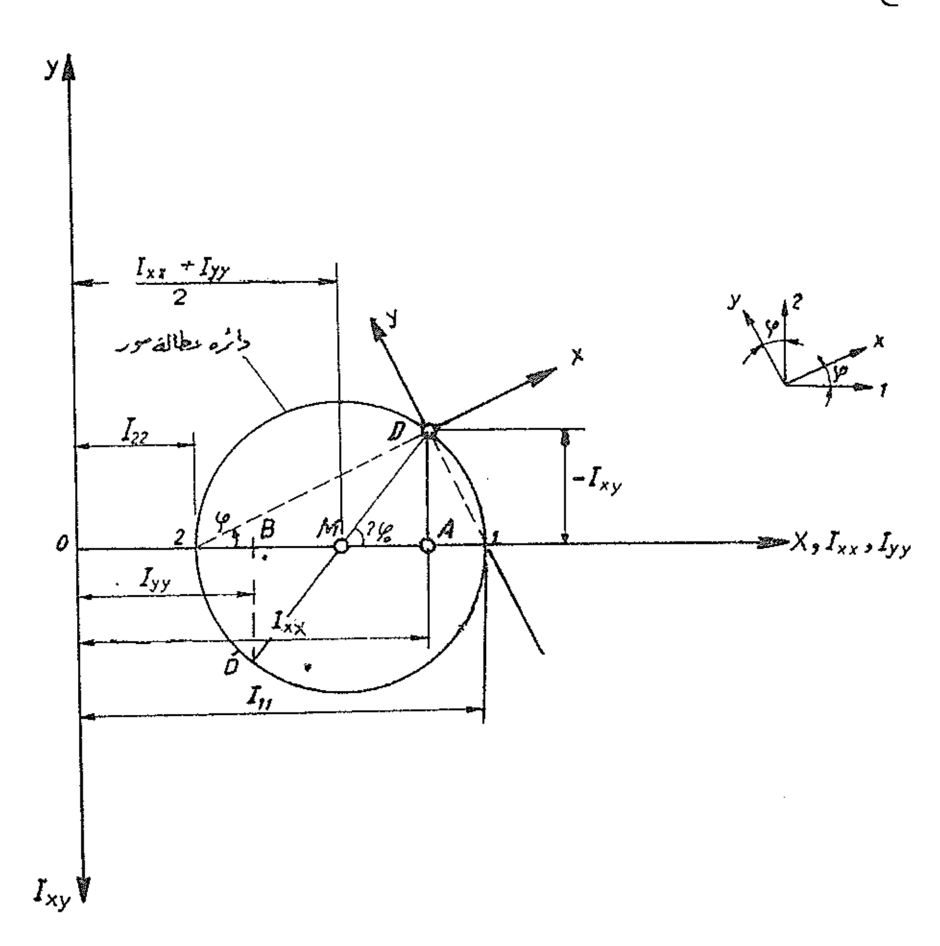
٤ ـ يسقط من D عموداً (الخط المستقيم $\overline{DA}$) على خط النسب (خط القاعدة) فيـقطعه في A فيكون :

$$\overline{OA} = I_{xx}$$

$$\overline{DA} = -I_{xy}$$

وتكون I_{xy} موجبة مادامت النقطة D ناتجة عن الزاوية φ الموجبــــة (أي في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة) وأقل من 90 درجة (في الشكل 1-40 تظهر I_{xy} سالبة) .

(في الواقع إن اشارة I_{xy} تتوقف على الاتجاه الموجب المفروض لكل من المحورين x و y).



شكل 1.40

٥ ـ توصل النقطة D مع مركز الدائرة M بخط مستقيم فيقطعها في نقطة ثانية هي D′ والتي احداثياتها هي (I_{yy} , I_{xy}) .

٦ ـ يسقط من D′ عموداً على خط النسب (المحور x) فيقطعه في النقطة B فيكون :

$$\overline{OB} = I_{yy}$$

$$\overline{D'B} = I_{xy}$$

بنفس الخطوات يتم تعيين القيم $I_{\xi\xi}$, $I_{\eta\eta}$, $I_{\xi\eta}$ المجهولة بالاستعانة بالقيم I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} . المعلومـة .

II ـ دائرة عطالة مور ـ لاند

آ ـ إيجاد عزوم العطالة الرئيسية I_{11} , I_{22} بالاستعانة بعزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_{xy}.

عندما تكون عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy}, I_{xy} للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور x و y معلومة عندئذ يستطاع ايجاد موضع محاور العطالة الرئيسية 1 و 2 وكذلك عزوم العطالة الرئيسية I_{11} , I_{22} ، بطريق تخطيطي يسمى **بدائرة عطالة مور ـ لاند** وهو كالتالي :

١ ـ في البداية يختار مقياس مناسب لتمثيل القيم I_{xx} , I_{yy} , I_{xy}.

٢ ـ تحمل المسافة $I_{xx}+I_{yy}$ (والتي تسمى باللامتغير الاول لتنسور العطالة) بفتحة المدور .

٣ ـ تثبت نهاية المدور المدببة في نقطة ما من المحور x (النقطة A) وتدور النهاية الثانية الى ان تقطع الاحداثي y (النقطة B) .

٤ ـ تحمل على المستقيم AB القيمة $\overline{AC} = I_{xx}$ ، أما المسافة المتبقية من المستقيم المذكور فتساوي $\overline{BC} = I_{yy}$.

٥ ـ يقام من النقطة C عموداً على المستقيم $\overline{AB}$.

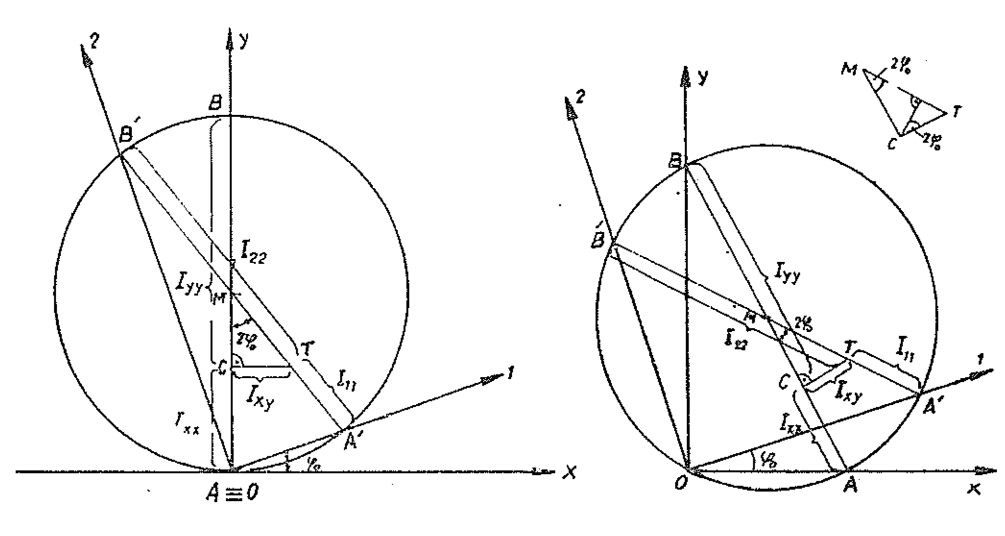
٦ ـ تحمل على العمود المذكور قيمة I_{xy} . اذا كانت $I_{xy} > 0$ فانها ترسم بالاتجـاه الموجب للاحداثي x (هنا نحو اليمين) أما اذا كانت قيمتها سالبة فانها ترسم بالاتجاه المعاكس لاتجاه x الموجب (هنا نحو اليسار) . بهذا يتم الحصول على نقطة العطالة T (لقد افترض في الشكل (1.41) ان $I_{xy} > 0$ ولذلك فقد رسمت نحو اليمين) .

٧ ـ تنصف المسافة $\overline{AB}$ (في النقطة M) . ثم ترسم دائرة العطالة التي يبلغ نصف قطرها

$(I_{xx} + I_{yy})$ 1/2. والتي ينطبق مركزها على النقطة M فتقطع مجموعة المحاور الاحداثية x و y في النقاط A و B وتمر من مبدأ الاحداثيات O .

٨ ـ يوصل بين النقاط T و M بخط مستقيم فيـــقطع دائرة المطالة في نقطتين (النقطة A′ والنقطة B′) .

٩ ـ توصل نقطة مبدأ الاحداثيات O مع النقطة A′ ومع النقطة B′ فيتم الحصول على $\overline{OA'}$ و $\overline{OB'}$. هذان المستقيمان المتعامدان هما محاور المطالة الرئيسية 1 و 2 كما تمثل $I_{11} = \overline{A'T}$ و $I_{22} = \overline{B'T}$ عزوم المطالة الرئيسية .



شكل 1-41

البرهــان :

آ ـ للبرهان على صحة كون $\overline{OA'}$ و $\overline{OB'}$ محاور عطالة رئيسية يلجأ للـبرهان على تحقيــق الزاوية φ_0 المرسومة في الشكل(41-١) للمعادلة (1-43) .

ان φ_0 هي زاوية محيطية لدائرة العطالة وقوسها هو AA′ . أما الزاوية المركزية عنــد النقطة M والتابعـــة لهـا فتساوي عندئذ $2\varphi_0$. من المثلث MCT (القـائم) تنـتج العلاقة التـالية :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{\overline{CT}}{\overline{MC}}$$

حيث أن

$$\overline{CT} = I_{xy}$$

$$\overline{MC} = \overline{MA} - \overline{AC} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) - I_{xx} = \frac{1}{2}(I_{yy} - I_{xx})$$

بتبديل هذه العلاقات في العلاقة الاخيرة ينتج :

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_0 = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}$$

وبهذه العلاقة ينتهي البرهان على ماهو مطلوب .

ب ـ البرهان على صحة كون $\overline{A'T} = I_{11}$ و $\overline{B'T} = I_{22}$ ، يصار الى تحقيق المسافات المذكورة للعلاقة (1-50) .

ان قطر الدائرة هو $\overline{A'B'} = \overline{A'T} + \overline{B'T}$ وهو يساوي في نفس الوقت $I_{xx} + I_{yy}$.

اذاً نصف قطر الدائرة يساوي :

$$\frac{\overline{A'T} + \overline{B'T}}{2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \qquad (1.52)$$

باعتبار المثلث MCT المقتطع من الدائرة والمكبر والممثل في الشكل (1-41 c) يتم التوصل الى ما يلي :

$$\overline{MT} = \overline{MC} \cos 2 \varphi_0 + \overline{CT} \sin 2 \varphi_0 \qquad (1.53)$$

لكن :

$$\overline{MT} = \overline{MA'} - \overline{A'T} = \frac{1}{2}(\overline{A'T} + \overline{B'T}) - \overline{A'T} = \frac{1}{2}(-\overline{A'T} + \overline{B'T})$$

$$\overline{MC} = - \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy}) \quad ; \quad \overline{CT} = I_{xy}$$

بالتبديل في العلاقة (1-53) ينتج :

$$\frac{- \overline{A'T} + \overline{B'T}}{2} = - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2 \varphi_0 + I_{xy} \sin 2 \varphi_0 \qquad (1.54)$$

بطرح المعادلة (1-54) من المعادلة (1-52) ينتج :

$$\overline{A'T} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi_0 - I_{xy} \sin 2\varphi_0$$

بمقارنة هـــذه العلاقة مع المعادلة (1-50) يؤكد انها تساوي I_{11} . وبجمع المعادلتين (1-54) و (1-52) يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\overline{B'T} = I_{22}$$

وبذلك ينتهي البرهان على ماهو مطلوب .

ب ـ ايجاد عزوم الدرجة الثانية $I_{\xi\xi}$, $I_{\eta\eta}$, $I_{\xi\eta}$ بالاستعانة بعزوم الدرجة الثانيـــة I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} .

يمكن استخدام دائرة عطالة مور ـ لاند لايجاد عزوم الدرجة الثانية $I_{\xi\xi}$, $I_{\eta\eta}$, $I_{\xi\eta}$ للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور المتعامدة ξ و η التي تشكل مع المحاور x و y زاوية ما هي φ (شكل 1-42) وذلك باتباع الخطوات التالية :

١ ـ بواسطة عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} المعلومة ترسم دائرة عطالة مور ـ لاند ونقطة العطالة T بنفس الطريقة السابقة .

٢ ـ تقطع المحاور ξ و η (المطلوب حساب الدرجة الثانية بالنسبة لها) الدائرة في النقاط A_1 و B_1 (برسم الزاوية φ_1 يتم الحصول على A_1 , B_1) .

٣ ـ توصل النقطتين A_1 , B_1 مع بعض بخط مستقيم (يجب ان يمر الخـــط المذكور من النقطة M) .

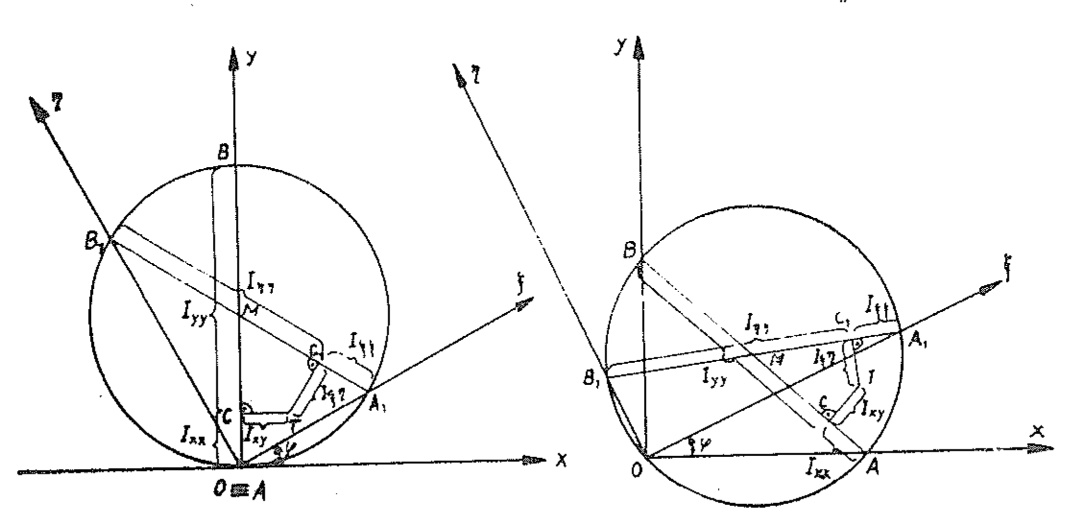
٤ ـ يقام من النقطة T عموداً على المستقيم A_1B_1 فيقطعه في النقطة C_1 .

٥ ـ من التصميم المذكور يتم الحصول بالقراءة على القيم المطلوبة :

$$\overline{A_1C_1} = I_{\xi\xi} \quad ; \quad \overline{B_1C_1} = I_{\eta\eta} \quad ; \quad \overline{C_1T} = I_{\xi\eta}$$

($I_{\xi\eta}$ سالبة لانها تتجه بعكس اتجاه المحور x أي لانها تقع في هذه الحالة على يسار $\overline{A_1B_1}$).

$I_{xy} > 0$



شكل 42-1

١ ـ ٣ ـ ٤ أمثلة :

مثـال 25 :

المقطع العرضي المرسوم في الشكل (43-1) .

المعطى : ابعاد المقطع العرضي واحداثيات مركز ثقله .

المطلوب :

١ ـ حساب عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} للسطح F .

٢ ـ تعيين موضع محاور العطالة الرئيسية وايجاد عزوم العطالة الرئيسية I_{11} , I_{22} .

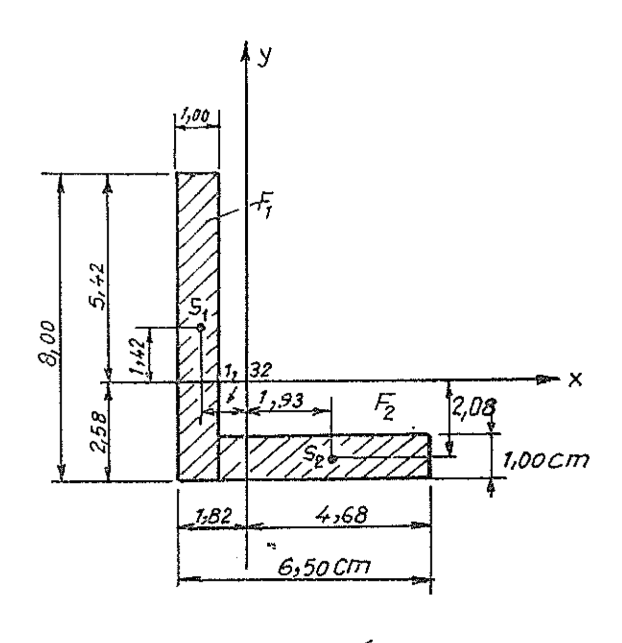
الحـل :

١ ـ حساب عزوم الدرجة الثانية المركزية .

$$I_{xx} = \sum_i I_{xxi} = I_{xx1} + I_{xx2}$$

$$I_{xx1} = \frac{1,0\ .\ 8,0^3}{12} + (1,0\ .\ 8,0)\ .\ 1,42^2 = 42,7 + 16,13 = 58,83\ \text{cm}^4$$

$$I_{xx2} = \frac{5,5\ .\ 8,0^3}{12} + (1,0\ .\ 5,50)\ .\ 2,08^2 = 0,5 + 23,82 = 24,32\ \text{cm}^4$$



شكل 1-43

ومنها ينتج :

$$I_{xx} = 58{,}83 + 24{,}32 = 83{,}15 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = \sum_i I_{yyi} = I_{yy1} + I_{yy2}$$

$$I_{yy1} = \frac{8{,}0 \,.\, 10^3}{12} + (8{,}0 \,.\, 1{,}0) .\, 1{,}32^2 = 0{,}7 + 13{,}92 = 14{,}62 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy2} = \frac{1{,}0 \,.\, 5{,}5^3}{12} + (5{,}5 \,.\, 1{,}0) .\, 1{,}93^2 = 13{,}9 + 20{,}46 = 34{,}36 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = 14{,}62 + 34{,}36 = 48{,}98 \approx 49 \text{cm}^4$$

$$I_{xy} = \sum_i I_{xyi} = I_{xy1} + I_{xy2}$$

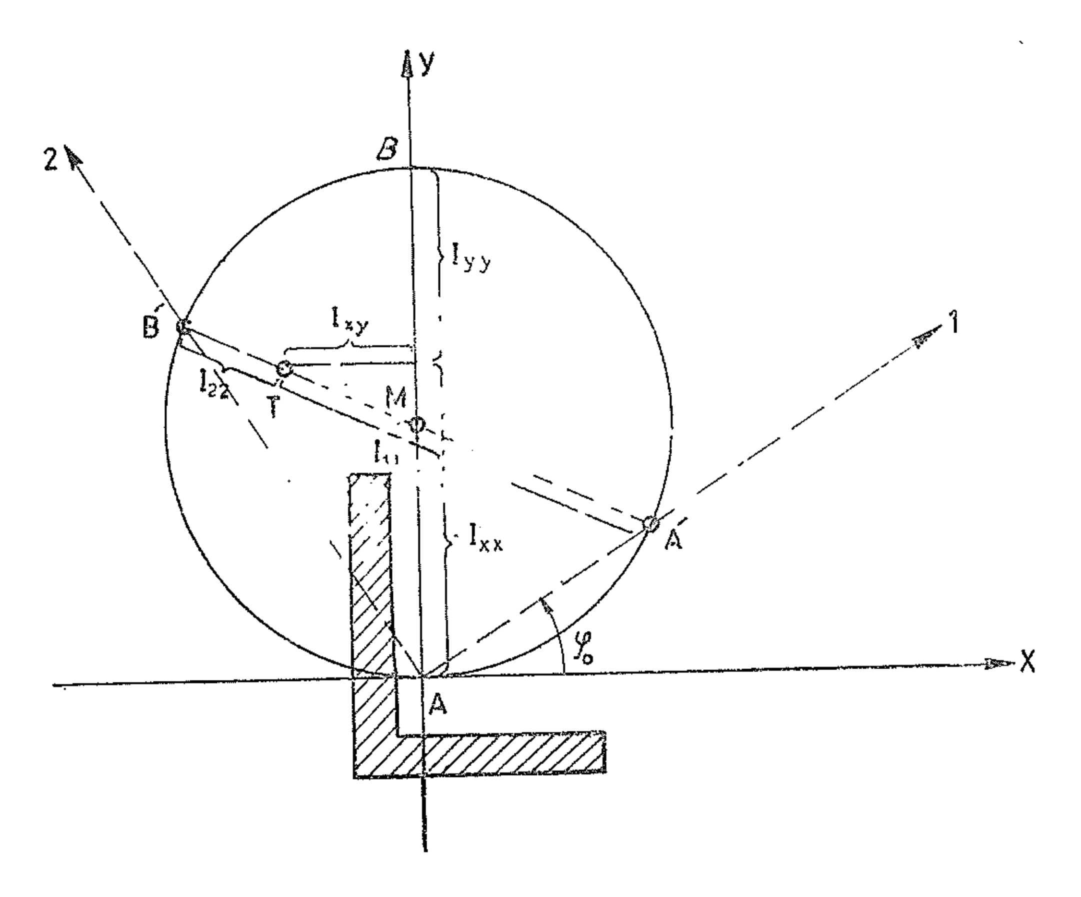
$$I_{xy1} = 0 + (8{,}0 \,.\, 1{,}0) .\, (1{,}32)(-1{,}42) = -15{,}2 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy2} = 0 + (5{,}50 \,.\, 1{,}0) .\, (-2{,}08)(1{,}93) = -21{,}9 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = -15{,}2 - 21{,}9 = -37{,}1 \text{ cm}^4$$

٢ ـ تحديد وضع محاور المطالة الرئيسية تخطيطياً بواسطة دائرة عطالة مور ـ لاند .

من الشكل (1-44) يقرأ:



شكل 1-44

$\varphi_0 = 32^\circ\, 40' \quad ; \quad I_{11} = 106{,}9 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{22} = 25{,}3 \text{ cm}^4$

التدقيق :

$I_{11} + I_{22} = 106{,}9 + 25{,}5 = 132{,}2 \text{ cm}^4$

$I_{xx} + I_{yy} = 83{,}15 + 49 = 132{,}15 \text{ cm}^4$

اذاً يمكن اعتبار العلاقة :

$I_{11} + I_{22} = I_{xx} + I_{yy}$

محققة . الفارق البسيط ناتج عن عدم دقة الرسم والقراءة دقة تامة .

تحديد وضع محاور العطالة الرئيسية تحليلياً :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\, I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{2\,(-37{,}1)}{49{,}0 - 83{,}1} = +\,2{,}18$$

منها ينتج :

$$2\varphi_0 = 65° 20' \; ; \; \varphi_0 = 32° 40'$$

$$\left.\begin{matrix} I_{11} \\ I_{22} \end{matrix}\right] = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi_0 \mp I_{xy} \sin 2\varphi_0$$

$$\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = \frac{83,1 + 49,0}{2} = 66,1 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} = \frac{83,1 - 49.0}{2} = 17,1 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = - 37,1 \text{ cm}^4$$

$$\cos 2\varphi_0 = 0,417 \; ; \; \sin 2\varphi_0 = 0,909$$

بالتبديل في المعادلة الاخيرة ينتج :

$$\left.\begin{matrix} I_{11} \\ I_{22} \end{matrix}\right] = 66,1 \pm 17,1 \,.\, 0,417 \pm 37,1 \,.\, 0,907$$

$$I_{11} = 106,9 \text{ cm}^4 \; ; \; I_{22} = 25,3 \text{ cm}^4$$

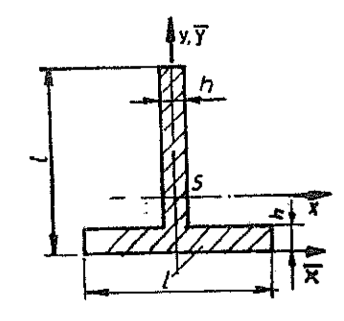
مثـال 26 :

بروفيل على شكل T (شكل 1-45) .

المعطى : l , h .

المطلوب : حساب عزوم العطالة التالية :

$$I_{22} , \; I_{11} , \; I_{xy} , \; I_{yy} , \; I_{xx} , \; I_{\bar{y}\bar{y}} , \; I_{\bar{x}\bar{x}}$$



شكل 1-45

الحل :

أبعاد مركز الثقل :

$$\bar{x}_s = 0$$

$$\bar{y}_s = \frac{1}{2} \frac{l^2 + l h - h^2}{2l - h}$$

عزوم المطالة :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{l^2 h}{3} + \frac{(l-h) h^3}{3} \quad , \quad I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{h l^3}{12} + \frac{(l-h)}{12} h^3$$

$$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}_s^2 F = \frac{h l^3}{3} + \frac{(l-h)}{3} h^3 - \frac{h}{4} \frac{(l^2 + l h - h^2)^2}{2l - h}$$

$$I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{x}_s^2 F = I_{\bar{y}\bar{y}} \quad ; \quad I_{xy} = 0$$

عندما يكون البروفيل رقيق الجدار ($1 >> h / l$) . تصبح العلاقات السابقة بشـــكل تقريبي (القيمة الحدية $h/l \to 0$) كما يلي :

$$\bar{x}_s = 0 \;;\; \bar{y}_s = \frac{l}{2} \frac{1 + \frac{h}{l} - \left(\frac{h}{l}\right)^2}{2 - \frac{h}{l}} \approx \frac{l}{4}$$

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{l^3 h}{3} \;;\; I_{xx} = \frac{5}{24} l^3 h \;;\; I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{l^3 h}{12}$$

يقصد بالعزوم الرئيسية ، عزوم المطالة الرئيسية المركزية . بسبب كون المحور y محور تناظر للمقطع العرضي فان المحاور x , y هي محاور مركزية رئيسية (محاور رئيسية) .

$$I_{11} = I_{xx} \;;\; I_{22} = I_{yy}$$

مثال 27 :

بروفيل على شكل زاوية غير متساوية (شكل 46 - ...) :

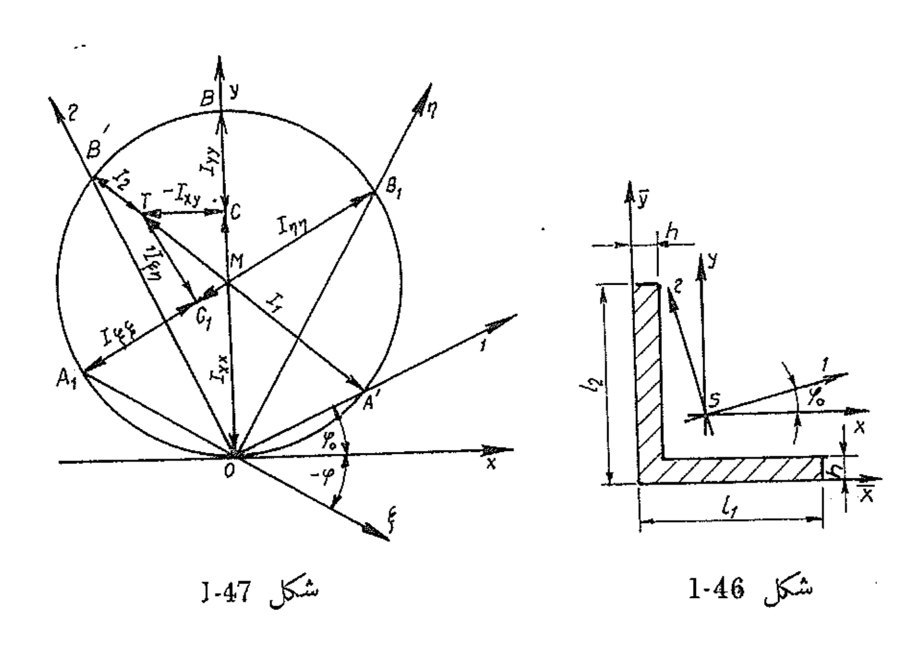
المعطى : $l_1 = 60$ mm ; $l_2 = 90$ mm ; $h = 10$ mm

المطلوب : ايجاد

١ ـ $I_{\overline{xx}}$; $I_{\overline{yy}}$: $I_{\overline{xy}}$; I_{xx} ; I_{yy} ; I_{xy} .

٢ ـ تحليليا : φ_0 ، I_{11} ، I_{22} ، $I_{\xi\xi}$ ، $I_{\eta\eta}$ ، $I_{\xi\eta}$ من اجل $\varphi = -30^\circ$.

٣ ـ بطريقة مور ـ لاند التخطيطية : φ_0 ، I_{11} ، I_{22} ، $I_{\xi\xi}$ ، $I_{\eta\eta}$ ، $I_{\xi\eta}$ من اجل $\varphi = -30^\circ$.



شكل 1-47   شكل 1-46

الحـل :

١ ـ ابعاد مركز الثقل :

$$\overline{x}_s = \frac{1}{2}\,\frac{l_1^2 + l_2 h - h^2}{l_1 + l_2 - h} = 1{,}57\ \text{cm}\ ;\ \overline{y}_s = \frac{1}{2}\,\frac{l_2^2 - l_1 h - h^2}{l_1 + l_2 - h} = 3{,}07\text{cm}$$

عزوم المطالة :

$$I_{\overline{xx}} = \frac{h l_2^3}{3} + \frac{(l_1 - h)h^3}{3} = 244{,}67\ \text{cm}^4$$

$$I_{\overline{yy}} = \frac{h l_1^3}{3} + \frac{(l_3 - h)h^3}{3} = 74{,}67\ \text{cm}^4$$

$$I_{\overline{xy}} = \left[\,0 - \left(\frac{l_1 - h}{2} + h\right)\frac{h}{2}\,(l_1 - h)\,h\,\right] + \left[\,0 - \frac{l_2}{2}\,\frac{h}{2}\,l_2 h\,\right] =$$

$$= -\frac{h^2}{4}\left(l_1^2 + l_2^2 - h^2\right) = -29\ cm^4$$

$$I_{xx} = I_{\overline{xx}} - \overline{y}_s^2\ F = \frac{h\ l_2^3}{3} + \frac{(l_1 - h)h^3}{3} - \frac{h}{4}\ \frac{(l_2^2 + l_1 h - h^2)^2}{l_1 + l_2 + h}$$

$$= 113{,}34\ cm^4$$

$$I_{yy} = I_{\overline{yy}} - \overline{x}_s\ F = \frac{h l_1^3}{3} + \frac{(l_3 - h)\ h^3}{3} - \frac{h}{4}\ \frac{(l_1^2 + l_2 h - h^2)^2}{l_1 + l_2 - h}$$

$$= 40{,}10\ cm^4$$

$$I_{xy} = I_{\overline{xy}} - \overline{x}_s\ \overline{y}_s\ F = \left[\ \frac{h^2}{4}\ (l_1^2 + l_2^2 - h^2) - \frac{h}{4}\ .\right.$$

$$\left.\cdot\ \frac{(l_1^2 + l_2 h - h^2)\ (l_2^2 + l_1 h - h^2)}{l_1 + l_2 - h}\ \right] = -\ 38{,}57\ cm^4$$

٢ ـ المحاور الرئيسية وعزوم العطالة الرئيسية :

$$tg\ 2\ \varphi_0 = \frac{2\ I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = 1{,}055\quad :\quad \varphi_0 = 23{,}25^0$$

$$\left.\begin{matrix} I_{11} \\ I_{22} \end{matrix}\right] = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx}\quad I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{11} = 129{,}82\ cm^4\quad ;\quad I_{22} = 23{,}52\ cm^4$$

عزوم العطالة بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية ξ و η :

$$I_{\xi\xi} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\ \varphi = 61{,}55\ cm^4$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\ \varphi + I_{\ y}\sin 2\varphi = 91{,}79\ cm^4$$

$$I_{\xi\eta} = \qquad -\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\sin 2\ \varphi - I_{xy}\cos 2\varphi = 50{,}90\ cm^4$$

٣ ـ الحل التخطيطي بواسطة دائرة عطالة مور ـ لاند

يبين الشكل (1-57) الحل التخطيطي للمسألة ومنه يتم التوصل للنتيجة التالية :

$I_{\xi\xi} = 61{,}6 \text{ cm}^4$

$I_{\eta\eta} = 91{,}8 \text{ cm}^4$

$I_{\xi\eta} = 50{,}9 \text{ cm}^4$

$I_{11} = 129{,}85 \text{ cm}^4$

$I_{22} = 23{,}50 \text{ cm}^4$

$\varphi_0 = 23{,}5^0$

١ ـ ٤ العزم المقاوم

سوف يرى في بحث الانعطاف ان قدرة تحمل الجائز لعزم الانعطاف تزداد كلما ازداد العـــزم المقاوم لمقطعه العرضي . اما العزم المقاوم فيؤخذ عادة بالنسبة للمحاور الرئيسية المركزية . عندما تنطبق المحاور y , x على المحاور الرئيسية كما هو الحال في المقاطع العرضية ذات الشـكل [I , مثلا فلا حاجة لتغير اسم المحاور y , x وكتابته 1 و 2 . المهم ان ما يقصد في هذه الحالة من y , x انها المحاور الرئيسية , أما في المقاطع التي لا تنطبق فيها y , x على المحاور الرئيسـية كما هو الحال في المقاطع العرضية ذات الشكل L مثلا فان من الضروري الانتباه لتسمية المحـاور الرئيسية هناك بـ 1 و 2 . برسم مستقيمات توازي المحاور الرئيسية المركزية y , x للسـطح F وتمس حافاته (تمس المنحني المغلف للمقطع العرضي) (شكل 1-48) ، يتم الحصول على الابعاد x_r , x_l وكذلك y_o , y_u (هذه الابعاد هي اكبر ابعاد للمقطع العرضيعنالمحاورالاحداثية) . تسمى الكسور الناتجة عن قسمة عزوم العطالة الرئيسية على القيم المطلقة للابعاد العظمى للمقطع العرضي عن المحاور الرئيسية ، والتي تكتب هكذا :

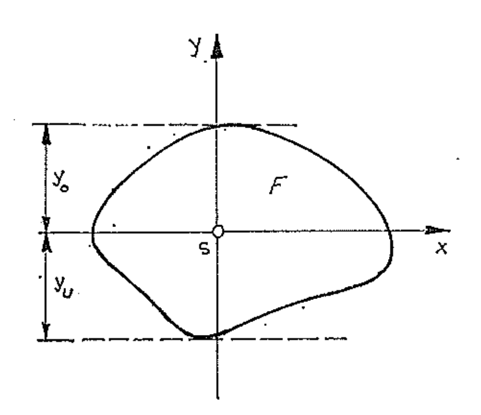
$$\left.\begin{aligned} W_{x,o} &= \frac{I_{xx}}{|y_o|} \; ; \quad W_{x,u} = \frac{I_{xx}}{|y_u|} \\ W_{y,r} &= \frac{I_{yy}}{|x_r|} \; ; \quad W_{y,l} = \frac{I_{yy}}{|x_l|} \end{aligned}\right\} \qquad (1.55)$$

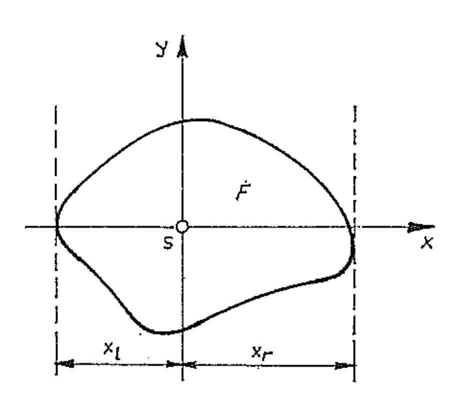
بالعزوم المقاومة للسطح F بالنسبة لمحاورها الرئيســية المركزية . اما واحدتها فهي مكعب واحدة الطول . .

حالات خاصة :

عندما تكون $x_r = x_l$, $y_o = y_u$ عندئذ يملك السطح F عزمين مقاومين فقط وهما :

$$W_{x,o} = W_{x,u} = W_x \quad ; \quad W_{y,r} = W_{y,l} = W_y$$



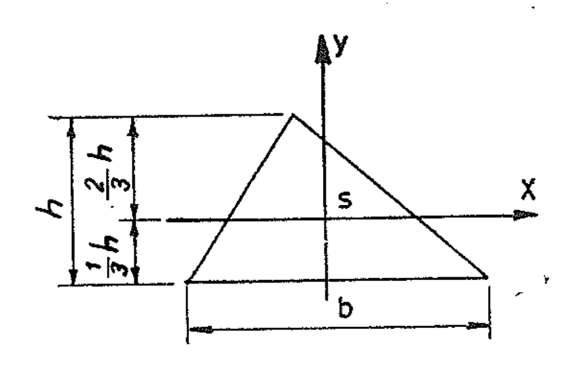


شكل 1-48

مثـال 28 :

المعطى : ابعاد المثلث b , h (شكل 1-49) .

المطلوب : حساب العزوم المقاومة W_{xo} , W_{xu} .



شكل 1-49

الحـل :

بسبب كون :

$$y_u = \frac{1}{3} h \quad ; \quad y_o = \frac{2}{3} h$$

فان العزوم المقاومة ، حسب العلاقة (1.55) هي :

$$\left.\begin{aligned} W_{xo} &= \frac{I_{xx}}{|y_o|} = \frac{bh^3}{36} \cdot \frac{3}{2h} = \frac{bh^2}{24} \\ W_{xu} &= \frac{I_{xx}}{|y_u|} = \frac{bh^3}{36} \cdot \frac{3}{h} = \frac{bh^2}{12} \end{aligned}\right\} \quad (1.56)$$

مثـال 29 :

المعطى : نصف قطر الدائرة R (قطر الدائرة D) (شكل 1-50) .

المطلوب : حساب العزم المقاوم W_x .

شكل 1-50

الحـــل :

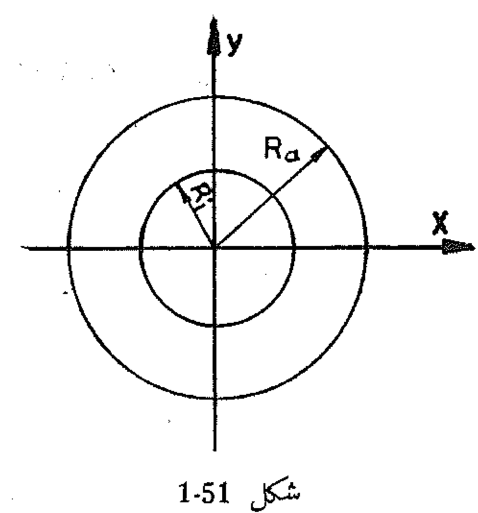
لاسباب التناظر تتساوى العزوم المقاومة للدائرة بالنسبة لجميع المحاور ويمكن حسابها ، حسب العلاقة (1-55) ، وذلك بعد تبديل $y_o = y_u = y_R = R$ كالتالي :

$$W_x = \frac{I_{xx}}{y_R} = \frac{\pi R^4}{4R} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0.1\ D^3 \qquad (1.57)$$

مثـال 30 :

المعطى : انصاف اقطار الحلقة الدائرية (شكل 1-51) الخارجي R_a والداخلي R_i .

المطلوب : حساب العزم المقاوم W_x .



شكل 1-51

الحل :

لاسباب التناظر تتساوى العزوم المقاومة للحلقة الدائرية بالنسبة لجميع المحاور ويمكن حسابها ، حسب العلاقة (1-55) ، بعد تبديل $y_R = R_a$ ، كالتالي :

$$\left.\begin{aligned} W_x &= \frac{I_{xx}}{y_R} = \frac{\pi}{2 R_a}(R_a{}^4 - R_i{}^4) = \frac{\pi}{32 D_a}(D_a{}^4 - D_i{}^4) \\ &= \frac{0,1}{D_a}(D_a{}^4 - D_i{}^4) \end{aligned}\right\} \quad (1.58)$$

حيث ان $D_a = 2 R_a$; $D_i = 2 R_i$.

مثال 31 :

بروفيل خشبي كما يشير الشكل (1-52) .

المعطى : إبعاد البروفيل .

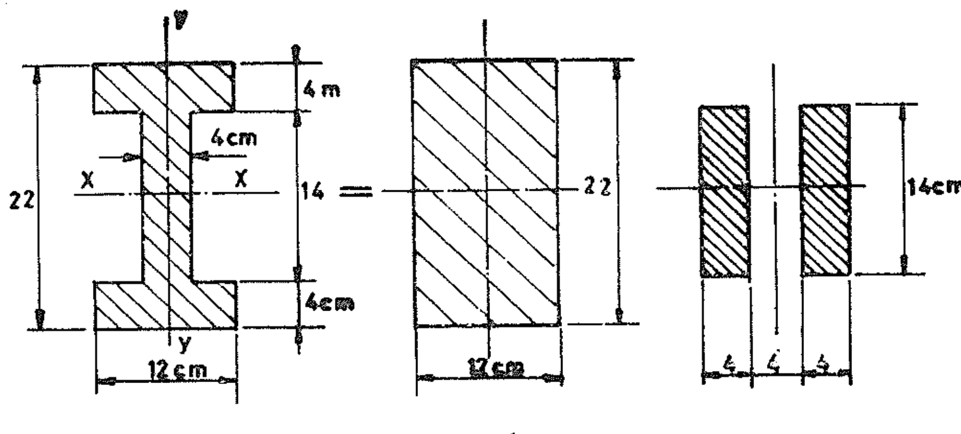
المطلوب : حساب عزوم العطالة I_{xx} و I_{yy} والعزوم المقاومة W_x و W_y .

الحل :

لاسباب التناظر فان مركز ثقل المقطع العرضي يقع في منتصفه .

عزوم العطالة :

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{3} I_{xx\,i} = \frac{1}{12}\,[\,12.23^3 - 2.4.14^3\,] = 88.9 \text{ cm}^4$$



شكل 1-52

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^{3} I_{yy\,i} = \frac{4.12^3}{12} + \frac{14.4^3}{12} + \frac{4.12^3}{12} = 1227 \text{ cm}^4$$

العزوم المقاومة :

$$W_x = \frac{I_{xx}}{y_B} = \frac{8819}{11} = 802 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_{yy}}{x_B} = \frac{1227}{6} = 205 \text{ cm}^3$$

١ ـ ٥ نصف قطر العطالة ، قطع ناقص العطالة

ليكن I_{kk} هو عزم عطالة السطح F بالنسبة للمحور k ولتكن F هي مساحة ذلك السطح . بتشكيل الكسر I_{kk}/F ثم جذر النتيجة يتم الحصول على قيمة واحدتها هي واحدة الطول والتي سيرمز لها بـ i_{kk} وتسمى **بنصف قطر عطالة السطح** F بالنسبة للمحور k (المحور الذي نسب عزم العطالة اليه) اما علاقتها فتكتب بالشكل التالي :

$$i_{kk} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{F}} = (i_k) \qquad (1.59)$$

لتكن 1 (s_1) و 2 (s_2) هي محاور العطالة الرئيسية للسطح F المارة بنقطة ما (ولتكن النقطة 0) من السطح المذكور ، عندئذ تكون انصاف اقطار العطالة التابعة لها هي :

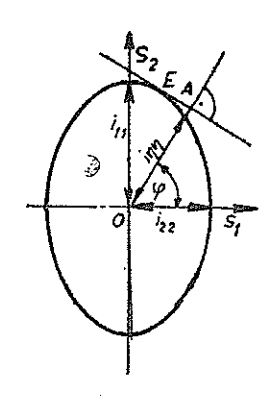
$$i_{11} = \sqrt{\frac{I_{11}}{F}} = (i_1) \; ; \; i_{22} = \sqrt{\frac{I_{22}}{F}} = (i_2)$$

ان جميع قيم انصاف اقطار العطالة بالنسبة لاي من المحاور الاخرى التي تمر من النقطة 0 تقع بين هاتين القيمتين . برسم القيمة i_{11} عموديا على المحور 1 (s_1) ابتداء من نقطة المركز 0 والى كلا الجهتين ثم برسم القيمة i_{22} عموديا على المحور 2 (s_2) ابتداء من نقطة المركز 0 والى كلا الجهتين يتم انشاء قطع ناقص انصاف اقطاره هي انصاف اقطار العطالة الرئيسية (شكل 1-53) . يسمى القطع الناقص المذكور **بقطع ناقص العطالة** .

اما معادلته فهي :

$$\frac{s_1^2}{i_{22}^2} + \frac{s_2^2}{i_{11}^2} = 1 \qquad (1.59\ b)$$

حيث ان s_1 , s_2 هي احداثيات نقطة ما من القطع الناقص .



شكل 1-53

يسمى قطع ناقص العطالة العائد للمحاور المركزية **بقطع ناقص العطالة المركزي** أو باختصار **القطع الناقص المركزي** . اما صفات القطع الناقص المذكور فهي :

برسم المماس t على القطع الناقص ، الذي يوازي محور ما يمر من النقطة 0 (مثلا المحور η) فان البعد العمودي للماس عن المحور المذكور (هنا η) يساوي نصف قطر العطالة بالنسبة لذلك المحور (هنا $i_{\eta\eta}$) (شكل 1-53) .

البرهان : ان معادلة المماس على القطع الناقص ، بنقطة تماسه E ذات الاحداثيات s_{1E} , s_{2E} هي :

$$\frac{s_1 s_{1E}}{i_{22}^2} + \frac{s_2 s_{2E}}{i_{11}^2} = 1$$

من الشكل (1-53) يمكن قراءة العلاقات التالية :

$$\overline{OA} = i\eta\eta = s_{1E} \cos\varphi + s_{2E} \sin\varphi$$

أو :

$$\frac{s_{1E} \cos\varphi}{i\,\eta\eta} + \frac{s_{2E} \sin\varphi}{i\,\eta\eta} = 1$$

باجراء مقارنة بين الحدود يتم التوصل لما يلي :

$$\frac{s_1}{i_{22}^2} = \frac{\cos\varphi}{i\,\eta\eta} \;,\; \frac{s_2}{i_{11}^2} = \frac{\sin\varphi}{i\eta\eta}$$

منها يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\frac{s_1^2}{i_{22}^2} + \frac{s_2^2}{i_{11}^2} + \frac{i_{22}^2 \cos^2\varphi}{i\,\eta\eta^2} + \frac{i_{11}^2 \sin^2\varphi}{i\,\eta\eta^2} = 1$$

بالحصول على هذه العلاقة ينتهي البرهان على ان $\overline{OA} = i\eta\eta$.

عندما تتساوى عزوم العطالة الرئيسية I_{11} , I_{22} فان قطع ناقص العطالة يتحول الى دائرة . عندها تتساوى كافة عزوم العطالة بالنسبة لجميع المحاور المارة بالنقطة 0 ، اي تصبح جميع المحاور المارة من النقطة 0 محاور عطالة رئيسية وبناء على ذلك ينبغي ان ينعدم جداء العطالة بالنسبة لأية مجموعة من المحاور تمر من النقطة 0 .

ان الدائرة والمربع وكافة المضلعات المنتظمة بالنسبة للمحاور المركزية هي أمثلة على ذلك .

مثال 32 :

المعطى : ابعاد المستطيل h , b (شكل 1-54) .

المطلوب : حساب انصاف اقطار العطالة المركزية i_{xx} , i_{yy} ثم اشتقاق انصاف اقطار العطالة i_{xx} , i_{yy} العائدة للمربع باعتباره حالة خاصة للمستطيل .

الحل :

عزوم عطالة المستطيل :

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} \;,\; I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$$

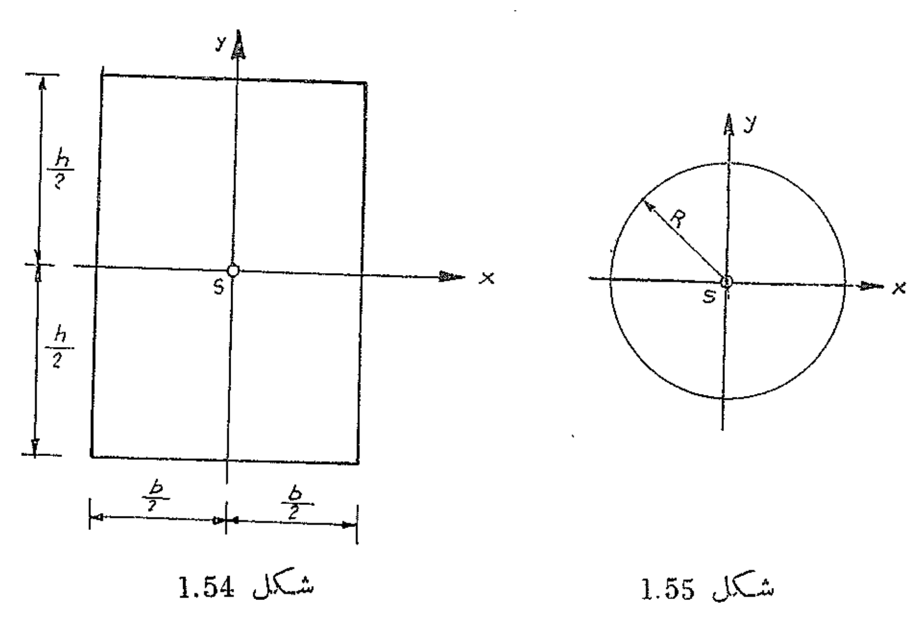
انصاف أقطار عطالة المستطيل :

$$i_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} = 0{,}289\ h$$

$$i_{yy} = \sqrt{\frac{I_{yy}}{F}} = \sqrt{\frac{h\ b^3}{12\ b\ h}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{b}{2\ \sqrt{3}} = 0.289\ h$$

حالة خاصة : $h=b=a$ (يتحول المستطيل الى مربع طول ضلعه a) .

$$i_{xx} = i_{yy} = i = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = 0\ 289\ a$$



شكل 1.54

شكل 1.55

مثـال 33 :

المعطى : نصف قطر الدائرة R (شكل 1-55) .

المطلوب : حساب أنصاف اقطار العطالة المركزية i_{xx} , i_{yy} والعزوم المقاومة .

الحـل :

أنصاف اقطار العطالة :

$$i_{xx} = i_{yy} = \sqrt{\frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\pi R^2}} = \frac{R}{2}$$

$$W_x = W_y = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{R} = \frac{\pi R^3}{4}$$

١ ـ ٦ ايجاد عزوم الدرجة الثانيه تخطيطياً

من أجل السطوح ذات الاشكال غير المنتظمة والتي يصعب حساب عزوم الدرجة الثانية التابعة لها بطريقة تحليلية ، يفضل استخدام الطريقة التخطيطية التي اوجدها العالم مور (Otto MOHR) التالية :

يقسم السطح المدروس بموازاة المحور الذي يطلب حساب عزم العطالة بالنسبة له الى شرائح سطحية رقيقة . عندئذ يتألف عزم عطالة السطح بالنسبة للمحور y مثلا من مجموع عزوم عطالة الشرائح بالنسبة لنفس المحور (المحور y) . لكن عزوم عطالة الشرائح هذه تتألف من عزوم العطالة المحورية (الذاتية) للشرائح ومن حدود شتاينر التابعة لها ، بحيث يمكن الكتابة :

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} I_{yys\,i} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 F_i$$

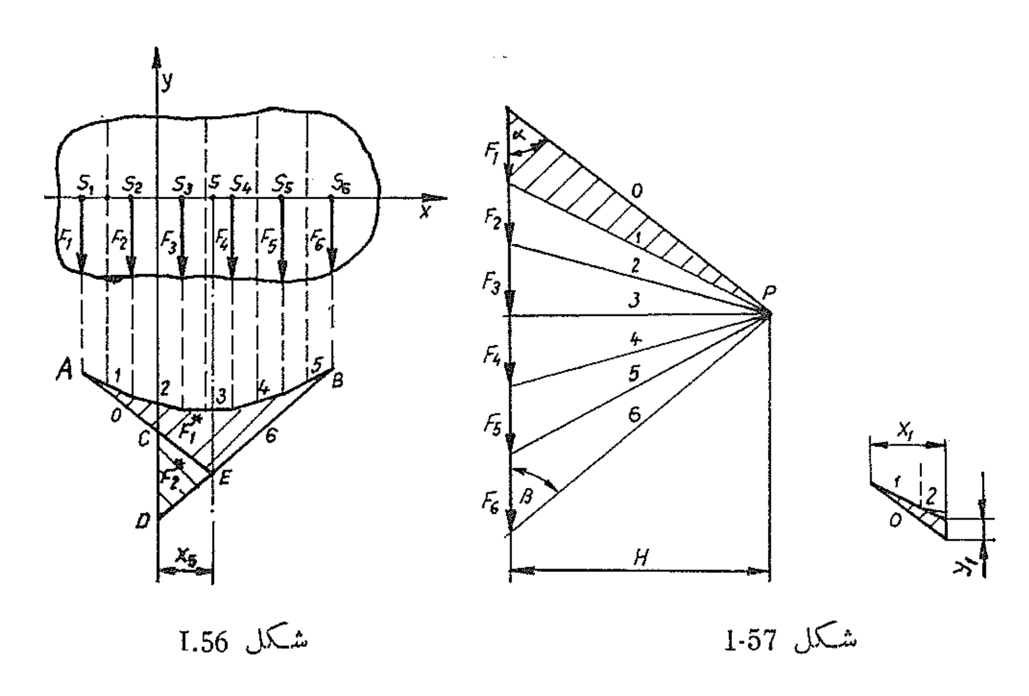
حيث أن n هو عدد الشرائح و F_i هي مساحة الشريحة i , x_i هو بعد مركز ثقل الشريحة i عن المحور y (البعد العمودي) و $I_{yys\,i}$ هو عزم عطالة الشريحة i بالنسبة لمحور مركزي يوازي المحور y .

عندما تكون الشرائح رقيقة قدر الامكان عندئذ يمكن أهمال عزوم العطالة $I_{yys\,i}$ بالنسبة لحدود شتاينر (اذا ما قورنت مع حدود شتاينر) وبذلك يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$I_{yy} \approx \sum_{i=1}^{n} x_i^2 F_i \qquad (1\text{-}60)$$

تزداد هذه العلاقة التقريبية دقة كلما صغرت سماكة الشريحة .

بتمثيل مساحات السطوح F_i كقوى تؤثر في مراكز ثقل الشرائح السطحية التابعة لها (على سبيل المثال قيمة مساحة F_1 تمثل كقوة تؤثر في مركز ثقل الشريحة 1 . أما منحاها فيوازي محور النسب ، هنا المحور y) يمكن اعتماداً على مخطط القوى ، الذي يبلغ بعده القطبي H ، من انشاء مضلع حبلي (شكل 56-1) .



شكل I.56 شكل 57-1

يتطابق ، في أمكنة تقسيم السطوح ، مضلع الخطوط المنكسر مع المنحني الفعلي ، لذا يمكن أيضاً رسم منحني معدل يمر من هذه النقاط وبذلك تدخل عزوم العطالة المركزية (الذاتية) للشرائح بعين الاعتبار .

يوجد ، بين مخطط المكان ومخطط القوى التشابه الهندسي التالي (بسبب توازي أضلاع الاشكال الموجودة) (شكل 57-1) :

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{F_i}{H}$$

إذاً :

$$y_i = \frac{F_i}{H}\, x_i$$

ينبغي مراعاة الانتباه لما يلي :

ان x_i , y_i هي أبعاد ، إذاً واحداتها هي واحدة الطول (cm مثلا) أما F_i فهي مساحة وواحدتها هي مربع واحدة الطول (cm^2 مثلا) . تتطلب العلاقة السابقة إذاً أن تكون واحدة H هي مربع واحدة الطول (cm^2) .

من اجل السطح المحصور بين المضلع الحبلي وبين الشعاع الحبلي الأول والاخير الممدان حتى المحور y (السطح المهشر في الشكل 1-56) والذي يتألف من مجموعة مثلثات مساحة كل منها :

$$\Phi_i = \frac{1}{2} x_i y_i = \frac{x_i^2 F_i}{H}$$

يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 F_i}{2H} = \frac{1}{2H} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 F_i$$

من الحد الاول والاخير ينتج :

$$2H\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 F_i$$

بالمقارنة مع (1-60) يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$I_{yy} = 2H\Phi = 2H(F_1^* + F_2^*) \qquad (1.61)$$

حيث أن $\Phi = F_1^* + F_2^*$ تمثل مساحة السطح المهشر في الشكل (1-56) (وهو السطح المحصور بين المضلع الحبلي وبين الشعاع الحبلي الاول والشعاع الحبلى الاخير الممددان حتى المحور y) .

من اجل المحور المركزي تنعدم F_2^* وبذلك تصلح العلاقة التالية :

$$I_{yy} = 2H F_1^* \qquad (1.62)$$

ان استخدام المعادلة (1-61) وكذلك العلاقة (1-62) يفترض رسم السطح F وكذلك السطح

Φ (أي F_1^* , F_2^*) بأبعادها الفعلية (الطبيعية) . أما اذا لم ترسم السطوح بأبعادها الفعلية (أي اذا رسمت بمقياس ما) عندئذ يلزم ادخال ذلك بعين الاعتبار وذلك بادخال عامل المقياس m_j وبذلك تصبح العلاقة (1-61) بالشكل التالي :

$$I_{yy} = 2\, m_l \;\; H\Phi \qquad (1.63)$$

ان واحدة H هي واحدة السطوح أي cm^2 أما المقياس (عامل المقياس) m_j فقد تكون واحداته من الدرجة الثانية (التربيعية) او من الدرجة الرابعة لمقياس الطول m_l (على سبيل المثال $m_l = 1/10$) وذلك حسبما تكون F , Φ مرسومة . فاذا رسم السطح F بأبعاده الفعلية (او رسم مصغراً ، لكن قيم السطوح F_i اخذت من المخطط المصغر المعطى ثم حسبت بأبعادها الحقيقية) وكان فقط سطح المضلع الحبلي Φ ممثلاً بتصغير فان m_j تكون من الدرجة الثانية لمقياس الطول . (وهي تساوي $1/m_l^2$) . لكن اذا رسم ايضاً السطح F (يعني F_i , Φ) بتصغير وقرأت ابعاد F_i مباشرة من المخطط بواسطة المقياس (دون اعادة القيم الى ابعادها الطبيعية) فان m_j تكون من الدرجة الرابعة لمقياس الطول m_l (وهي $1/m_l^4$).

اذا اختيرت ، في مخطط القوى ، الزاوية $\alpha = \beta = 45^o$ ، بذلك ينتج عند اختيار $H = F/2$ (F هي مساحة المقطع العرضي) ما يلي :

$$I_{yy} = F \cdot \Phi \qquad (1\text{-}64)$$

للتمكن أيضاً من إيجاد جداء العطالة تخطيطياً ، ينبغي تعيين قيم كل من I_{xx} , I_{yy} وكذلك $I_{عع}$ (التابعة للمحور ع الذي يميل بالزاوية φ) بواسطة طريقة مور المذكورة آنفاً . ثم يلجأ بعد ذلك لايجاد نقطة العطالة T بواسطة دائرة عطالة مور ــ لاند وذلك اعتماداً على القيم I_{xx} , I_{yy} و $I_{عع}$, φ . بتحديد النقطة T تحدد قيمة I_{xy} أيضاً كما يصبح بالامكان ايجاد عزوم العطالة الرئيسية قيمة وموضعاً .

الفصل الثاني

الاجهادات

٢ ـ ١ مفهوم الاجهاد

تمتد الدراسات التالية دون استثناء على الاجسام المتينة (feste Körper) القابلة للتغير التي يمتلىء فراغها بنفس المادة والتي لا تحتوي على فجوات . يتحقق مطلب التجانس لمادة الجسم المدروس في المواد الفعلية بشكل تقريبي فقط .

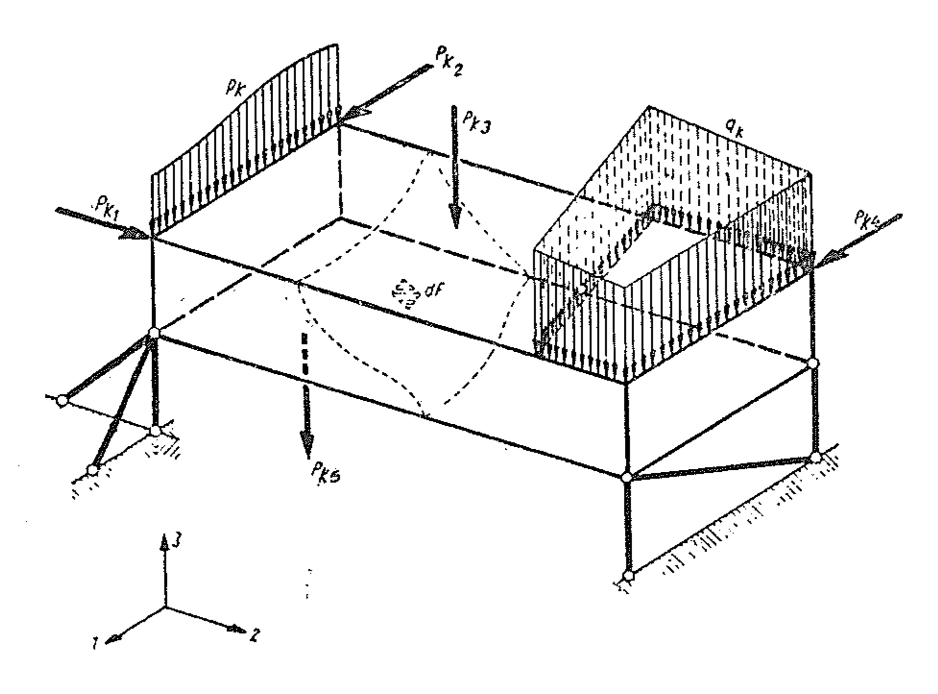
من المعلوم ان المواد المستخدمة في الحياة العملية هي اما ان تكون غير بلورية (amorph) او بلورية (kristallin) .

تتألف المواد غير البلورية ، كما هو الحال في الزجاج والبكاليت واللدائن والراتنجات من جزيئات غير منتظمة ذات امتداد ضئيل بحيث تحقق فيها عملياً فرضية التجانس . ان امثال هذه المواد غير البلورية تشير في كافة اتجاهات الفراغ الى نفس السلوك الفيزيائي وهي كما يقال عنها متماثلة المناحي (isotrop) .

تتألف المواد البلورية التي تعود تبعية كافة المعادن اليها، بسبب طريقة صنعها بطريقة الانصهار، من مزيج بلوري . عندما تشير كافة البلورات ضمن صفاتها الفيزيائية الى ارتباط باتجاه ما (عدم التماثل في المناحي Anisotropie) فان الترتيب الاعتباطي (الذي لا يتبع قاعدة معينة) للبلورات الموجودة في المادة سيحقق بالرغم من ذلك التماثل في المناحي . بما ان ابعاد البلورات صغيرة جداً بالنسبة لابعاد العناصر الانشائية ويمكن اهمالها لذلك يمكن اعتبار هذا التركيب البلوري متجانساً .

فيما يلي سوف تتم دراسة جسم متين قابل للتغير وموجود تحت تأثير قوى معينة ومسند استناداً صلباً . تشكل قوى الاستناد (ردود افعال المساند) مع القوى الخارجية مجموعة متوازنة (مجموعة توازنية) من القوى (شكل 1-2) .

كما قد تم تعلمه في علم سكون الاجسام الصلبة (ستاتيك الاجسام الصلبة) بان القوى الخارجية

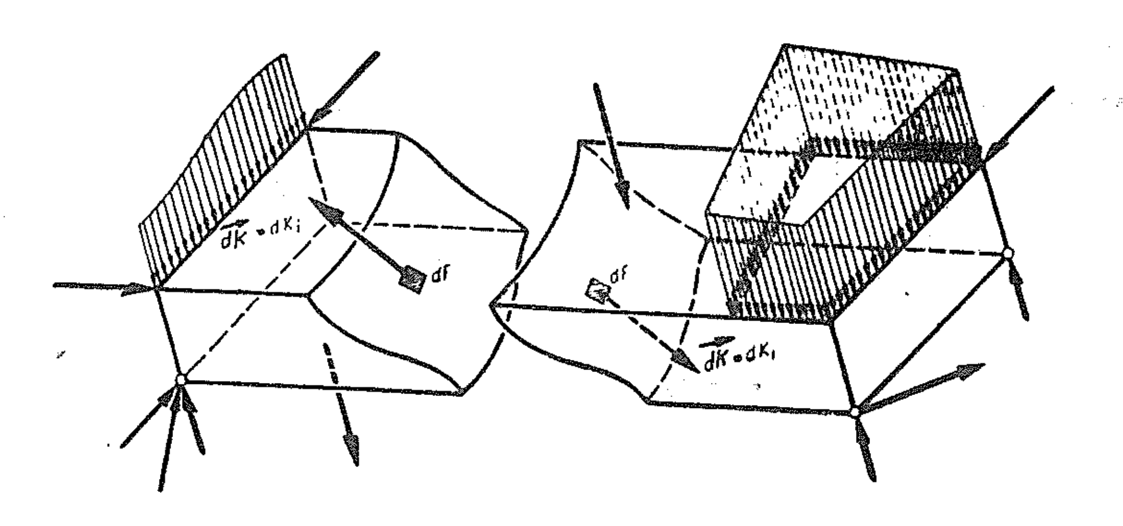


شكل 1-2

مجتمعة مع ردود افعال المساند (قوى الاستناد) تولد داخل الجسم ردود افعال داخلية (وهي ما قد سميت بقيم القطع) تؤدي لتماسكه . بتخيل اجراء قطع في جسم متوازن وشطره الى جزئين فان ردود الافعال الداخلية تجعل مرئية .

ينبغي ان يكون كل جزء من اجزاء الجسم بعد القطع على حدة (تحت تأثير الحمولات الخارجية وردود الافعال الداخلية) ، بسبب اعتبارات التوازن ، متوازنا (في حالة توازن) ايضاً كما ينبغي ان تكون ردود الافعال الداخلية التي تؤثر على كل من ضفتي القطع متساوية ومتعاكسة . اما ذلك فيتحقق عندما تؤثر على سطحي القطع قوى داخلية تشكل مجتمعة مع القوى الخارجية وردود افعال المساند لكل جزء من الجزئين ، مجموعة متوازنة (مجموعة توازنية) . تنقل عبر سطوح القطع من الضفة الاولى للضفة الثانية قوى متساوية ومتعاكسة ولكنها بسبب التجانس المفروض للجسم تتغير بشكل عام من مكان لمكان آخر وتتوزع على سطح المقطع العرضي بشكل قابل للاشتقاق المستمر . اذاً فهذه القوى هي قوى سطحية (قوى تتوزع على السطح) وتسمى **بالاجهادات** .

اذا أثرت على العنصر السطحي dF المقتطع من سطح القطع ، قوة وحيدة $d\mathbf{K} = dK_i$ (شكل 2-2) فان الشعاع المعرف بالعلاقة التالية :



شكل 2-2

$$t = \frac{dk}{dF} \quad \text{أو كذلك} \quad t_i = \frac{dK_i}{dF} \qquad (2.1)$$

يسمى **شعاع الاجهاد** وهو ينطبق على اتجاه القوة اما واحدته فهي واحدة قوة سطحية (قوة موزعة على سطح) (اذا كانت dK هي كامل القوى المنقولة بواسطة السطح dF عندئذ يسمى حاصل قسمه هذه القوة على السطح dF بالاجهاد ، واحدته المستعملة هي kp/cm^2) .

يعطي الجداء الناتج عن ضرب شعاع الاجهاد بمساحة العنصر السطحي العائد له ، القوة

$$dk \equiv dK_i$$

التي ينقلها العنصر السطحي dF .

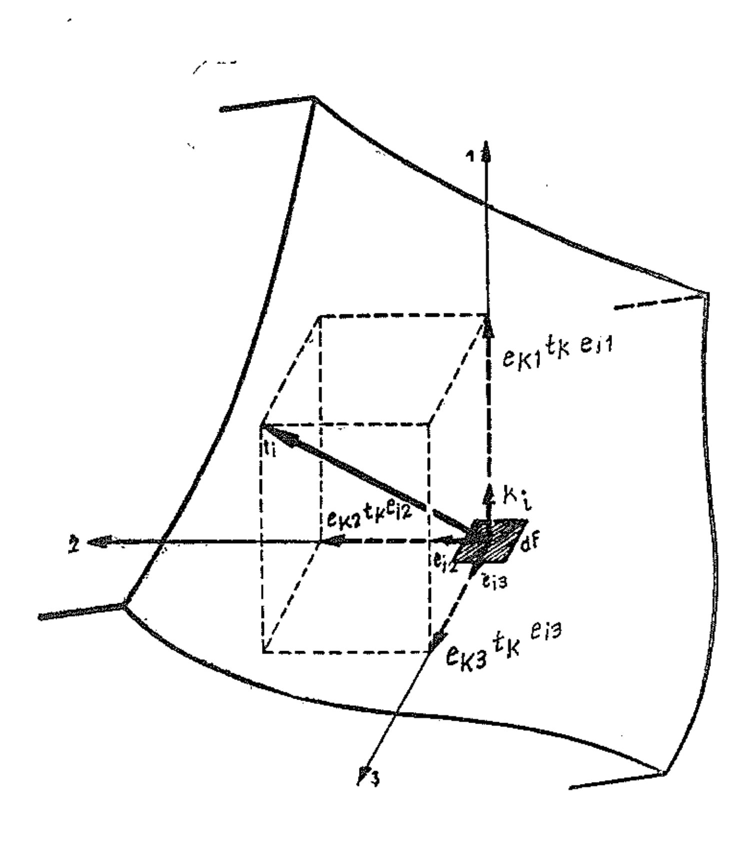
$$t\,dF = dk \quad \text{او كذلك} \quad t_i\,dF = dK_i \qquad (2,1b)$$

لتثبت ، في العنصر السطحي dF ، مجموعة نسب متعامدة (مجموعة محاور احداثية متعـامدة) اشعتها الرئيسية هي :

$$e_3 \equiv e_{i3} \;;\; e_2 \equiv e_{i2} \;;\; e_1 \equiv e_{i1}$$

بحيث ينطبق الشعاع الواحدي $e_{i1} \equiv e_1$ على الشعاع الناظمي للعنصر السطحي dF (شكل 2-3) . على العموم يكون شعاع الاجهاد بالنسبة للسطح dF منحرفا ولهذا السبب يمكن اسقاطه على محاور النسب وبذلك يتم التوصل لمركبات شعاع الاجهاد التالية :

$$t.e_1 \;\; ; \;\; t.e_2 \;\; ; \;\; t.e_3$$



شكل 2-3

او كذلك :

$$t_k e_{k1} \;\; ; \;\; t_k e_{k2} \;\; ; \;\; t_k e_{k3}$$

وبهذا يمكن تمثيل شعاع الاجهاد بالشكل التالي :

$$\left. \begin{array}{l} t = (t.e_1)\, e_1 + (t.e_2)\, e_2 + (t.e_3)\, e_3 \\ \text{او كذلك} \\ t_i = t_k e_{k1} e_{i1} + t_k e_{k2} e_{i2} + t_k e_{k3} e_{i3} \end{array} \right\} \qquad (2\text{-}2)$$

تسمى مركبة شعاع الاجهاد الناظمية (العمودية) على السطح dF والممثلة بالشكل التالي :

$$\sigma_1 = t \cdot e_1$$

او كذلك (2 3)

$$\sigma_1 = t_k\, e_{k1}$$

بالاجهاد الناظمي ويرمز له بالحرف σ وتسمى مركبات شعاع الاجهاد (مركبتي شعاع الاجهاد) التي تقع على سطح المقطع العرضي(التي تقع مماسية على سطح المقطع العرضي)والممثلة بالشكل التالي:

$$\tau_2 = t \cdot e_2$$

أو كذلك (2-4)

$$\tau_2 = t_k\, e_{k2}$$

$$\tau_3 = t \cdot e_3$$

او كذلك (2-5)

$$\tau_3 = t_k\, e_{k3}$$

بالاجهادات المماسية أو الاجهادات القاطعة (إجهادات القص) ويرمزلها بالحرف τ . بتبديل العلاقة (2-1) في العلاقات السابقة ينتج :

$$\sigma_1 = \frac{dk \cdot e_1}{dF}$$

او كذلك (2-6)

$$\sigma_1 = \frac{dK_k e_{k1}}{dF}$$

$$\tau_2 = \frac{dk \cdot e_2}{dF}$$

او كذلك (2-7)

$$\tau_2 = \frac{dK_k e_{k2}}{dF}$$

$$\tau_3 = \frac{dk \cdot e_3}{dF}$$

أو كذلك (2-8)

$$\tau_3 = \frac{dK_k \cdot e_{k3}}{dF}$$

أو :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{dN}{dF} \\ \tau_2 &= \frac{dT_2}{dF} \\ \tau_3 &= \frac{dT_3}{dF} \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

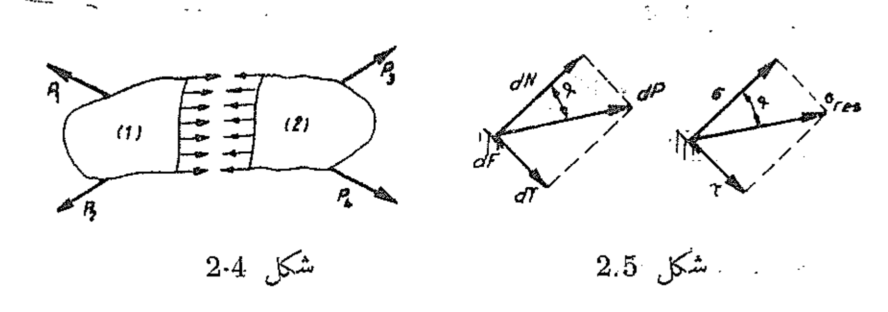
حيث أن dN هي القوة الناظمية التي يحملها dF .

وأن dT_2 , dT_3 هي القوى المماسية أو القوى القاطعة (قوى القص) التي يحملها dF . ان الاجهادات هي توابع مكانية (Ortsfunktionen) :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1 (x_1 , x_2 , x_3) \\ \tau_2 &= \tau_2 (x_1 , x_2 , x_3) \\ \tau_3 &= \tau_3 (x_1 , x_2 , x_3) \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

وهي تتعلق علاوة على ذلك من إتجاه القطع في النقطة المدروسة . سوف تتم ، فيما بعد ، العودة لهذه الملاحظة بشكل مفصل .

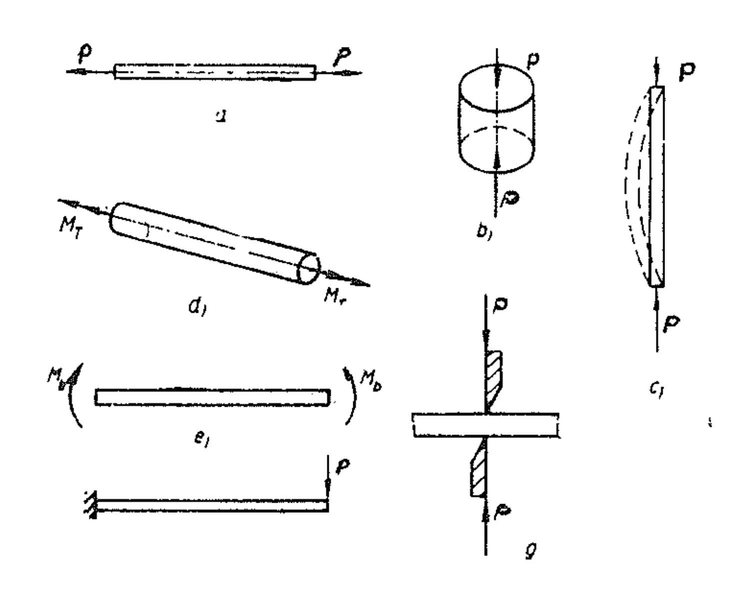
مما سبق ذكره يلاحظ أن تحليل الاجهاد الفعلي الى مركباته يتم حسب قاعدة متوازي الاضلاع. كما ويلاحظ ايضاً ، في الحالة الفراغية ، ظهور ثلاثة مركبات للاجهاد تؤثر على السطح هما اجهاد ناظمي واحد واجهادين مماسين يتعامد كل منهما على الآخر . اما في الحالة المستوية (شكل 2.4) فتظهر لشعاع الاجهاد مركبتين فقط هما إجهاد ناظمي واحد واجهاد مماسي واحد أيضاً (شكل 2.5) .



شكل 2.4   شكل 2.5

يعرف الاجهاد الناظمي الذي يخرج من العنصر السطحي بموجب (اجهاد شد) .
بسبب العلاقة الخطية بين الاجهادات (Spannungen) وتغيرات الشكل (Deformationen) التي ستفترض فيما بعد ، يمكن إعادة المسائل الواقعية المعقدة الى مجموعة من المسائل الجزئية . اما النتيجة الفعلية فيتم الحصول عليها بجمع النتائج الافرادية لكل من المسائل الجزئية جبرياً أو

أو كذلك هندسياً (قانون التنضد أو ما يسمى ايضاً بقانون جمـــع الآثار) . أما أهم حالات التحميل التي تظهر في الحياة العملية فهي التي سيتم عرضها في الشكل (2.6) وهي تعني منفردة:



شكل 2-6

a ـ شد صافي (reiner Zug) ، b ـ ضغط صافي (reiner Druck)

c ـ تحنيب قضيب نحيف مضغوط (مشكلة إستقرار)
(Stabilitätsproblem, Knickung eines schlanken Druckstabes)

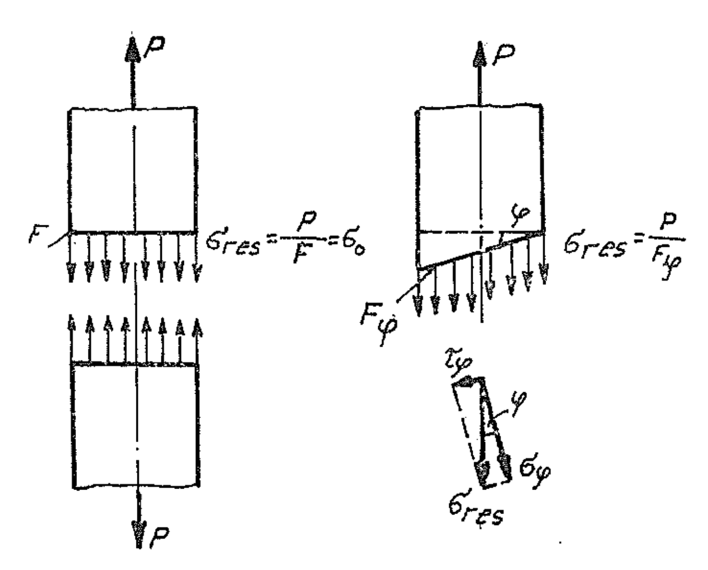
d ـ فتل (Drillung oder Torsion) ، e ـ انعطاف صافي (reine Biegung)

f ـ انعطاف قوة عرضية (Querkraftbiegung) ، g ـ القـص (التحميـل المماسي الصافي)
.(Abscherung , reine Schubbeanspruchung)

٢ ـ ٢ حالة الاجهاد الخطية (المحورية ، وحيدة المحور)

يشير الاجهاد المحصل σ_{res} في هذه الحالة دائماً باتجاه محور القضيب (الاوسط) . فيـما يلي سوف تستخدم فرضية توزيـع الاجهادات على المقطع العرضي توزيعاً منتظماً كأساس لهذه الفقرة. تصلح هذه الفرضية في الامكنة التي تبعد بعداً كافياً عن مكان تاثير القوى .

حسب نظرية ده سانت فينانت (DE SAINT-VENANT) فان تاثير نقل القوى يتخامدبسرعة . يعطي تطبيق شرط توازن القوى الافقية على قطع ناظمي (عمودي) على محور القضيب (الاوسط) العلاقة التالية :



شكل 2-7

$$\sigma_0 = \frac{P}{F} \tag{2.11}$$

ويعطي من اجل سطح قطع يميل بزاوية ما (بالنسبة لمحور القضيب الاوسط) (شكل 2-7)، العلاقة الاتية :

$$\sigma_{res} = \frac{P}{F_\varphi} = \frac{P}{F} \cos\varphi = \sigma_0 \cos\varphi \tag{2.12}$$

بتحليل الاجهاد σ_{res} بالاتجاهين الناظمي على سطع القطع والماسي عليـه ، يتم الحصـــول على المركبات التالية :

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \sigma_{res} \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}\sigma_0 (1 + \cos 2\varphi) \\ \tau_\varphi &= \sigma_{res} \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\varphi \end{aligned} \tag{2.13}$$

بكتابة المعادلات السابقة (1-4) كما يلي :

$$\sigma_\varphi - \frac{\sigma_0}{2} = \frac{\sigma_0}{2}\cos 2\varphi$$

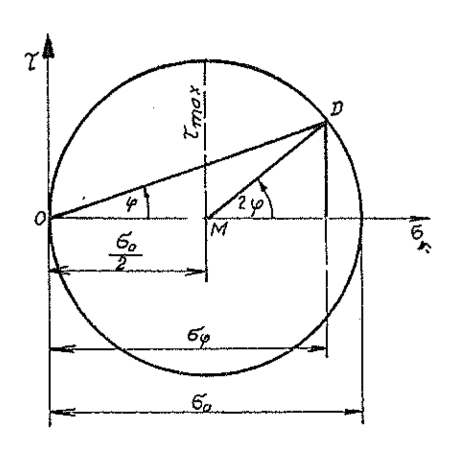
$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\varphi$$

ثم تربيع طرفي المعادلتين وجمعها مع بعض يتم التوصل لمعادلة دائرة تسمى **دائرة اجهادمور** :

$$(\sigma_\varphi - \frac{\sigma_0}{2})^2 + \tau_\varphi^2 = \left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2 \quad (2\text{-}14)$$

يوضح الشكل (2-8) انشاء الدائرة المذكورة . ترسم الاجهادات باشارتها . تعتبر الزاوية φ بعكس عقارب الساعة موجبة (يؤخذ الاتجاه الموجب بالمفهوم الرياضي) .

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\tau_\varphi}{\sigma_\varphi} \quad (2\text{-}15)$$



شكل 2-8

من أجل الاجهادات الاعظمية يتم الحصول من دائرة إجهاد مور على القيم التالية :

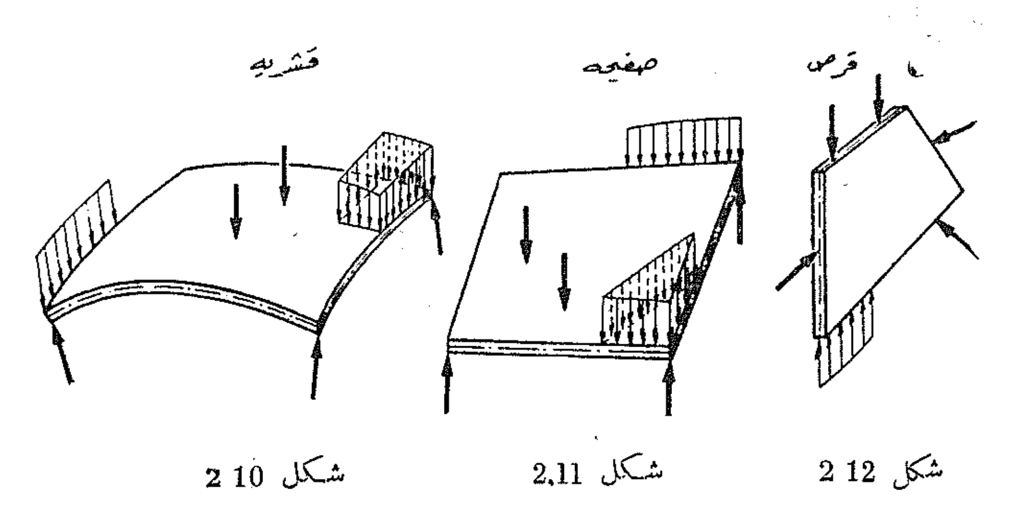
$$\max\sigma = \sigma_\varphi\ (\varphi = 0)$$
$$\max\tau = \tau_\varphi\ (\varphi = 45^\circ) = \frac{\sigma_0}{2} \quad (2\text{-}16)$$

٢ ـ ٣ حالة الاجهاد االمستوية (ثنائية المحور)

٢ ـ ٣ ـ ١ تعريف حالة الاجهاد المستوية ، الاجهادات المماسية المزدوجة

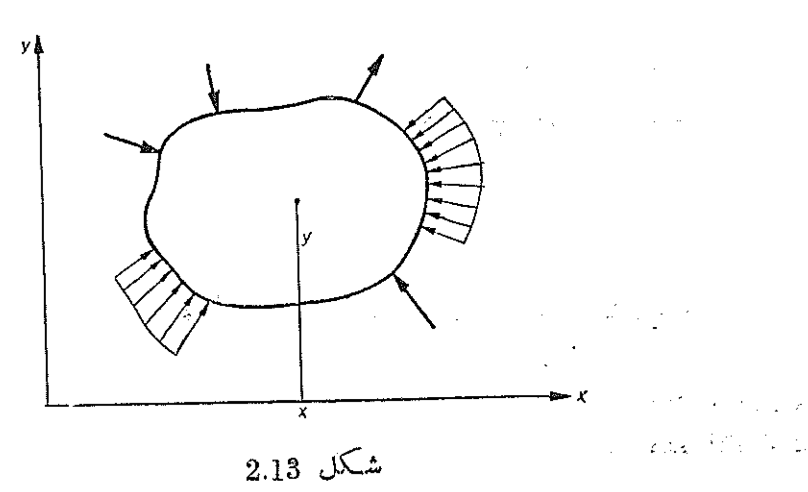
تظهر في المجالات الهندسية عناصر انشائية تكون فيها احدى الابعاد صغيرة بالنسبة للبعدين الآخرين ، هذا يعني ان السماكة صغيرة بالنسبة للبعدين الآخرين . تسمى مثل هذه الانشاءات عندما تكون منحنية بالقشريات (شكل 10-2) وعندما تكون مستوية فهي تسمى حسب نوع الحمولات المؤثرة عليهـــا ، اما صفيحة (بلاطة) او قرص (شريحة ، لوح) . فالصفائح (البلاطات) هي عناصر انشائية مستوية (جمل حاملة مستوية) رقيقة تحمل عمودياًعلى سطحها

الاوسط (شكل 2-11) أما الأقراص فهي جمل حاملة رقيقة تقع الحمولة المطبقة عليهـــا في مستويها (شكل 2-12) .



شكل 2 10 — شكل 2.11 — شكل 2 12

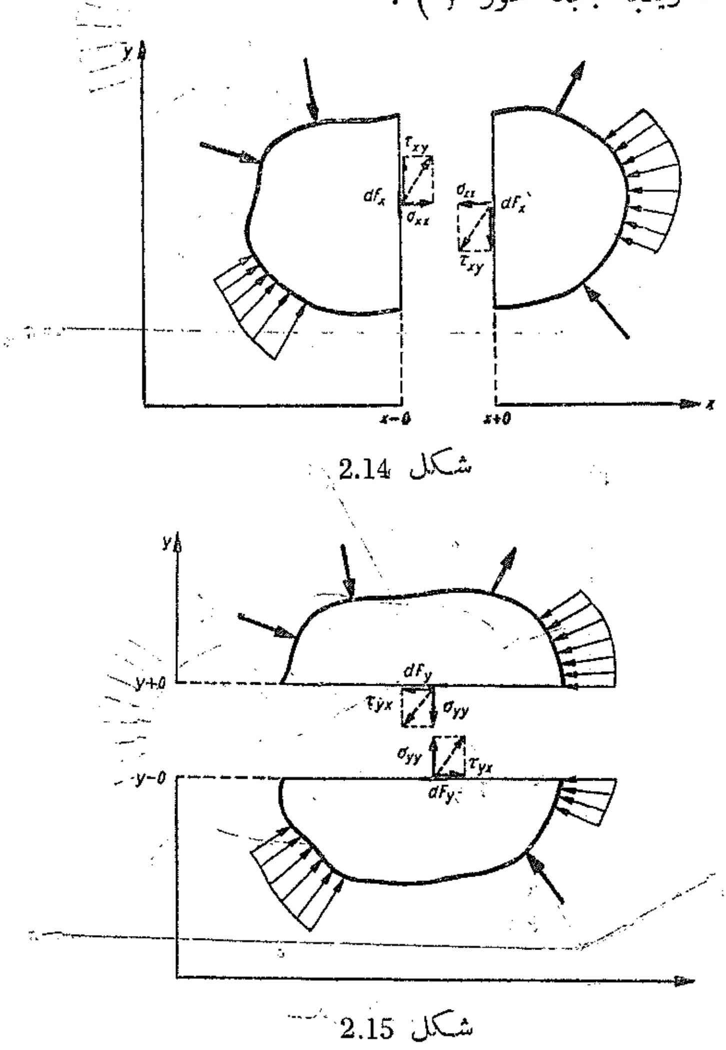
سوف تتم فيما يلي دراسة حالة الاجهاد في الاقراص . نتيجة لتحميل القرص بحمولة تقـع في مستويه الاوسط تتشكل داخله حالة إجهاد يمكن اعتبارها بشكل تقريبي انها حالة اجهادمستوية. تتوزع كافة القوى الداخلية ، في اي مكان من القرص ، على سماكته h توزيعاً منتظمـــاً . تقع مجموعة النسب (مجموعة المحاور الاحداثية) y , x في المستوي الاوسط للقرص (شكل 2.13). تتواجـــد عـــند سطوح القطـوع $x = const$, $y = const$ ، المناصـــر السطحية $d F_x = hdy$ و $dF_y = hdx$, (شكل 2-14 و 2-15) .



شكل 2.13

يحلل شعاع الاجهاد الذي يؤثر على تلك السطوح الى مركبتين وبذلك يتم الحصول على الاجهاد

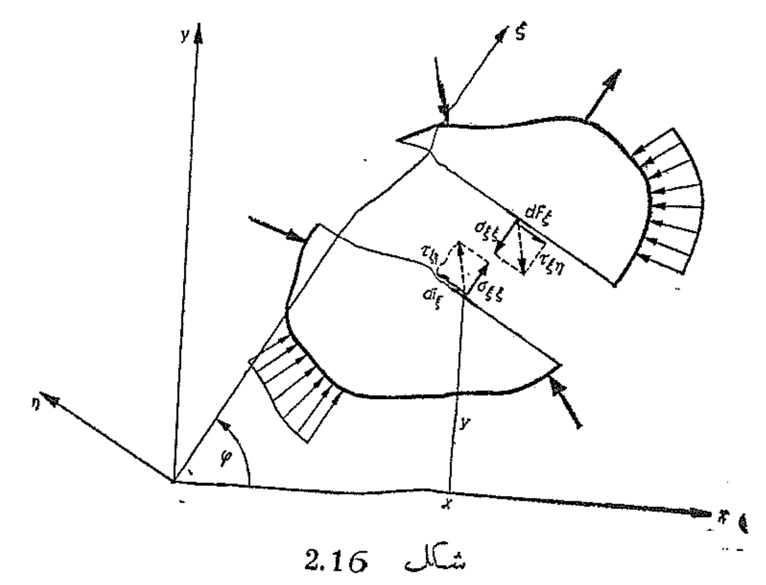
الناظمي والاجهاد المماسي هناك . تعتبر الاجهادات موجبة عندما تكـــون في ضفاف القطـع الموجبة (ضفة القطع $x-0 = const$ وضفة القطع $y-0 = const$) باتجاه المحاور الاحداثية الموجـــبة ، وفي ضفة القطع السالبــة (ضفة القطع $x + 0 = const$ وضفـة القطع $y + 0 = const$) عندما تكون بعكس اتجاه المحاور الاحداثية الموجبة وذلك بناء على مـبدأ الفعل ورد الفعل . للتمكن من التفريق بين كل من الاجهادات الناظمية والاجهادات المماسية الموجودة في كل من سطوح القطوع المتعامدة (التي تتعامد على بعضها) سوف يتم تذيلها بدليلين الدليل الاول يشير الى سطح القطع (او الناظم على سطح القطع) أما الدليل الثاني فيشير الى اتجاه الاجهاد المعتبر (على سبيل المثال σ_{xx} هو الاجـــهاد الناظمي الذي يؤثر على السطح $x = const$ ، أي السطح الذي ينطبق ناظمه على المحور x ، ويتجه باتجـاه المحور x . امـا τ_{xy} فهو الاجهاد المماسي الذي يؤثر على السطح $x = const$ ، اي السطح الذي ينطبـق ناظمه على المحور x ، ويتجه باتجاه المحور y) .



شكل 2.14

شكل 2.15

وأحد فقط يشير الى اتجاه الاجهاد وهو
هناك كثير من المراجع تذيل الاجهاد الناظمي بدليل الذي يؤثر فيه الاجهاد الناظمي المذكـــور
ينطبق في نفس الوقت على اتجاه الناظم على السطح x = const ويتجه باتجاه
(على سبيل المثال σ_x هو الاجهاد الناظمي الذي يؤثر على السطح
المحور x) . اما الاجهاد الماسي فيذيل هناك لا هو الحال في هذا الكتاب بدليلين .
بنفس الطريقة سوف يعبر عن الاجهادات في السطوح المائلة .
لقد تم في الاشكال (2.16) و (2.17) تمثيل الاجهادات الموجـودة في سطوح القطـع

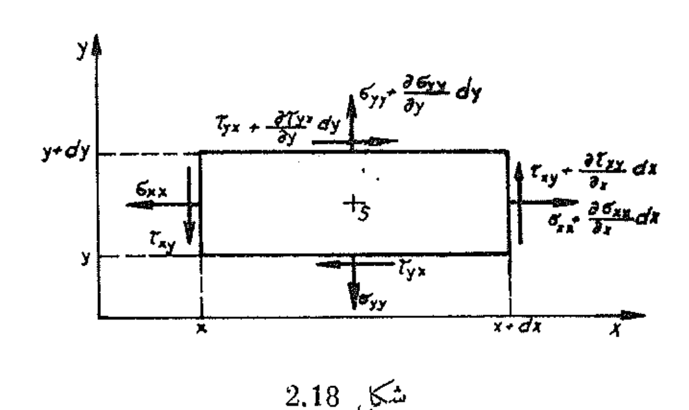


شكل 2.16

شكل 2.17

المنسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية ξ, η التي تشكل مع مجموعة $\eta = const\ ,\ \xi = const$ النسب الاصلية الزاوية φ .

يظهر الشكل (2. 18) الاجهادات التي تؤثر على عنصر جسمي (Körperelement) ، ابعاده $dz\ ,\ dy\ ,\ dx$ بعد تحليلها الى مركباتها الناظمية (الاجهاد الناظمي) والمماسية (الاجهاد المماسي). وبنشر الاجهادات على السطح $x + dx = const$ وكذلك على السطح $y + dy = const$ على شكل سلسلة تايلور (TAYLOR — Reihe) واهمال الحدود من المرتبة العالية يتبقى منها ما أشير اليه في الشكل (2.18) .



شكل 2.18

يعطي تطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة لمركز الثقل ، العلاقة التالية :

$$(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) dy\, dz \frac{dx}{2} + \tau_{xy}\, dy\, dz \frac{dx}{2} - (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy).$$

$$\cdot\ dx\, dz \frac{dy}{2} - \tau_{yx}\, dx\, dz \frac{dy}{2} = 0$$

باهمال زيادات الاجهادات بالنسبة للاجهادات يتم التوصل للعلاقة الهامة التالية :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad (2{\cdot}17)$$

تسمى هذه العلاقة بعلاقة تساوي الاجهادات المماسية المزدوجة (المترتبة) (Gleichheit der zugeordnete Schubspannungen) وهي تشير الى ان الاجهادات المماسية التي تظهر في مستويين متعامدين هي متساوية . تظهر الاجهادات المماسية دائماً بشكل مزدوج وكلاهما إما أن تكون داخلة الى الحافة او خارجة منها وتسمى هذه الاجهادات

بالاجهادات المماسية المترتبة (المزدوجة).
(zugeordnete Schubspannungen)

يعطي تطبيق شروط توازن القوى ، العلاقات التالية :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \qquad (2\text{-}18)$$

تعين حالة الاجهاد المستوية بواسطة المركبات الثلاثة للاجهاد σ_{xx} و σ_{yy} و $\tau_{yx} = \tau_{xy}$. وبينما تنعدم الاجهادات التالية :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

تسمى الاجهادات الثلاثـــة (قيم الاجهاد الثلاثة) **بمركبـات تنـــور الاجهـاد المستوي**
:(Komponenten des ebenen Spannungstensors)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}19)$$

٢ ـ ٣ ـ ٢ الاجهادات على سطوح القطوع المائلة

سوف يتم الآن ايجاد علاقات تربط بين الاجهادات :

$$\sigma_{xx} \,,\, \tau_{xy} = \tau_{yx} \,;\, \sigma_{yy}$$

في النقطة ذات الاحداثيـــات (x , y) من قرص والموجودة على سطحيـــن متعامـدين هما $dF_x = hdy$ و $dF_y = hdx$ وبين الاجهادات:

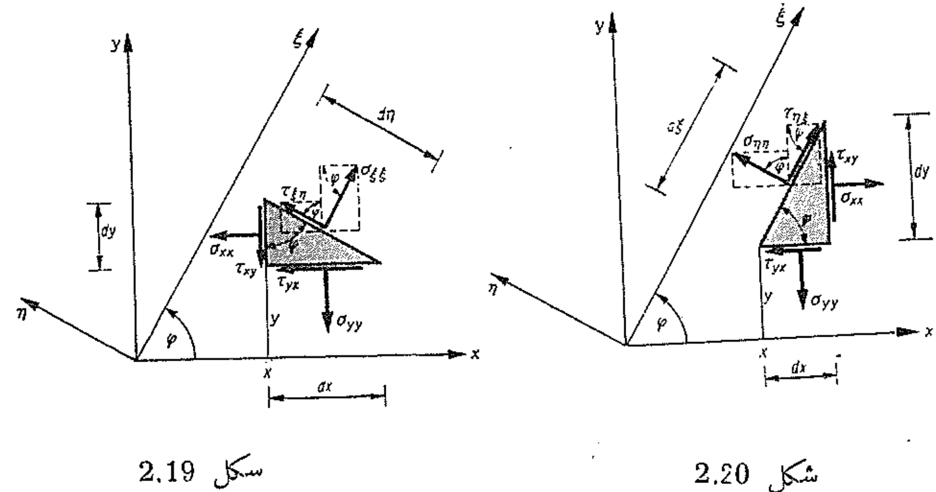
$$\sigma_{\xi\xi} \,,\, \tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} \,;\, \sigma_{\eta\eta}$$

لنفس النقطة $(x , y) = (\xi , \eta)$ والموجودة على سطحين متعامدين اخرين هما $dF_\xi = hd\eta$ و $dF_\eta = hd\xi$ وتشكلان مع السطوح الاصلية السابقة الزاويه φ . لهـــذه الغاية سوف يتم اعتبار الاجهادات الموجودة على سطوح قطوع المواشير المثلثية القائمة الممثلة في الاشكال (2.19) و (2.20) والتي تبلغ مساحة كل من جوانبها dF_ξ , dF_y , dF_x , dF_η , dF_y , dF_x . بما ان القرص ككل موجود تحت تأثير مجموعة متوازنة ، لذلك ينبغي ايضاً ان تكون القـوى المؤثرة على المواشير المقتطعة منه :

σ_{xx} hdy , τ_{xy} hdy . σ_{yy} hdx , τ_{yx} hdx , $\sigma_{\xi\xi}$ hdη , $\tau_{\xi\eta}$ hdη

و

σ_{xx} h dy , τ_{xy} hdy , σ_{yy} hdx , τ_{yx} hdx , $\sigma_{\xi\xi}$ hdξ , $\tau_{\eta\xi}$ hdξ



سكل 2.19   شكل 2.20

متوازنة (موجودة في حالة توازن) . بتطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة لنــــقطة منتصف الوتر ينتج :

$$\tau_{xy}\, h\, dy \, . \, \frac{dx}{2} - \tau_{yx}\, h\, dx\, \frac{dy}{2} = 0$$

$$-\tau_{xy}\, hdy \, . \frac{dx}{2} + \tau_{yx}\, h\, dx\, \frac{dy}{2} = 0$$

من هاتين العلاقتين يتم التوصل للعلاقة الهامة التالية :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad (2.20)$$

والتي تم الحصول عليها سابقاً . يعطي تطبيق شروط توازن القوى في كل من الاتجاهين y , x العلاقات التــالية :

$$\sigma_{\xi\xi}\, hd\eta \cos\varphi - \tau_{\xi\eta}\, hd\eta \sin\varphi - \sigma_{xx}\, h\, dy - \tau_{yx}\, hdx = 0$$
$$\sigma_{\xi\xi}\, hd\eta \sin\varphi + \tau_{\xi\eta}\, hd\eta \cos\varphi - \tau_{xy}\, hdy - \sigma_{yy}\, hdx = 0$$

و

$$-\sigma_{\eta\eta}\, hd\xi \sin\varphi + \tau_{\eta\xi}\, hd\xi \cos\varphi + \sigma_{xx}\, hdy - \tau_{yx}\, hdx = 0$$

$$\sigma_{\eta\eta}\, hd\xi \cos\varphi + \tau_{\eta\xi}\, hd\xi \sin\varphi + \tau_{xy}\, hdy - \sigma_{yy}\, hdx = 0$$

بالاستعانة بالعلاقات الهندسية التالية :

$$dx = d\eta \sin\varphi \,,\; dy = d\eta \cos\varphi \,,\; dx = d\xi \cos\varphi \,,\; dy = d\xi \sin\varphi$$

يتم من العلاقات السابقة (علاقات التوازن) الحصول على المعادلات الاتية :

$$\sigma_{\xi\xi} \cos\varphi - \tau_{\xi\eta} \sin\varphi = \sigma_{xx} \cos\varphi + \tau_{yx} \sin\varphi \,,$$

$$\sigma_{\xi\xi} \sin\varphi + \tau_{\xi\eta} \cos\varphi = \tau_{xy} \cos\varphi + \sigma_{yy} \sin\varphi$$

و

$$\sigma_{\eta\eta} \sin\varphi - \tau_{\eta\xi} \cos\varphi = \sigma_{xx} \sin\varphi - \tau_{yx} \cos\varphi \,,$$

$$\sigma_{\eta\eta} \cos\varphi + \tau_{\eta\xi} \sin\varphi = -\tau_{xy} \sin\varphi + \sigma_{yy} \cos\varphi$$

بحل هذه المعادلات بالنسبة للقيم $\sigma_{\xi\xi}$ ، $\tau_{\xi\eta}$ ، $\sigma_{\eta\eta}$ ، $\tau_{\eta\xi}$ وبعد اعتبار العلاقة (2-20) يتم الحصول على النتائج التالية :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\varphi) &= \sigma_{xx} \cos^2\varphi + \sigma_{yy} \sin^2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta}(\varphi) &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (2,21)$$

و

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta}(\varphi) &= \sigma_{xx} \sin^2\varphi + \sigma_{yy} \cos^2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{\eta\xi}(\varphi) &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}22)$$

من المعادلات (2-21) و (2-22) يتم التوصل لصلاحية العلاقة :

$$\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} \qquad (2\text{-}23)$$

والتي تعود لمجموعة نسب مدورة . باجراء ادخال العلاقات الهندسية التالية :

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \quad .$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi)$$

في العلاقات (2.21) و (2-22) ينتج :

$$\sigma_{\xi\xi}(\varphi) = \sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{\eta\eta}(\varphi) = \sigma_{\varphi+\pi/2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

(2,24)

$$\tau_{\xi\eta}(\varphi) = \tau_{\varphi} = \tau_{\eta\xi}(\varphi) = -\tau_{\varphi+\pi/2} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

من هذه العلاقات يتم اشتقاق المعادلات التالية :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\varphi) + \sigma_{\eta\eta}(\varphi) &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \\ \sigma_{\xi\xi}(\varphi)\sigma_{\eta\eta}(\varphi) - [\tau_{\xi\eta}(\varphi)]^2 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau^2_{xy} \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}25)$$

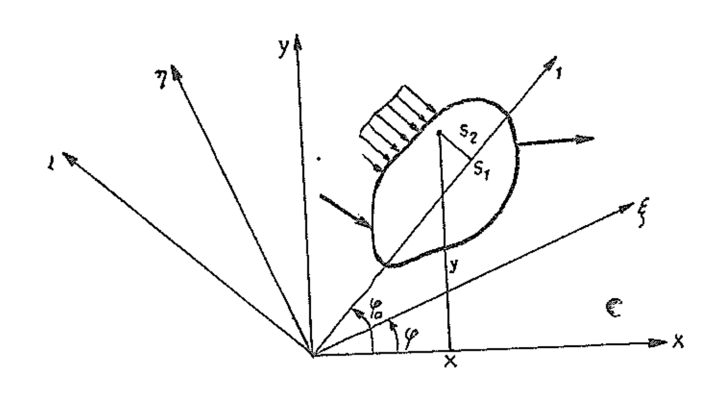
اذاً تبقى العلاقات (2-25) مستقلة عن دوران مجموعة المحاور الاحداثية .

حسب العلاقة (2-24) فان الاجهادات في المجموعة ξ ، η تتعلق من الاجهادات في المجموعة x ، y ومن الزاوية المتغيرة φ .

٢ ـ ٣ ـ ٣ الاجهادات الرئيسية والمحاور الرئيسية

سوف يتم الان تعيين الزاوية التي تأخذ عندها الاجهادات $\sigma_{\varphi} = \sigma_{\xi\xi}$ و $\sigma_{\eta\eta} = \sigma_{\varphi=\pi/2}$ و $\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}$ قيماً حدية ، أما المعادلات الشرطية اللازمة من اجل ذلك فهي :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\xi\xi}(\varphi)}{d\varphi} &= 0 = 2 \left(-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \right) \\ \frac{d\sigma_{\eta\eta}(\varphi)}{d\varphi} &= 0 = 2 \left(\frac{\sigma_{xx} - \alpha_{yy}}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi \right) \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}26)$$



شكل 2-20 b

$$\frac{d\tau_{\xi\eta}(\varphi)}{d\varphi} = 0 = 2\left(-\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi\right) \qquad (2.27)$$

تتحقق المعادلات (2.27) من اجل اية زاوية $\varphi = \varphi_0$ تحقق العلاقة :

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} \qquad (2.28)$$

من العلاقة التالية :

$$\mathrm{tg}\, 2\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{tg}\, 2\varphi_0$$

يتبين أنه يوجد هناك سطحان متعامدان (سطوح الاجهادات الرئيسية) ذات اجهادات ناظمية حدية (اجهادات رئيسية) (شكل 1,20 b) . من العلاقات (2.26) و (2.25) يتم التوصل للمعادلة التالية :

$$\frac{d\sigma_{\xi\xi}(\varphi_0)}{d\varphi} = -\frac{d\sigma_{\eta\eta}(\varphi_0)}{d\varphi} = 2\left(-\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\varphi_0 + \tau_{xy}\cos 2\varphi_0\right) = 2\tau_{xy} = 0$$

حسب هذه العلاقة فان الاجهادات المماسية تنعدم على سطوح الاجهادات الرئيسية . تبلغ الاجهادات الرئيسية التي تتشكل عند الزوايا φ_0 و $\varphi_0 = \pi/2$ بالنسبة للمحور x القيم التالية :

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi_0 + \tau_{xy}\sin 2\varphi_0$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi_0 - \tau_{xy}\sin 2\varphi_0$$

وباستخدام التوابع الزاوية المعروفة :

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{tg\, 2\varphi_0}{\sqrt{1+tg^2 2\varphi_0}} = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\varphi_0}} = \frac{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

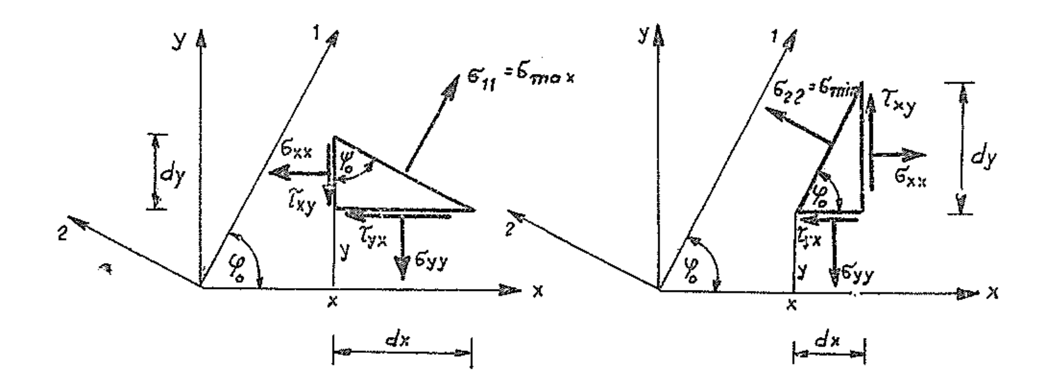
يتم الحصول على علاقات الاجهادات الرئيسية بعد اختزال التوابع الزاوية ممثلة بالشكل الجديد التالي :

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \max \sigma \quad (2.28\ a)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \min \sigma \quad (2.28\ b)$$

وتسمى المحاور 1 (s_1) , 2 (s_2) التي تتعين بواسطة الزاوية φ_0 **بمحاور الاجهادات الرئيسية أو اتجاهات الاجهادات الرئيسية** وتسمى الاجهادات σ_{11} و σ_{22} المتشكلة عند تلك المحاور **بالاجهادات الناظمية الرئيسية أو باختصار الاجهادات الرئيسية** في نقطة ثابتة من قرص .

من بين كل المستويات التي تمر من نقطة ما من القرص ، هناك مستويان متعامدان $s_1 = const$, $s_2 = const.$ ، تأخذ الاجهادات الناظمية عندها قيماً حدية . من أجل مستويات الاجهادات الرئيسية المذكورة ينعدم الاجهاد المماسي (شكل 2-21) .



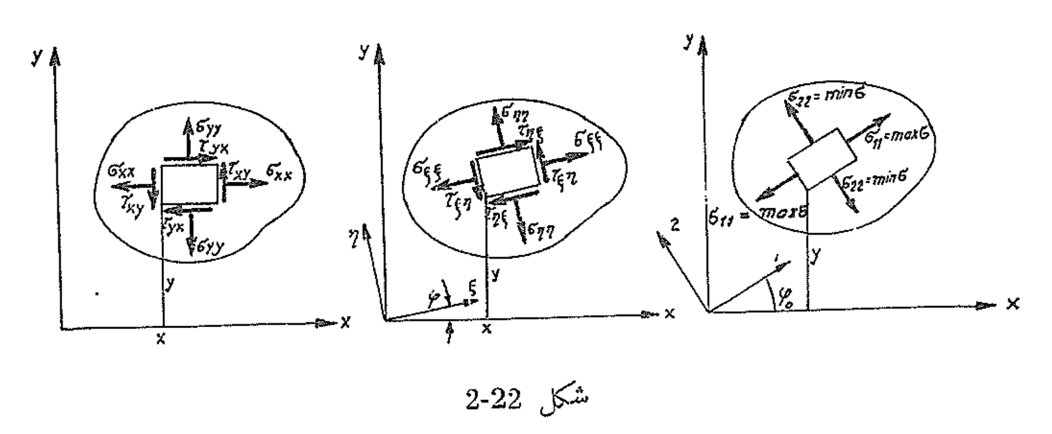
شكل 2-21

يمكن تمثيل اجهاد المادة في النقطة ذات الاحداثيات y , x من قرص بالطريقة المشار اليها في الاشكال (2-22) المتتاليــــة . لايضاح اجهاد جسم ما يفضـــل استـخدام الاحداثيات 1 (s_1) , 2 (s_2) فهي انسب مجموعات المحاور الاحداثية لذلك . حسب إشـارة الاجهـادات الناظمية الرئيسية فان النقطـة ذات الاحداثيات (y , x) من المادة سـوف تشـد او تضغط بالاتجاهات s_1 , s_2 .

تتحقق المعادلة (2-27) من اجل الزاوية $\varphi=\varphi_1$ التي تحقق العلاقة التالية :

$$tg\ 2\varphi_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_{yy}}{2}$$

بواسطة هذه الزاوية يتم هنا ايضاً تعيين وضع خاص لمجموعة المحاور الاحداثية التي سيرمز لها بالاحرف s_a , s_b والتي من صفاتها ان الاجهادات المماسية عندها تأخذ قيماً حدية .



شكل 22-2

بشكل عام لا تخلو سطوح الاجهادات المماسية الرئيسية ، التي تظهر عند الزوايا φ_1 , $\varphi_1+\pi/2$ من الاجهادات الناظمية . بالاستعانة بالعلاقات التالية :

$$\tau_1 = -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\varphi_1 + \tau_{xy}\cos 2\varphi_1 = -\tau_2 \qquad (2.28\ c)$$

او كذلك

$$\left.\begin{matrix}\tau_1\\ \tau_2\end{matrix}\right] = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \left[\begin{matrix}\max\ \tau\\ \min\ \tau\end{matrix}\right. \qquad (2\,8\ d)$$

يتم تعيين الاجهادات المماسية الرئيسية $(=\tau_{ab})$ τ_1 , τ_2 $(=-\tau_{ba})$.

يتشكل القص الصافي (القص المجرد) عندما تكون سطوح الاجهادات المماسية الرئيسية خالية من الاجهادات الناظمية وهذه هي حالة خاصة وليست حالة عامة (على سبيل المثال عندماتكون $\sigma_1 = -\sigma_2$) . من العلاقة التالية:

$$tg\, 2\varphi_0 \cdot tg\, 2\varphi_1 = -\frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} \cdot \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2\,\tau_{xy}} = -1 = \text{const.} \qquad (2.28e)$$

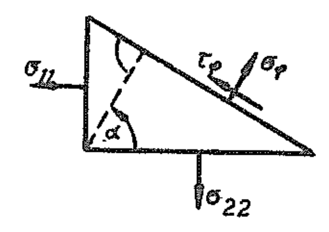
ينتج أن :

$$\varphi_1 = \varphi_0 \pm \frac{\pi}{4}$$

حسب هذه العلاقة فان الناظم على سطوح الاجهادات المماسية الرئيسية ينصف الزاوية القائمة الموجودة بين اتجاهات الاجهادات الرئيسية .

في حالة كون الاجهادات الرئيسية $\sigma_{11} = \max \sigma$, $\sigma_{22} = \min \sigma$ هي المعطاة عندئذ يتم الحصول على اجهادات القطع الموجودة في مستوي يميل على سطوح الاجهادات الرئيسية بالزاوية α (شكل 2.23) بواسطة العلاقة التالية :

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cos 2\alpha \qquad (2.28)$$
$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\sin 2\alpha$$



شكل 2,23

وفي حالة اعتبار الزاوية α هي زاوية الفرق التالية :

$$\alpha = \varphi - \varphi_0$$

حيث أن φ_0 هي الزاوية المحصورة بين الناظم على سطح الاجهادات الرئيسية وبين المحور x وأن

φ هي الزاوية المحصورة بين الناظم على السطح المدروس وبين المحور x ، عندئذ يتم الحصول على اجهادات القطع الممثلة بالعلاقة (2.28) كما يلي :

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cos 2(\varphi_0-\varphi)$$

$$\sigma_\varphi = \qquad + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\sin 2(\varphi_0-\varphi) \qquad (2.29)$$

حيث ان :

$$\sigma_{11}+\sigma_{22} = \sigma_{xx}+\sigma_{yy}$$

$$\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} = \max\ \tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

٢ ـ ٣ ـ ٤ دائرة اجهاد مور لتعيين المحاور الرئيسية والاجهادات الرئيسية تخطيطياً

تمثل العلاقات (2.24) معادلات الاجهاد بالنسبة لمجموعة المحاور المدورة :

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_\varphi = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \sigma_{\varphi+\pi/2} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} = \tau_\varphi = -\tau_{\varphi+\pi/2} = -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

لقد اكد العالم مور (Otto MOHR) امكانية ايضاح العلاقات (2.24) بواسطة دائرة تسمى **بدائرة اجهاد مور أو دائرة الاجهاد** (Spannungskreis) . باجراء تعديل بسيط على العلاقات السابقة ينتج :

$$\left(\sigma_{\xi\xi} - \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi\right)^2,$$

$$\left(\sigma_{\eta\eta} - \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi\right)^2,$$

$$\tau_{\xi\eta}^2 = \left(-\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi\right)^2$$

وبجمع كل من المعادلتين ، الاولى والثانيةمع المعادلةالثالثة يتم الحصول على معادلة دائرة الاجهاد:

$$\left(\sigma_{\xi\xi}-\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{\xi\eta}{}^3=\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2$$

و :

$$\left(\sigma_{\eta\eta}-\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{\xi\eta}{}^2=\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2$$

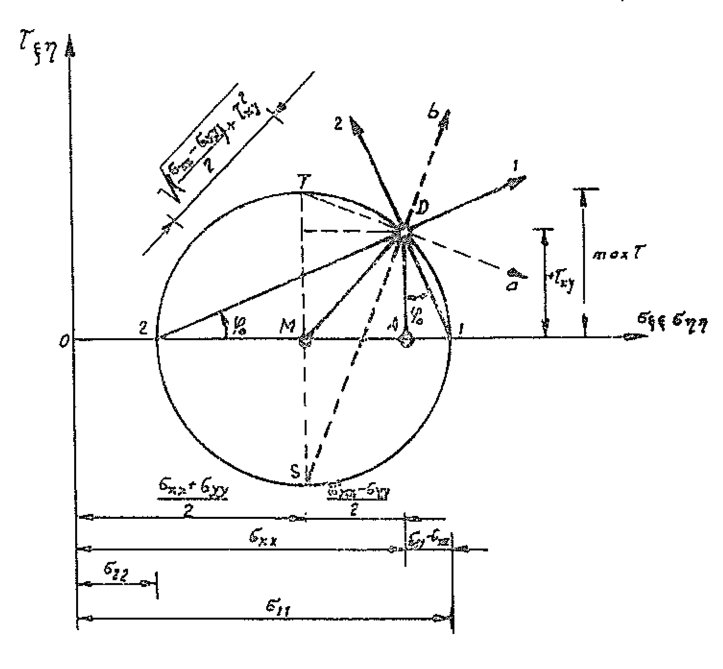
باعتبار القيم الثابتة σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} والقيم المتغيرة $\sigma_{\xi\xi}$ او كذلك $\sigma_{\eta\eta}$ فصلا (احداثيا افقياً) و $\tau_{\xi\eta}$ ترتيبا (احداثياً شاقولياً) لمجموعة محاور احداثية متعامدة (شكل 2-24) فان المعادلات السابقة تمثل معادلة نفس الدائرة التي يقع مركزها على النقطة ذات الاحداثيات :

$$\left(\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\ ,\ 0\right)$$

والتي يبلغ نصف قطرها :

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}$$

برسم $(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})/2$ يتم تعيين مركز الدائرة M وباضافة $(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})/2$ يتم الحصـــول على



شكل 2-24

النقطة A . باقامة عمود من النقطة A طوله τ_{xy} تتعين نقطة من الدائرة هي النقطـة D بحيث تمثل المسافة $\overline{MD}$ نصف قطر الدائرة . تمثل المسافة $\overline{OA}$ الاجهاد σ_{xx} .

تحدد نقاط تقاطع الدائرة مع المحور الافقي (النقاط 1 و 2) الاجهادات الرئيسية :

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

و :

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

اما مستقيمات الوصل $\overline{2D}$ و $\overline{1D}$ فتمثـل اتجاهات الاجهادات الرئيسـية (محاور الاجهـادات الرئيسية) .

تعين القيمة الاعظمية للاجهاد الماسي τ max بواسطة نصف قطر الدائرة :

$$\overline{MT} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

كما تعطي خطوط الوصل $\overline{1D}$ و $\overline{SD}$ اتجاهات الاجهادات الماسية الرئيسية (محاور الاجهادات الماسية الرئيسية) .

التطبيق العملي لدائرة اجهاد مور .

أ ـ المعطى : σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} .

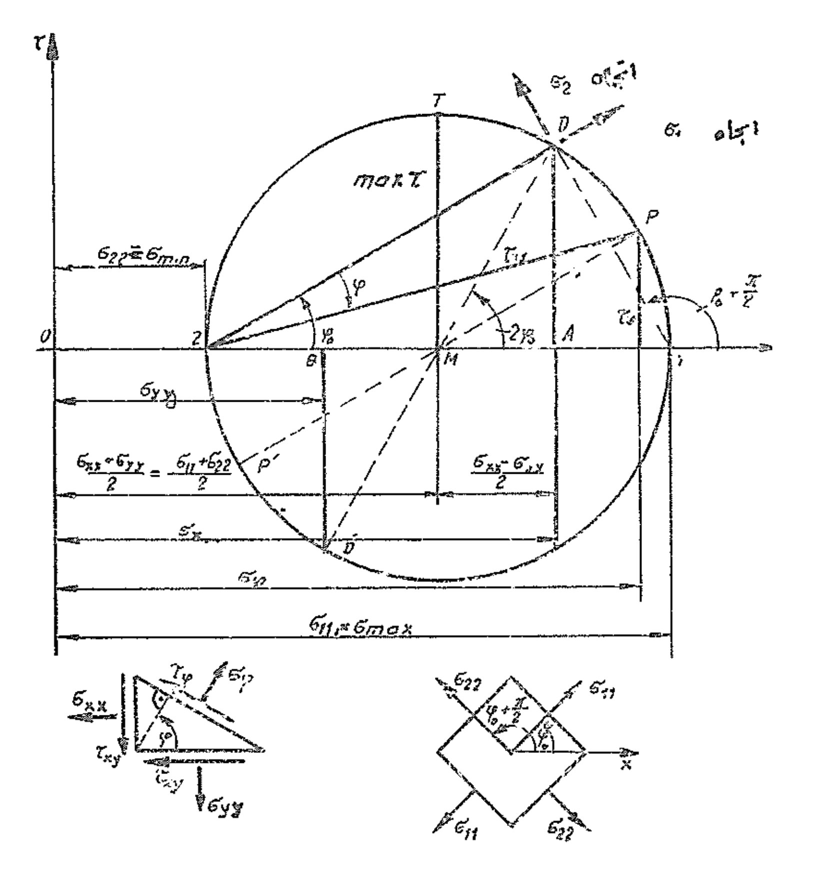
المطلوب : تعيين اجهادات القطع $\sigma_{\xi\xi}$ $(=\sigma_\varphi)$ و $\tau_{\xi\eta}$ $(=\tau_\varphi)$ والاجهـــادات الرئيســـية σ_{11} , σ_{22} واتجاه الاجهادات الرئيسية الذي يعبر عنه بالزاوية φ_0 .

الحل :

ترسم الاجهادات (مصحوبة باشارتها) على مجموعة الاحـــداثيات σ و τ (تعرف الاجهـادات الشادة بموجب) .

يوضح الشكل (2-25) طريقة انشاء اجهاد مور .

نصف قطر الدائرة :



شكل 2-25

$$\overline{DM} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

يتم رسم الاجهاد الماسي τ_{xy} ابتداء من نهاية σ_{xx} (أي في النـــقطة A) . تقاس الزاوية φ_0 في دائرة الاجهاد بعكس عقارب الساعة ابتداء من المحور σ (الاتجاه الرياضي الموجب) .

تمثل المسافة $\overline{MT}$ الاجهاد الماسي الاعظمي :

$$\max \tau = \left| \sigma_{11} - \sigma_{22} \right|$$

من دائرة الاجهاد يمكن دون ريب قراءة قيمة الاجهادات الرئيسية واتجاهاتها .

للتمكن من تعيين اجهادات القطع $\tau_{\xi\xi}\ (= \tau_\varphi)$ و $\sigma_{\xi\xi}\ (\sigma_\varphi)$ ينبغي الانطلاق من المعادلة (2-29) المعدة من اجل زاوية الفرق $\varphi - \varphi_0$. ترسم ابتداء من النقطة 2 وعلى الشـعاع $\overline{2D}$ الزاوية φ+باتجاه عقارب الساعة بذلك يقطع وترها ، دائرة الاجهاد في النقطـة P الـتي تعطي

احداثياتها الاجهادات $\sigma_{\xi\xi} (= \sigma_{\varphi})$ و $\tau_{\xi\eta} (= \tau_{\varphi 1})$. ان نقطـــة تقاطع امتداد المستقيم PM مع الدائرة هي النقطة P التي تمثل احداثياتها اجهادات القطع في المستوي الدور ابتـــداء من الزاوية φ بالزاوية $\pi/2$.

ب ـ المعطى : σ_{11} , σ_{22} , α .

المطلوب : تعيين الاجهادات σ_{α} و τ_{α} .

الحـل :

حسب العلاقة (2-28) فان معادلة دائرة الاجهاد هي :

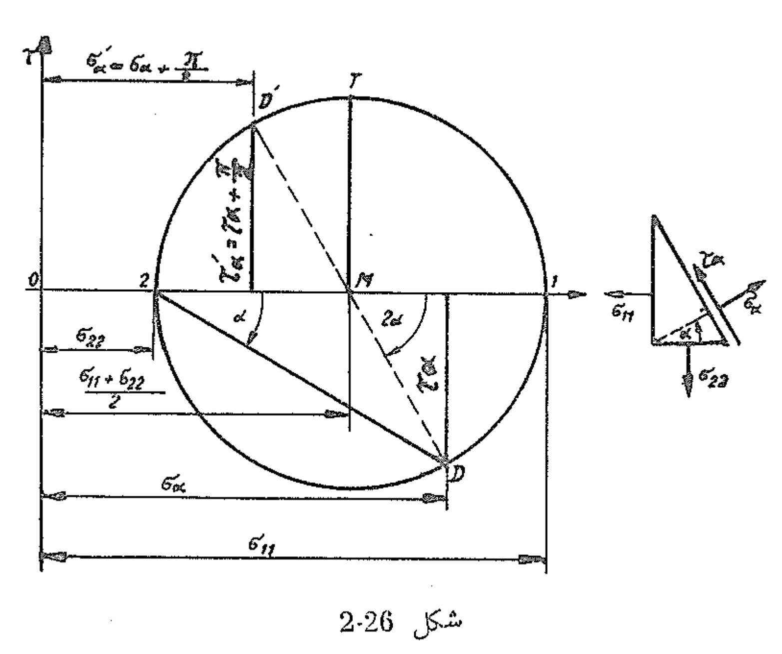
$$\left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2$$

يبلغ نصف قطر الدائرة القيمة التالية :

$$\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}$$

يشرح الشكل (2-26) طريقة انشاء دائرة اجهاد مور .

للحصول على اجهادات القطع σ_{α} و τ_{α} ينبغي ، ابتداء من النقطة 2 وعلى الشعاع $\overline{21}$ رسم



شكل 2-26

الزاوية α باتجاه عقارب الساعة وذلك لادخال الاشارة السالبة الموجـــودة في العلاقة (2-28) بعين الاعتبار .

ان σ'_α و τ'_α هي اجهـادات القطع في المستوي العمودي على المستوي الموجود عنـــد الزاوية α .

٢ ـ ٣ ـ ٥ مسارات الاجهاد في حقل الاجهاد المستوي

تسمى المنحنيات المستوية التي تعطي في كل نقطة من القرص الاتجاهات المتعامـــدة للاجهادات الرئيسية **بمسارات الاجهادات الناظمية الرئيسية** (Spannungstrajektorien der Hauptnormalspannungen)، أو **خطـوط الاجهـادات الرئيسية** (Hauptspannungslinien) . وبطريقـة مشابهة تعرف **مسارات الاجهـادات المماسية الرئيسية** (Spannungstrajektorien der Hauptschubspannungen) او ما تسمى ايضاً **بخطوط الاجهادات المماسية** (Schubspannungslinien) لحالة الاجهاد المستوية والتي تحدد في كل نقطة من القرص اتجاهات الاجهادات المماسية الرئيسية فيها .

من خلال مجموعتي المنحنيات المتعامدة السابقة الذكر تعطى صورة واضحـة عن حالة الاجهـاد في القرص .

بكل سهولة يمكن التوصل للمعادلات التفاضلية العائدة لكل من مساري الاجهـــادات (مسار الاجهادات الناظمية الرئيسية ومسار الاجهادات المماسية الرئيسية) .

بما أن الاجهـادات σ_{xx} ، σ_{yy} ، τ_{xy} هي توابـــع للاحداثيات x ، y ، لذا يستطاع من المعـادلة :

$$y'_1 = \operatorname{tg} \varphi_0$$

وبادخال العلاقات التـالية :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\sin 2\varphi_0}{1+\cos 2\varphi_0} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$= \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{11}-\sigma_{yy}} \qquad (2\text{-}29\ a)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1-\cos 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0} = \frac{1}{\tau_{xy}}\left[-\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right]$$

$$= \frac{\sigma_{11}-\sigma_{xx}}{\tau_{xy}}$$

التي تم الحصول عليها من العلاقات الآتية :

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\varphi_0}} = \frac{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

(2.29 b)

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{tg\, 2\varphi_0}{\sqrt{1+tg^2 2\varphi_0}} = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

بعين الاعتبار ، تعيين اتجاه الاجهادات الناظمية الرئيسية الاعظمية :

$$y'_1 = \frac{\sigma_{11}(x,y)-\sigma_{xx}(x,y)}{\tau_{xy}(x,y)} = \frac{\tau_{xy}(x,y)}{\sigma_{11}(x,y)-\sigma_{yy}(x,y)} \qquad (2.30)$$

بالاستمانة بالقيمة المقلوبة السالبة (negativen kehrwert) للعلاقة (2-30) يتم تعيين اتجاه الاجهاد الناظمي الرئيسي الاصغري σ_{22} :

$$-\frac{1}{y_1'} = y'_2 = -\frac{\tau_{xy}(x.y)}{\sigma_{11}(x,y)-\sigma_{xx}(x,y)} = -\frac{\sigma_{11}(x.y)-\sigma_{yy}(x,y)}{\tau_{xy}(x,y)}$$

(2.31)

بنفس التفكير يتم ، من اجل العناصر الاتجاهية للاجهادات المماسية (Richtungselemente) ، الحصول على العلاقة التالية :

$$y_n' = tg\,\varphi_1 = \frac{1-\cos 2\varphi_1}{\sin 2\varphi_1} = \frac{\sin 2\varphi_1}{1+\cos 2\varphi_1}$$

وبعد أعتبار العلاقة (2.29b) ينتج :

$$y_n' = \frac{-\tau_{xy}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}{-\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}} = \frac{-\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}}{\tau_{xy}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

(2.32)

$$\frac{1}{y_a'} = y_b' = \frac{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}}{-\tau_{xy}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}} = \frac{\tau_{xy}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}}$$

بهذا يكون قد تم التوصل للمعادلات التفاضلية العائدة لخطوط الاجهادات الرئيسية ولخطوط الاجهادات المماسية وهي بشكل عام معادلات لا خطية وفي اغلب الحالات لا يمكن حلها بشكل دقيق . للتمكن في كل حالة من الحصول على صورة تقريبية لتوزيع الاجهادات الرئيسية ينبغي رسم اتجاهات الاجهادات الرئيسية (العلاقة 2-29 a) في اكبر عدد ممكن من النقاط فيتشكل حقل للاتجاهات . بعد ذلك يحدد كل من مسارات الاجهاد .

لبيان الفائدة التي يتم الحصول عليها بمعرفة مسارات الاجهاد سوف يلجأ على سبيل المثال لمادة البيتون المسلح ، فأفضل ترتيب للقضبان الفولاذية (لقضبان التسليح) في قرص هو الذي يسير مع اتجاه مسارات الاجهادات الشادة ، ومن اجل امثال هذه الحالة تكفي دقة الطريقة التخطيطية (طريقة دائرة اجهاد مور) .

٢ ـ ٣ ـ ٦ أمثلة

مثال 34 :

تعطى حالة الاجهاد في قرص مستطيل الشكل بواسطة العلاقات التالية :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx}(x,y) &= \sigma_0 = \text{const} \\ \sigma_{yy}(x,y) &= \sigma_0 = \text{const} \\ \tau_{xy}(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}33)$$

فيما بعد سوف يرى بان حقل الاجهاد (Spannungsfeld) المذكور يتشكل في صفيحة محملة على السطوح الجانبية السطحية $p_x(x,y) = \sigma_0$ و $p_y(x,y) = \sigma_0$ (شكل 2-27) .
المطلوب : تعيين الاجهادات $\sigma_{\xi\xi}(\varphi)$ ، $\sigma_{\eta\eta}(\varphi)$ ، $\tau_{\xi\eta}(\varphi)$ لكل نقطة من القرص .

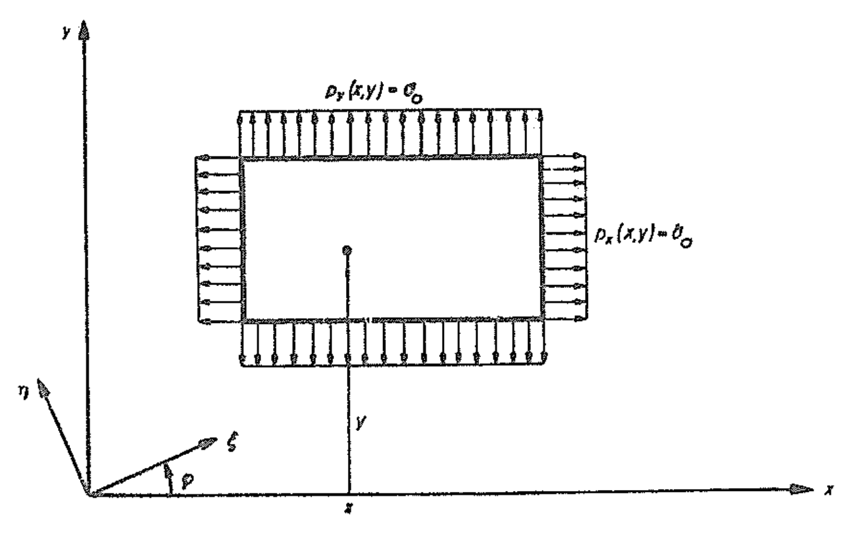
الحل :

من العلاقة (2-24) وبالاستعانة بالعلاقة (2-33) يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$\sigma_{\xi\xi}(\varphi) = \frac{\sigma_0 + \sigma_0}{2} = \sigma_0 = \text{const} .$$

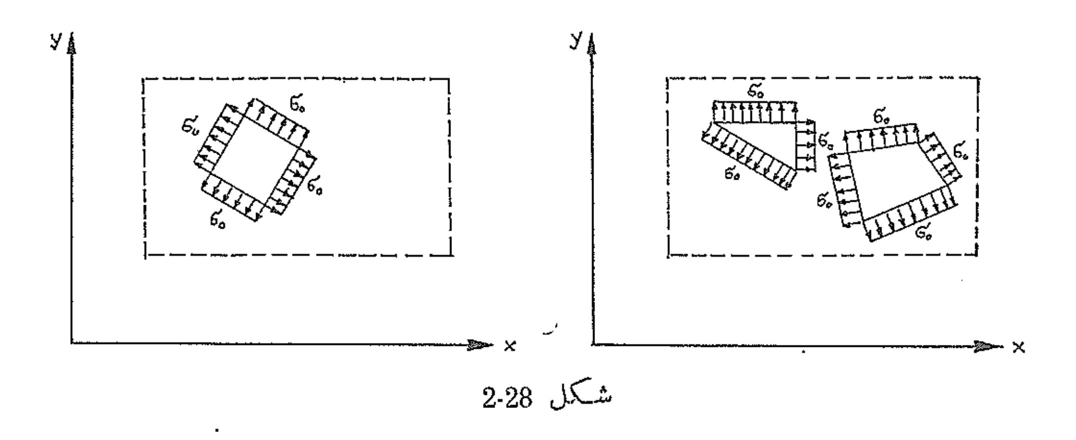
$$\sigma_{\eta\eta}(\varphi) = \frac{\sigma_0 + \sigma_0}{2} = \sigma_0 = \text{const} .$$

$$\tau_{\xi\eta}(\varphi = 0$$



شكل 2-27

من هذه النتائج يتبين ان الاجهادات الناظمية داخل القرص وفي كافة الاتجاهات ، القيمة الثابتة σ_0 كما وانها مستقلة عن الزاوية φ . كما يتبين ايضاً ان الاجهادات المماسية $\tau_{\xi\eta}$ في القرص معدومة . تسمى حالة الاجهاد المعطاة بالعلاقة (2-33) **بحالة الاجهاد الهيدروستاتيكية** وذلك لان الضغط في كل نقطة من سائل ساكن مستقل عن اتجاه سطح النسب . اذاً كل قرص جزئي محمل كما في الشكل (2-28) ومقتطع من قرص محمل بحالة اجهاد هيدروستاتيكية ، يحتفظ بحالة الاجهاد الممثلة بالعلاقة (2-33) .



شكل 2-28

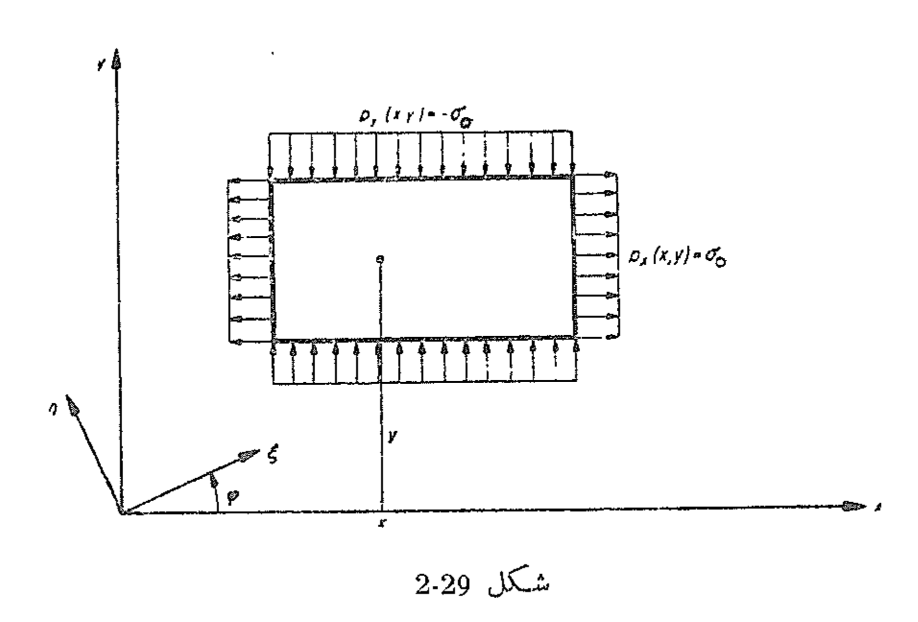
مثـال 35 :

تعطى حالة اجهاد قرص ، من خلال القيم التالية :

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{xx}(x,y) = \sigma_0 = \text{const.}\\ \sigma_{yy}(x,y) = -\sigma_0 = \text{const}.\\ \tau_{xy}(x,y) = 0\end{array}\right\} \qquad (2\text{-}34)$$

فيما بعد سوف يتم التنويه الى ان مثل حالة الاجهاد المعطاة هذه تتحقق في صفيحة رقيقةمستطيلة الشكل تحمل سطوحها الجانبية بالحمولات $p_x(x,y) = \sigma_0$; $p_y(x,y) = -\sigma_0$ (شكل 2-29) .

المطلوب : تعيين الاجهـــادات $\sigma_{\xi\xi}(\varphi)$ و $\tau_{\xi\eta}(\varphi)$ و $\sigma_{\eta\eta}(\varphi)$ في كل نقطة من القرص .



شكل 2-29

الحـل :

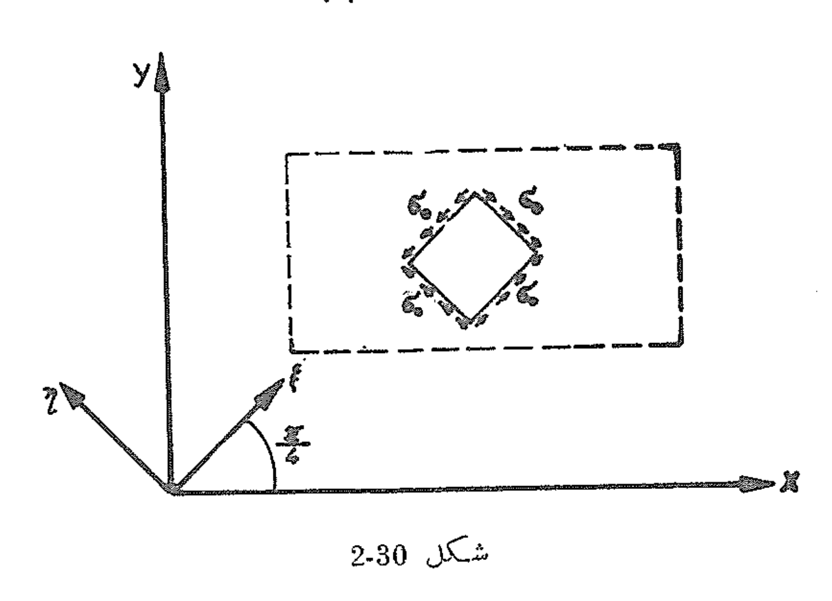
بواسطـة القيم المعطاة في العلاقة (2-31) يتم التوصل ، بعد الاســـتعانة بالعلاقة (2-24) ، للقيم التالية :

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{\xi\xi}(\varphi) = \dfrac{\sigma_0 + \sigma_0}{2}\cos 2\varphi = \sigma_0 \cos 2\varphi\\ \sigma_{\eta\eta}(\varphi) = -\dfrac{\sigma_0 + \sigma_0}{2}\cos 2\varphi = -\sigma_0 \cos 2\varphi\\ \tau_{\xi\eta}(\varphi) = -\dfrac{\sigma_0 + \sigma_0}{2}\sin 2\varphi = -\sigma_0 \sin 2\varphi\end{array}\right\} \qquad (2\text{-}35)$$

بذلك فان الاجهادات المطلوبة هي توابع لزاوية القطع φ . من اجل الزاوية $\varphi = \pi/4$ بشكل خاص ينتج :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right) &= \sigma_0 \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ \sigma_{\eta\eta}\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right) &= -\sigma_0 \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ \tau_{\xi\eta}\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right) &= -\sigma_0 \sin\frac{\pi}{2} = -\sigma_0 \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}36)$$

ان القرص الجزئي ذو الشكل المستطيل (مستطيل الشكل) المقتطع تحت الزاوية 45° من القرص المحمل (شكل 2-30) يحتفظ بحالة الاجهاد (العلاقة 2-31) وذلك عندما تؤثر على اطرافه الاجهادات المماسية الثابتة $\tau_{\xi\eta}(\varphi=\pi/4) = -\sigma_0$.



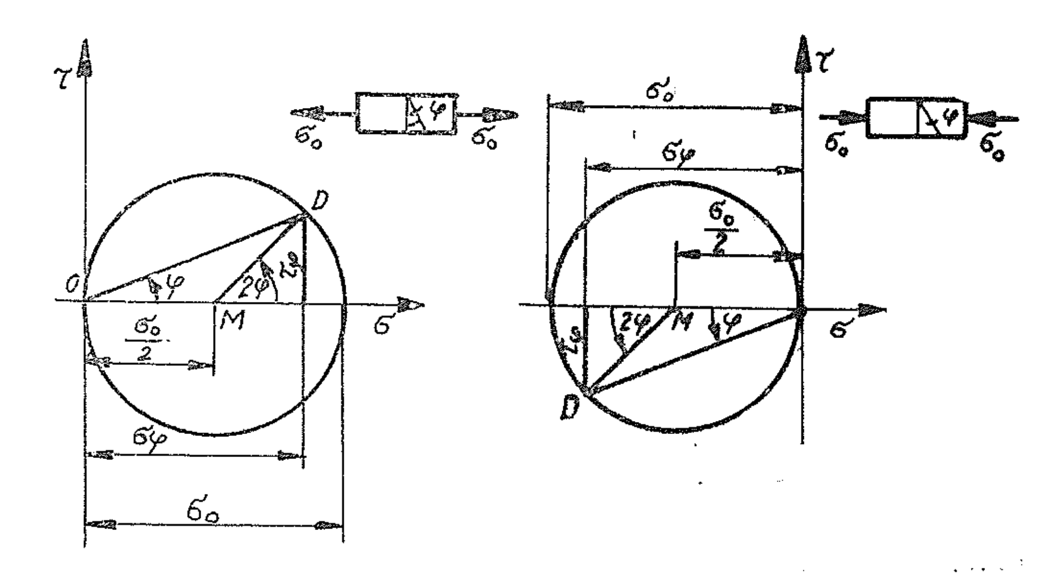
شكل 2-30

بذلك يمكن تمثيل التحميل القصي (التحميل على القص) الصافي لقرص من خلال التحميل الممثل في الشكل (2-30) . لقد كان العالم ده سان فينان (DE SAINT-VENANT) هو اول من توصل لهذه الحقيقة الهامة .

٢ ـ ٣ ـ ٧ أمثلة على دائرة اجهاد مور

مثال 36 :

الشد وكذلك الضغط المحوري (وحيدالمحور) (Einachsiger Zug bzw. Druck) (شكل 2-31) .



شكل 2-31

يتشكل الاجهاد الماسي الاعظمي $\max \tau = \sigma_0/2$ عند الزاوية $\varphi_0 = 45°$.
مما يؤدي في مواد التصنيع المتينة (zähen Werkstoffen) لتشكل سطوح ازلاق (Gleitflächen)
وهو يؤدي بدوره لحدوث لانكسار قصي (Schiebungsbruch) (يميل سطح الانكسار بزاوية $\varphi = 45°$).

مثال 37 :

الشد وكذلك الضغط المستوي المتساوي في جميع الجهات (Ebener allseitig gleicher Zug bzw. Druck)
(شكل 2-32) .

الفرض : $\sigma_{11} = \sigma_{22}$.

حسب العلاقة (2-28) ينتج عندئذ :

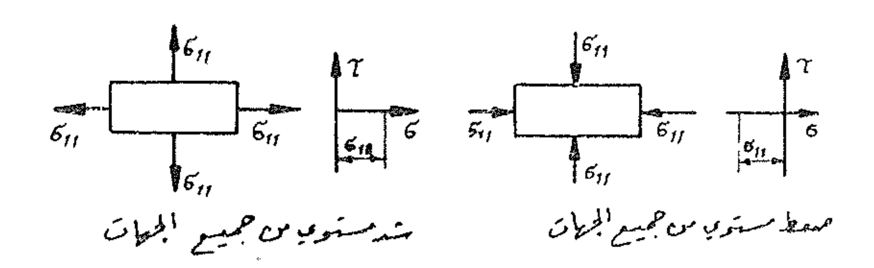
$$\sigma_{\xi\xi} (= \sigma_\varphi) = \sigma_{11} = \sigma_{22} \quad ; \quad \tau_{\xi\eta} (= \tau_\varphi) = 0$$

تتقلص دائرة اجهاد مور لتصبح نقطة (لتأخذ شكل نقطة) .

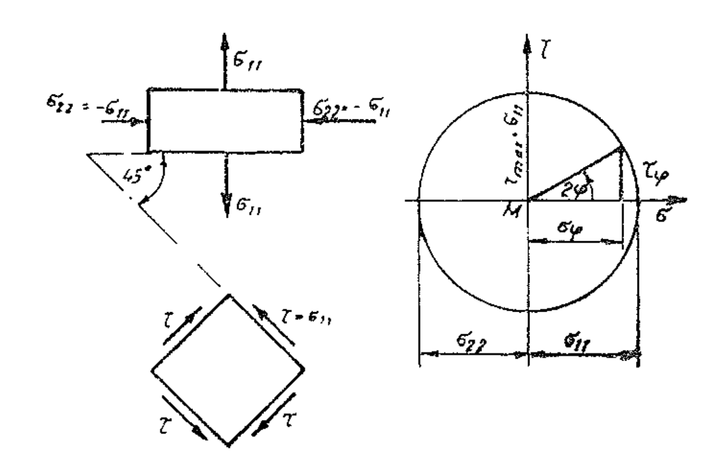
مثال 38 :

القص الصافي (Reiner Schub) (شكل 2-33) .

من اجل $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$ فان سطوح الاجهادات الماسية الرئيسية تكون خالية من الاجهادات الناظمية وهي تميل بالنسبة لسطوح الاجهادات الرئيسية بزاوية $\alpha = 45°$. من اجل ذلك يصلح:



شكل 2-32



شكل 2 33

$$\sigma_\alpha = 0 \quad ; \quad \tau_\alpha = \sigma_{11}$$

مثال 39 :

المعطى : الاجهادات في نقطة ما من قرص :

$$\sigma_{xx} = 400,0 \text{ kp cm}^{-2} \; ; \; \sigma_{yy} = -1600,0 \text{ kp cm}^{-2} \; ; \; \tau_{xy} = -600,0 \text{ kp cm}^{-2}$$

المطلوب : تعيين قيمة الاجهادات الرئيسية واتجاهات المحاور الرئيسية في نفس النقطة بطريقة تحليلية وطريقة تخطيطية .

من العلاقات (2-28 a) و (2-28 b) يتم الحصول على قيم الاجهادات الناظمية الرئيسية التالية :

الحل :

$$\sigma_{11} = \frac{400.0 - 1600.0}{2} + \sqrt{\left(\frac{400.0 + 1600,0}{2}\right)^2 + (-600,0)^2} = 566,2 \text{kpcm}^{-2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{400,0 - 1600,0}{2} - \sqrt{\left(\frac{400,0 + 1600,0}{2}\right)^2 + (-600,0)^2} = -1766,2 \text{ kp cm}^{-2}$$

ومن العلاقة (2-28 d) :

$$\max \tau = \sqrt{\left(\frac{400,0+1600.0}{2}\right)^2 + (-600,0)^2} = 1166,2 \text{ kp cm}^{-2}$$

اما موضع محور الاجهاد الرئيسي 1 (s_1) فيعين بواسطة العلاقة (2-28) حيث ينتج :

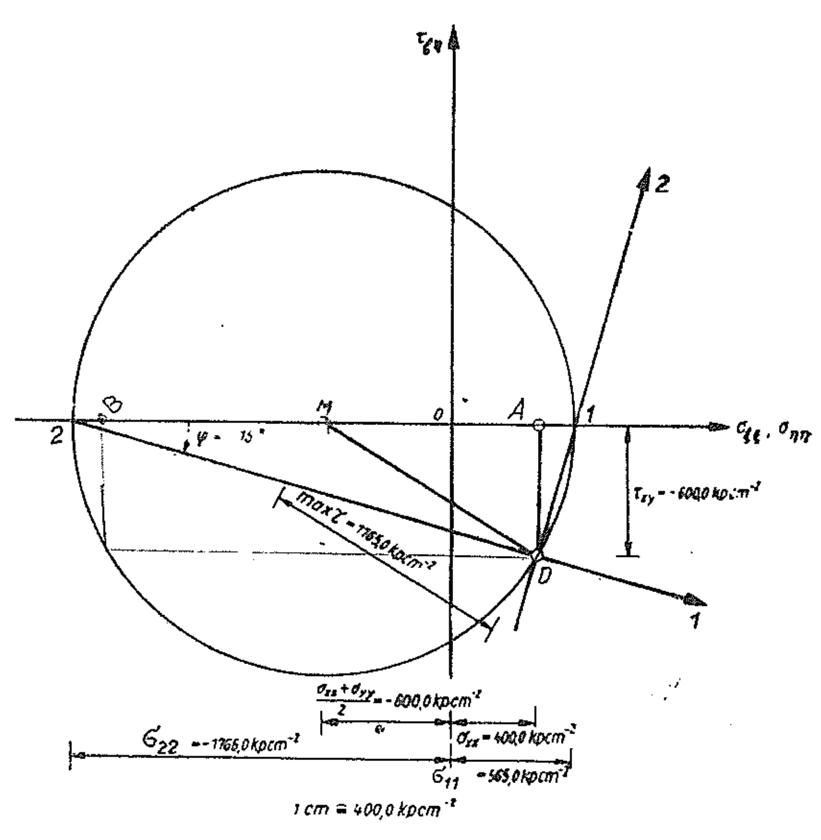
$$\text{tg } 2\varphi_0 = \frac{2 \cdot (-600,0)}{400-(-1600)} = -0,6$$

ومنها يتم الحصول على الزاوية التالية :

$$2\varphi_0 = -31^\circ \quad ; \quad \varphi_0 = -15^\circ\ 30' = -15,5^\circ$$

لقد تم في الشكل (2-34) تمثيل دائرة اجهاد مور من اجل الاجهادات :

$$\sigma_{xx} = 400,0 \text{ kp cm}^{-2} ; \sigma_{yy} = -1600,0 \text{ kp cm}^{-2} ; \tau_{xy} = -600,0 \text{ kp cm}^{-2}$$



شكل 2-34

من دائرة اجهاد مور يتم الحصول على الاجهادات الناظمية الرئيسية التالية :

$$\sigma_{11} = 565{,}0 \text{ kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{22} = -1766{,}0 \text{ kp cm}^{-2}$$

وعلى نصف قطر الدائرة الذي يساوي الاجهاد المماسي الرئيسي :

$$\max \tau = 1165{,}0 \text{ kp cm}^{-2}$$

اما زاوية القطع فتبلغ :

$$\varphi_0 = -15^\circ$$

٢ ـ ٤ حالة الاجهاد الفراغية (حالة الاجهاد ثلاثية المحور)

٣ ـ ٤ ـ ١ تنسور الاجهاد الفراغي (Räumlicher Spannungstensor)

للتمكن من التعبير عن حالة الاجهاد في جسم محمل سوف تثبت مجموعة النسب المتعامدة (مجموعة المحاور الاحداثية) (x,y,z) ثم تجرى على الجسم القطوع التالية :

$$x = \text{const.} \; ; \; y = \text{const.} \; , \; z = \text{const.}$$

سوف يرمز لضفتي سطوح القطع (ضفتي القطع) التي تظهر فيها العناصر :

$$dF_x = dy\,dz \; ; \; dF_y = dz\,dx \; ; \; dF_z = dx\,dy$$

بالرموز التالية :

$$x - 0 = \text{const.} \; , \; y - 0 = \text{const.} \; , \; z - 0 = \text{const.}$$

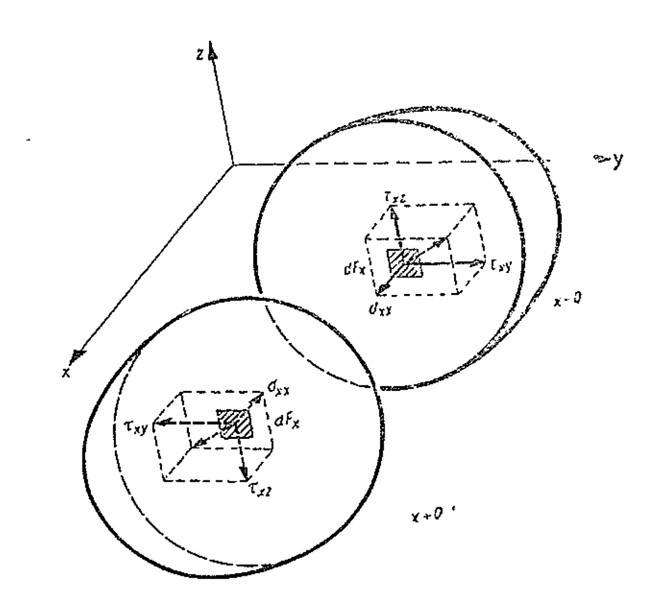
$$x + 0 = \text{const.} \; , \; y + 0 = \text{const.} \; , \; z + 0 + \text{const.}$$

بامكان الاجهاد المحصل العائد لعنصر سطحي ما في الحالة العامةأن يأخذ اي وضع في الفراغ . لذلك سوف تحلل أشعة الاجهادات التي تؤثر على العناصر السطحية dF_x, dF_y , dF_z الى مركباتها المتعامدة (اجهاد ناظمي واجهادين مماسيين) (شكل 2.35 , 2.36 , 2.37) :

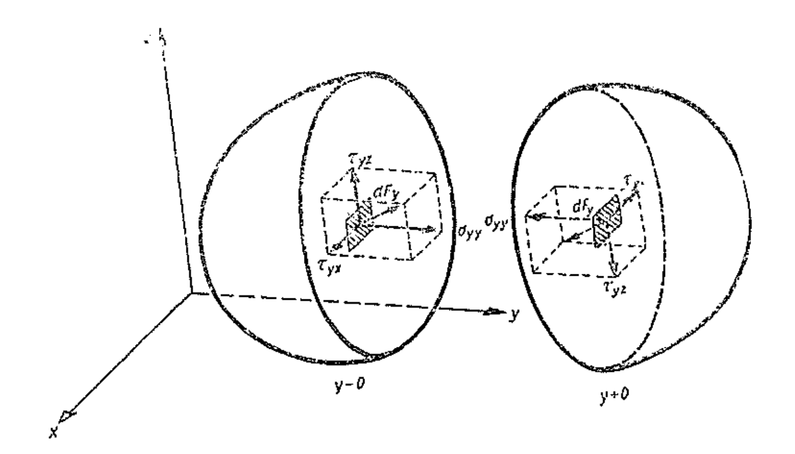
$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{xx} \; ; \; \tau_{xy} \; ; \; \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \; ; \; \sigma_{yy} \; ; \; \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \; ; \; \tau_{zy} \; ; \; \sigma_{zz} \end{array}\right\} \qquad (2{,}37)$$

تم هنا تسمية الأجهادات كما في حالة الاجهاد المستوية . تعتبر مركبات الأجهاد موجبة عندما تكون في ضفاف القطع الموجبة (الضفاف $x-0 = \text{const}$, $y-0 = \text{const}$, $z-0 = \text{const}$ باتجاه المحاور الاحداثية الموجبة وفي ضفاف القطع السالبة (الضفاف $x+0 = \text{const}$, $y+0 = \text{const}$. $z+0 = \text{const}$) ، بسبب مبدأ الفعل ورد الفعل ، بعكس اتجاه المحاور الاحداثية الموجبة .

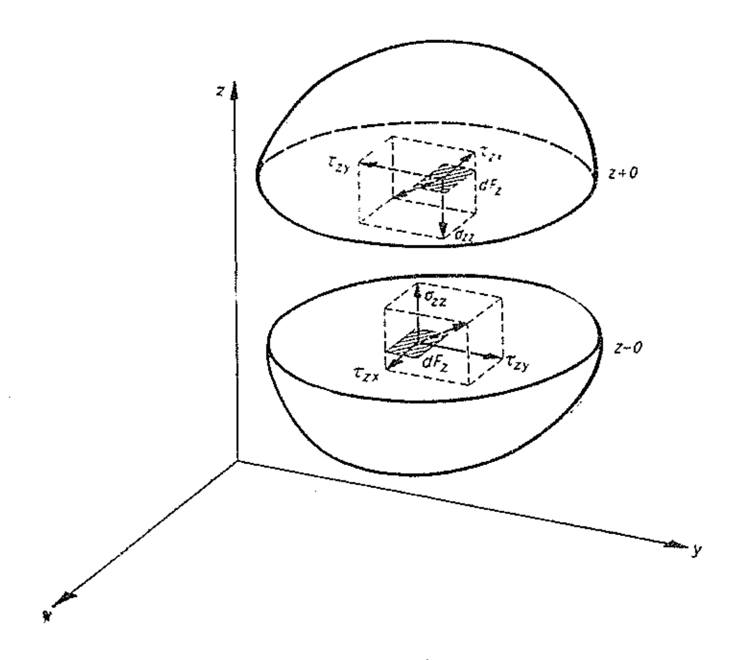
ان الدليل المزدوج في الاجهادات الناظمية والماسية المتبع هنا نفس المفهوم المتبع في حالة الاجهاد المستوية .



شكل 2-35



شكل 2-36



شكل 2-37

ان مركبات الاجهاد هذه هي توابع للاحداثيات x , y . z وهي توابع مستمرة وقابلة للاشتقاق (stetige und differenzierbare Funktionen) :

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x,y,z)\ ;\ \tau_{xy} = \cdots\ ;\ \tau_{xz} = \cdots \\ \tau_{yx} = \tau_{yx}(x,y,z)\ ;\ \sigma_{yy} = \cdots\ ;\ \tau_{yz} = \cdots \\ \tau_{zx} = \tau_{zx}(x,y,z)\ ;\ \tau_{zy} = \cdots\ ;\ \sigma_{zz} = \cdots \end{array}\right\} \qquad (2.38)$$

يعثر على تغيرات الاجهادات بواسطه المشتقات الجزئية (Partielle Differentiation) . اذا كانت للنقطة $P(x, y, z)$ الاجهادات الممثلة بالعلاقة (2.38) فان للنقطة المجاورة لها $Q(x + dx\ ,\ y + dy\ ,\ z + dz)$ الاجهادات التالية :

$$\sigma_{xx} + d\sigma_{xx} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z}\,dz$$

$$\tau_{yx} + d\tau_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z}\,dz$$

$$\tau_{zx} + d\tau_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,dz$$

وذلك عندما توقف منشورة (سلسلة) تايلور عند الحدود الخطية .

أذا أخذ ، توخياً للسهولة ، التغير بالاتجاه x فقط أي النقطـة $R(x + dx \ , \ y \ , \ z)$ التي تكون فيها $y = const$, $z = const$ وبذلك فان $dy = dz = 0$ عندئذ يتم العثور ، بشكل اسهل ، على ما يلي :

$$\sigma_{xx} + d\sigma_{xx} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$$

$$\tau_{xy} + d\tau_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \qquad (2\text{-}39)$$

$$\tau_{xz} + d\tau_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$$

وبالنسبة للتغير بالاتجاه y يتم التوصل لعلاقات مشابهة هي التالية :

$$\tau_{yx} + d\tau_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx$$

$$\sigma_{yy} + d\sigma_{yy} = \sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \qquad (2.40)$$

$$\tau_{yz} + d\tau_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$$

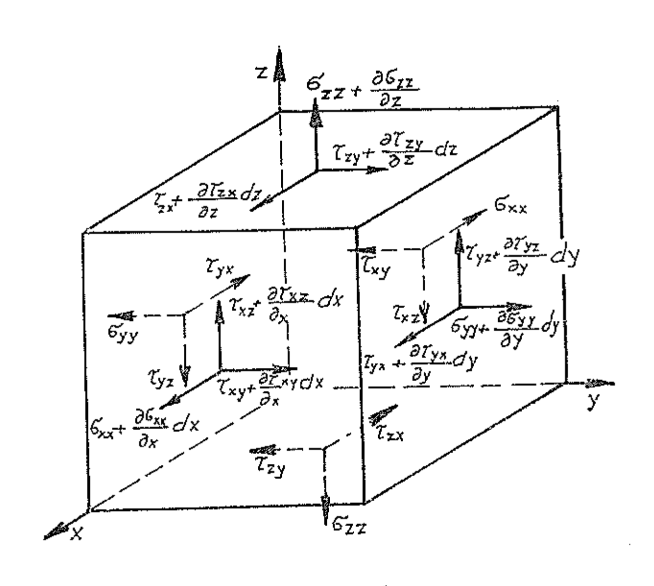
أما بالنسبة للتغير بالاتجاه z فيتم التوصل لما يلي :

$$\tau_{zx} + d\tau_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$$

$$\tau_{zy} + d\tau_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zv}}{\partial z} dz \qquad (2\text{-}41)$$

$$\sigma_{zz} + d\sigma_{zz} = \sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz$$

لقد تم في الشكل (2.38) رسم الاجهادات (مركبات الاجهادات) التي تـؤثر على متـوازي السطوح ذو الابعاد dx , dy , dz المقتطع من الجسم المدروس . عـلاوة على ذلك يمكن أن تؤثر في مركز ثقل متوازي السطوح (Parallelepiped) المذكـور القـــوى الحجميـة k_x , k_y , k_z .



شكل 2.38

ينبغي أن تكون القوى الحجميـــة والاجهـــادات في كل عنصر حجمـــي تفـاضلي (differentialen Voulemenelement) متوازنة وبذلك فان هناك ستة شروط للتوازن فيمتناول اليد منها ثلاثـــة شروط لتوازن القوى وثلاثة شروط لتوازن العزوم تنسب الى المحـاور الاحداثية الثلاثة .

بتطبيق شروط توازن القوىبالاتجاه x يتم الحصول ، حسب الشكل (2.39) ، علىالعلاقةالتالية:

$$- \sigma_{xx}\, dy\, dz + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy\, dz -$$

$$- \tau_{yx}\, dx\, dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx\, dz -$$

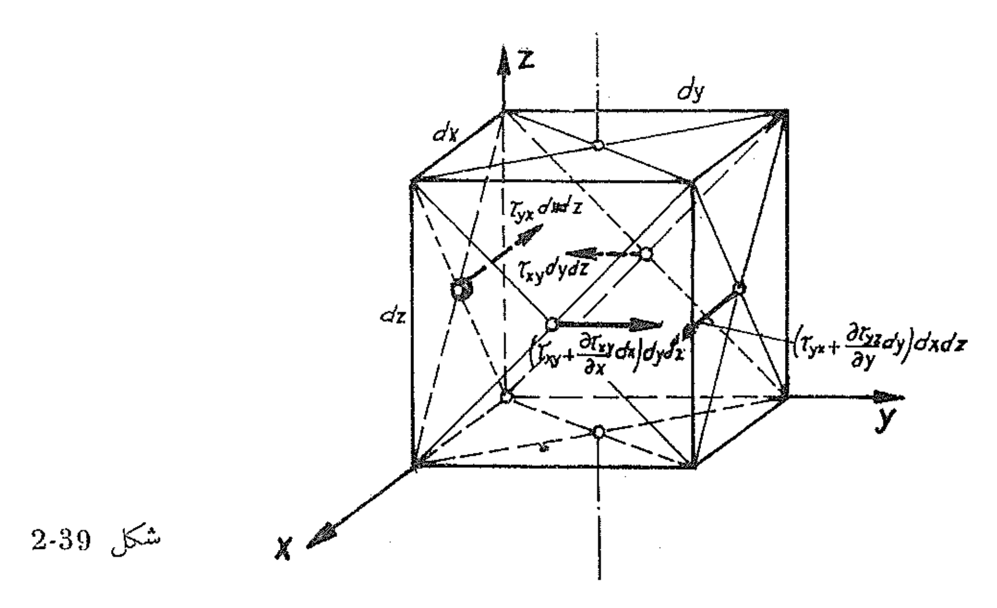
$$- \tau_{zx}\, dx\, dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx\, dy + k_x\, dV = 0$$

بالاختصار والتقسيم على $dV = dx\, dy\, dz$ يتم منها وبشكل مشابه من شرطي توازن القـوى بالاتجاه y وبالاتجاه z الحصول على العلاقات التالية :

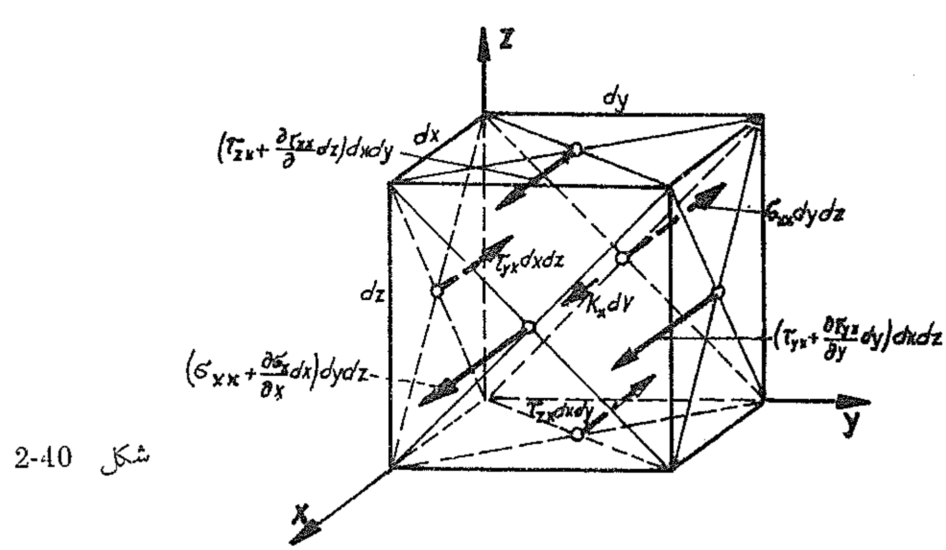
$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + k_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + k_y = 0 \qquad (2\text{-}42)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + k_z = 0$$



شكل 2-39



شكل 2-40

وبتطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة لمحور مركزي (يمر من مركز ثقل العنصر الحجمي) ويوازي المحور z ، يتم حسب الشكل (2.40) التوصل للعلاقة التالية :

$$+ \tau_{xy}\, dy\, dz\, \frac{dx}{2} + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\, dx)\, dy\, dz\, \frac{dx}{2} -$$

$$- \tau_{yx}\, dx\, dz\, \frac{dy}{2} - (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\, dy)\, dx\, dz\, \frac{dy}{2} = 0$$

ان الحدود التالية :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \; dx\,dy\,dz \; \frac{dx}{2} \quad , \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \; dx\,dy\,dz \; \frac{dy}{2}$$

هي حدود من المرتبة الثانية ولذلك فهي صغيرة ويمكن اهمالها واعتبارها تساوي الصفر . بعد الترتيب والتقسيم على $dV = dx\,dy\,dx$ يتم من العلاقة السابقة ومن العلاقتين ، التي يتم الحصول عليها بشكل مشابه بتطبيق شرطي توازن العزوم بالنسبة لكل من المحاور x و y ، التوصل للنتائج التالية :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \; ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad ; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \qquad (2,43)$$

تسمى هــذه العلاقة بعلاقــة تســاوي الاجهادات المماسيــة المزدوجة (المترتــبة) (Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen) وهــي تعني ان الاجــهادات المماسية المزدوجة متساوية .

بواسطة توازن العــزوم ولصلاحية علاقة تســاوي الاجهادات المماسية المزدوجة يتم اخــتزال (انقاص) عدد القيم الاجهادية التسعة الى ستة قيم فقط .

تحدد القيم الاجهادية الستة المتبقية حالة الاجهاد الفراغية في جسم كما انها تشكل مركبات تنسور متناظر من المرحلة الثانية (symmetrische Tensor zweiter Stufe) يسمى **تنسـور الاجهـاد الفراغي** (räumlicher Spannungstensor) .

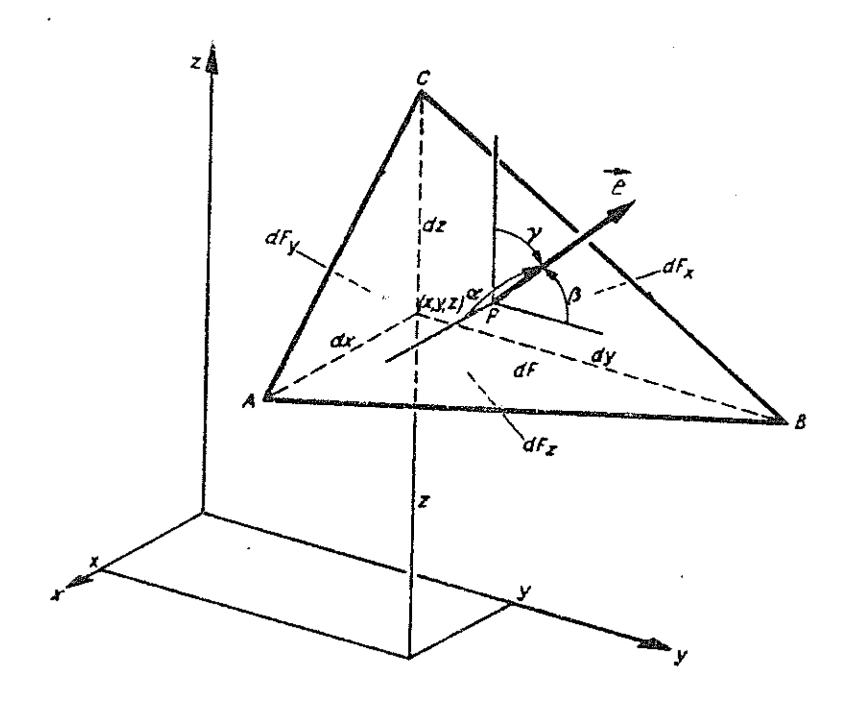
٢ ـ ٤ ـ ٢ الاجهادات الرئيسية ولا متغيرات حالة الاجهاد الفراغية

(Hauptspannungen und Invarianten des räumlichen Spannungszustandes)

سوف يتم هنا أيضاً البرهان على صلاحية علاقة تساوي الاجهادات المماسية المزدوجة (المترتبة ، المرافقة) ، لهذا السبب سوف يقتطع من الجسم المــدروس وفي النقطــة ذات الاحــداثيات (x,y,z) هرم لانهائي الصغر (صغير قدر الامكان) (infinitesimales Tetraeder) أضلاعه الموازية للمحاور الاحداثية هي dx , dy , dz . بعد ذلك ترسم الاجهادات الموجبة (حسب التعريف) في مركز ثقل سطوح المقطوع (شكل 2-41) :

$$dF_x = \frac{1}{2}\,dy\,dz \quad . \quad dF_y = \frac{1}{2}\,dz\,dx \; . \; dF_z = \frac{1}{2}\,dx\,dy$$

أما الاجهادات التي تؤثر في مركز الثقل P المائــد للسطح ABC فيمكــن اعادتها (تركيبها) إلى شعاع الاجهاد $\vec{\sigma}_{res} \equiv S_i$.



شكل 2-41

بذلك تؤثر على السطوح الجانبية القوى التالية :

على السطح .x=const :

$$\sigma_{xx} \frac{dydz}{2} \quad , \quad \tau_{xy} \frac{dydz}{2} \quad , \quad \tau_{xz} \frac{dydz}{2}$$

وعلى السطح .y=const :

$$\tau_{yx} \frac{dzdx}{2} \quad , \quad \sigma_{yy} \frac{dzdx}{2} \quad , \quad \tau_{yz} \frac{dz\,dx}{2}$$

وعلى السطح .z=eonst :

$$\tau_{zx} \frac{dx\,dy}{2} \quad , \quad \tau_{zy} \frac{dx\,dy}{2} \quad , \quad \sigma_{zz} \frac{dx\,dy}{2}$$

يعطي تطبيق شروط توازن العزوم بالنسبة للمحاور التي تمر باتجاه الاجهادات الناظمية ،العلاقات التالية :

$$\tau_{yz} \frac{dz\,dx}{2} \cdot \frac{dv}{3} - \tau_{zy} \frac{dx\,dy}{2} \cdot \frac{dz}{3} = 0$$

$$\tau_{zx} \frac{dx\,dy}{2} \cdot \frac{dz}{3} - \tau_{xz} \frac{dy\,dz}{2} \cdot \frac{dx}{3} = 0$$

$$\tau_{xy} \frac{dy\,dz}{2} \cdot \frac{dx}{3} - \tau_{yx} \frac{dz\,dx}{2} \cdot \frac{dy}{3} = 0$$

من هذه المعادلات يتم التأكد من صحة العلاقات التالية :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad , \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

التي تعبر عن المساواة بين الاجهادات المماسية المزدوجة . بأخذ هذه النتيجة بعين الاعتبار يتبين ان حالة الاجهاد في نقطة ما من جسم ، تحدد بشكل كامل بواسطة مركبات الاجهاد الستة التي تتألف من ثلاثة اجهادات ناظمية :

$$\sigma_{xx} \ (= \sigma_x) \quad , \quad \sigma_{yy} (= \sigma_y) \quad . \quad \sigma_{zz} (= \sigma_z) \qquad (2\text{-}44)$$

وثلاثة اجهادات مماسية :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad , \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \qquad (2\text{-}45)$$

للتمكن من تمثيل مركبات شعاع الاجهاد S_x , S_y , S_z بواسطة الاجهادات الجديدة (العلاقتين 2-45 و 2-44) تطبق شروط توازن القوى على القوى التي تؤثر على الهرم اللانهائي الصغر بالاتجاهات z , y , x (شكل 2-41) (بهذه الطريقة يتم تعيين اجهادات القطع على السطح ΔF).

يرمز لمركبات الشعاع الواحدي الناظمي (Normaleneinheitsvektor) العائد للسطح اللانهائي الصغر الذي تحدده النقاط C , B , A (شكل 2-42) بما يلي :

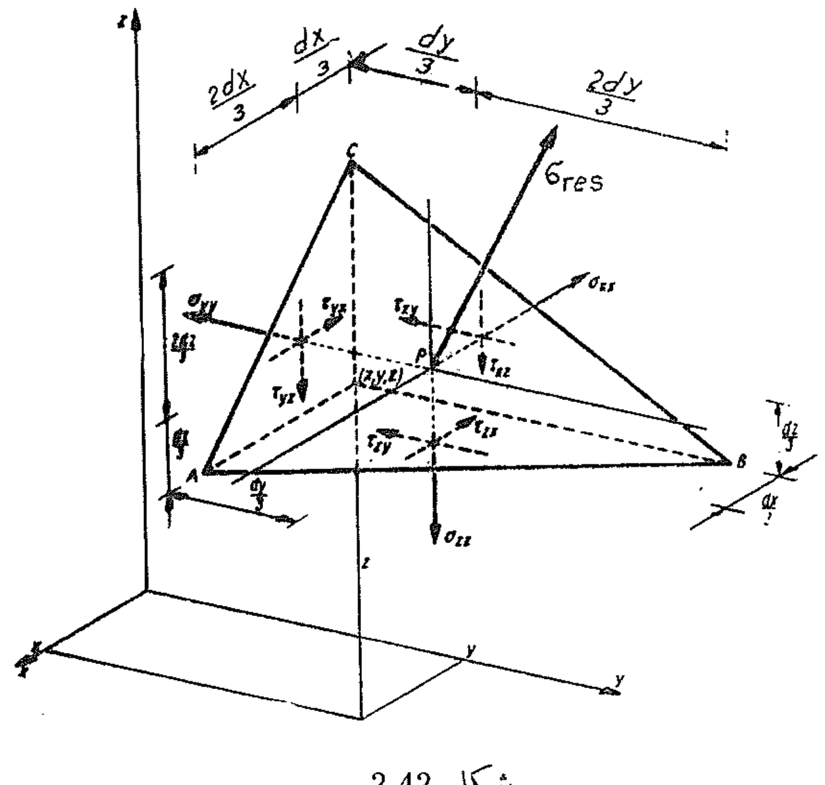
$$e_x = \cos \alpha \quad , \quad e_y = \cos \beta \quad , \quad e_z = \cos \gamma$$

حيث أن α , β . γ هي زوايا الاتجاه للشعاع الناظمي (الزوايا التي يشكلها الشعاع الوحدي e لسطح القطع مع المحاور الاحداثية z , y , x) .

بالامكان التعبير عن شعاع الاجهاد المحصل والشعاع الواحدي الناظمي بالكتابة الشعاعية كما يلي :

$$\sigma_{res} = \{S_x \ ; \ S_y \ ; \ S_z\} \quad ; \quad e = \{e_x \ ; \ e_y \ ; \ e_z\}$$

لقد تم في الجبر الشعاعي (Vektoralgebra) الاشارة إلى أن مساحة السطح ABC هي :



شكل 2-42

$$dF = \sqrt{dF_x^2 + dF_y^2 + dF_z^2}$$

وان الاصطلاحات dF_x/dF , dF_y/dF , dF_z/dF تتطابق مع مركبات الشعاع الناظمي e_x , e_y , e_z وبذلك يصبح اذاً :

$$\frac{dF_x}{dF} = e_x \quad , \quad \frac{dF_y}{dF} = e_y \quad , \quad \frac{dF_z}{dF} = e_z$$

يعطي تطبيق شروط توازن القوى العلاقات الآتية :

$$S_x\, dF - \sigma_{xx}\, dF_x - \tau_{yx}\, dF_y - \tau_{zx}\, dF_z = 0$$

$$S_y\, dF - \tau_{xy}\, dF_x - \sigma_{yy}\, dF_y - \tau_{zy}\, dF_z = 0$$

$$S_z\, dF - \tau_{xz}\, dF_x - \tau_{yz}\, dF_y - \sigma_{zz}\, dF_z = 0$$

منه يتم التوصل لمركبات شعاع الاجهاد التالية :

$$S_x = \sigma_{xx} e_x + \tau_{yx} e_y + \tau_{zx} e_z = \sigma_{xx} \cos\alpha + \tau_{yx} \cos\beta + \tau_{zx} \cos\gamma$$

$$S_y = \tau_{xy} e_x + \sigma_{yy} e_y + \tau_{zy} e_z = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_{yy} \cos\beta + \tau_{zy} \cos\gamma \qquad (2\text{-}46)$$

$$S_z = \tau_{xz} e_x + \tau_{yz} e_y + \sigma_{zz} e_z = \tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{yz} \cos\beta + \sigma_{zz} \cos\gamma$$

للحكم على حالة الاجهاد في قطع يثبته شعاع ناظمي ما من جسم منسوب إلى مجموعـة محـاور احداثية متعامدة (ديكارتية) (kartesische Koordinatenachsen) سوف تستخدم العلاقات (2-46) . بواسطة الاجهادات التالية :

$$\sigma_{xx} \;;\; \sigma_{yy} \;,\; \sigma_{zz} \;;\; \tau_{xy} = \tau_{yx} \;;\; \tau_{yz} = \tau_{zy} \;;\; \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

التي يفترض أنها معلومة يتم الحصول على المركبات التالية :

$$S_x \;,\; S_y \;,\; S_z$$

العائدة للقوة السطحية التي تؤثر على سطح القطع المدروس .

لكل نقطة من حالة الاجهاد الفراغية توجد ثلاثة سطوح قطع متعامـدة فيما بينها تكون خاليـة من الاجهادات المماسية وتشير الى اجهادات ناظمية حدية (سطوح الاجهادات الرئيسية) . باعتبار أن $\sigma = \sigma_{res}$ عندئذ تصلح على سطوح الاجهادات الرئيسية (الخاليـة من الاجهادات المـماسية) العلاقات التالية :

$$S_x = \cos\alpha\,\sigma \quad , \quad S_y = \cos\beta\,\sigma \quad , \quad S_z = \cos\gamma\,\sigma \qquad (2\text{-}47)$$

لتطابق حالات الاجهاد التي تصفها كل من العـــلاقات (2-46) و (2-47) يستطاع كتابـــة المساواة بينهما :

$$\begin{aligned}
(\sigma_{xx} - \sigma) \cos\alpha + \tau_{yx} \cos\beta + \tau_{zx} \cos\gamma &= 0 \\
\tau_{xy} \cos\alpha + (\sigma_{yy} - \sigma) \cos\beta + \tau_{zy} \cos\gamma &= 0 \qquad (2\text{-}48) \\
\tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{yx} \cos\beta + (\sigma_{zz} - \sigma) \cos\gamma &= 0
\end{aligned}$$

ان شرط حل مجموعة معادلات التوازن المتجانسة هـذه هو انعدام معينة الحدود (الامثال) (Koeffizientendeterminante) (حتى يكون لمجموعـة المعادلات (2-48) حلاً لا يسـاوي

الصفر ينبغي أن تنعدم معينة الحدود (معينة أمثال المجاهيل في هذه المجموعة)) . بعد حل معينة الحدود المذكورة يتم الحصول على معادلة من الدرجة الثالثة من أجل σ :

$$\sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\,\sigma^2 + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 -$$

$$- \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\,\sigma - \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2\cdot49)$$

ان جذور المعادلة (2.49) التي هي ، بسبب تناظر تنسور الاجهاد ؛ دائماً جذور حقيقية (reellen Wurzeln) تمثل **الاجهادات** الرئيسية .

من المعادلة (2-48) يتم الحصول على اتجاه الاجهادات الرئيسية وذلك بعد اعتبار العلاقة التالية :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

لامكانية كتابة المعادلة (2-49) بالشكل التالي أيضاً :

$$(\sigma - \sigma_{11})(\sigma - \sigma_{22})(\sigma - \sigma_{33}) = 0$$

ينتج ، حسب قاعدة الجذر لفيتا (Wurzelsatz von Vieta) ، ما يلي :

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} -$$

$$- \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \qquad (2\cdot50)$$

تسمى الاصطلاحات الموجودة في العلاقة (2.50) **لامتغيرات تنسور الاجهاد الفراغي** (Invarianten des räumlichen Spannungstensor) وذلك لانها لا تتغير (لا تتأثر) بتحول (بدوران) الاحداثيات .

إن السطوح التي تحتوي على اجهادات مماسيـة حـدية (سطوح الاجهادات المـماسية الرئيسية) تنصف الزاوية القائمة الموجودة بين سطوح الاجهادات الرئيسية وهي تحتوي على العموم اجهادات ناظمية (لا تخلو من الاجهادات الناظمية) .

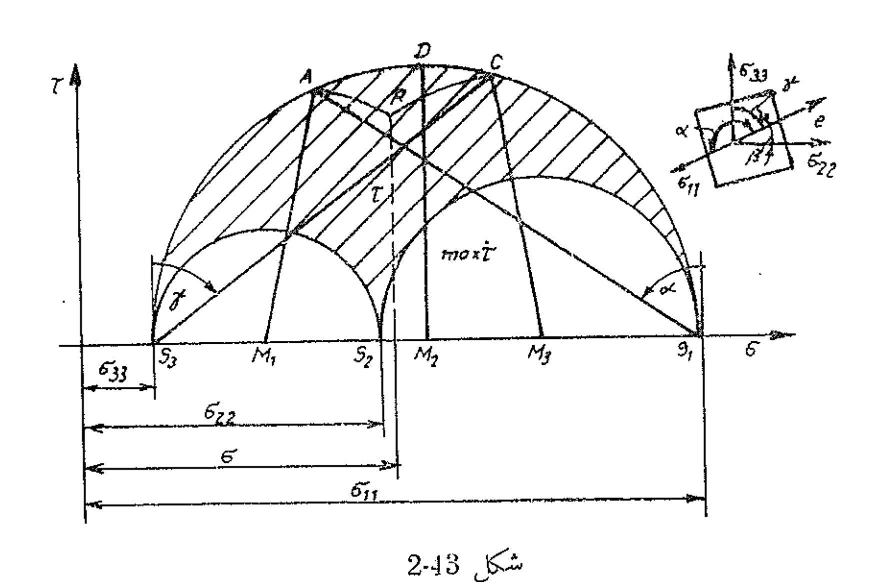
يتم الحصول على الاجهادات المماسية الرئيسية من العلاقات التالية :

$$\tau_1 = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2} \text{ ،} \quad \tau_2 = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} = \max \tau \text{ ،} \quad \tau_3 = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}$$

$$(\sigma_{11} > \sigma_{22} > \sigma_{33}) \qquad (2\text{-}51)$$

٢ ـ ٤ ـ ٣ تمثيل حالة الاجهاد الفراغية بواسطة دائرة إجهاد مور

بالاستعانة بالاجهادات الرئيسية $\sigma_{33} < \sigma_{22} < \sigma_{11}$ المعطاة يستطـاع بواسطة الانشاء المشار اليـه في الشكل (2-43) تعيين اجهادات القطع في السطح المائل .



شكل 2-43

برسم الزوايا α , γ يتم الحصول على النقاط A , C .

برسم قوس دائري مركزه M_1 ويمر من النقطة A وأخر مركزه M_3 ويمر من النقطة C يتم الحصول من تقاطع القوسين المذكورين على النقطة R التي تمثل احداثياتها قيم اجهـادات القطع σ و τ المطلوبة .

ينبغي الانتباه إلى ان σ مرتبـط باشارته . أما τ فعـلى العكس من ذلك لا يستطاع التنبوء عن إشارته .

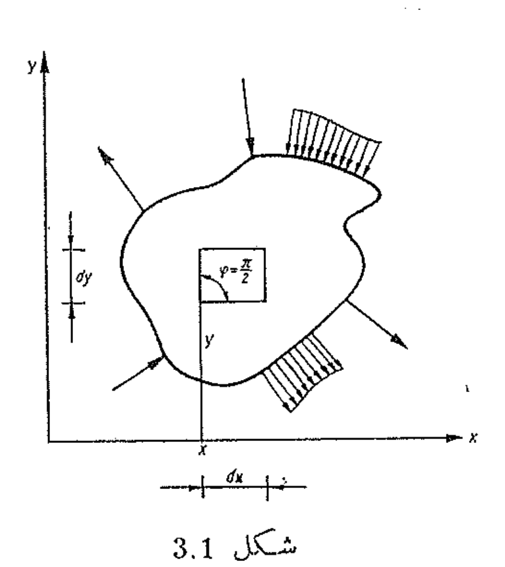
الفصل الثالث

التشوهات

VERZERRUNGEN

٣ ـ ١ تشوهات قرص (Verzerrungen einer Scheibe)

سوف تبحث الان حالة التشوه لقرص محمل بقوى تقع في مستويه ، ولهذا السبب سوف يدرس تغير الشكل (Formaenderung)الذي يقوم به عنصرسطحي اطوال اضلاعه dx و dy مقتطع من قرص غير متغير (شكل 3.1) . وذلك بعد ان يقوم القرص ككل بتغير شكله .



شكل 3.1

بمعرفة تغـــير طول الاضلاع (Laengenaenderung) dx , dy وكـذلك التغـــير الزاوي (Winkelaenderung) للزوايا القـائمة التي يغلقها العنصر السطحي داخله عنـــد النقطـة ذات الاحداثيات (x,y) يتم تعيين تغير الشكل كلياً .

تتحول الاطوال dx , dy (من الحـــالة غير المتغيرة) اثناء تغـــير الشكل الى الاطـوال $d\bar{x}$, $d\bar{y}$ وكذلك فان الزاوية المغلقة $\varphi = \pi/2$ تتحول للزاوية $\bar{\varphi}$.

يفهم تحت كلمة التغير النسبي الخطي (التمـــدد الخطي lineare Dehnung) ε_{xx} وكـذلك ε_{yy} في النقطة ذات الاحـداثيات (x,y) انه حاصل قسمة تغير الطول $d\bar{x}-dx$ وكـــذلك $d\bar{y}-dy$ على الطول الاصلي (الطول قبل التغير) dx وكذلك dy . وبذلك تعرف التغيرات النسبية الخطية (التمددات الخطية) في النقطة ذات الاحداثيات (x,y) كما يلي :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{d\bar{x}-dx}{dx} = \frac{d\bar{x}}{dx} - 1 = \varepsilon_x \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{d\bar{y}-dy}{dy} = \frac{d\bar{y}}{dy} - 1 = \varepsilon_y \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}1)$$

اما التغير الزاوي (الانزلاق) (Winkelaenderung Gleitung. Schiebung) للزاوية القائمة عنـــد النقطة ذات الاحـــداثيات (x,y) والمحصورة بين الاضلاع dx , dy فتعرف بواسطة العلاقة التالية :

$$\gamma_{xy} = \varphi - \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi} \qquad (3\text{-}2)$$

يطلق على القيم ε_{xx} ، ε_{yy} ، γ_{xy} المعبرة عن حالة التشوه

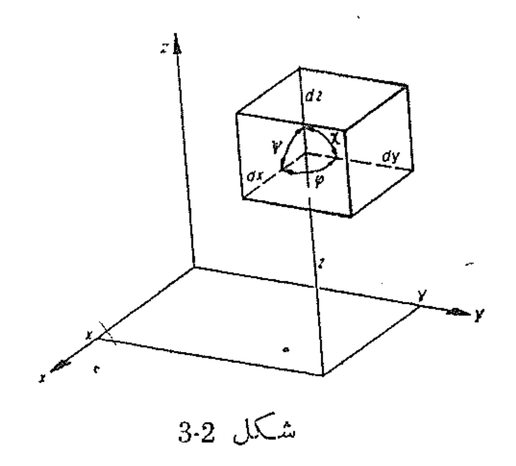
(Deformationszustand , Verzerrungszustand) اسم التشوهات (القيم التشوهية) وهي توابع قابلة للاشتقاق باستمرار بالنسبة لاحداثيات المكان x , y .

٣ ـ ٢ تشوهات جسم (Verzerrungen eines Körpers)

لوصف حالة تشوه جسم متغير سوف تختار مجموعة نسب متعامدة x , y , z ثم يدرس تشوه مكعب لانهائي الصغر (صغير قدر الامكان) اطوال اضلاعه dx , dy , dz (شكل 3-2) ومقتطع من المكان (x,y,z) من جسم غير متغير .

تتحول اطـوال اضـــلاع المكعب غير المتغير dx , dy , dz لتأخذ بعد التغـــير الاطـوال $d\bar{x}$, $d\bar{y}$, $d\bar{z}$ كما تتحول الزوايا القائمة φ , χ , ψ المحصورة بين الاضلاع dx , dy , dz لتصبح $\bar{\varphi}$, $\bar{\chi}$ ، $\bar{\psi}$. وبذلك يتم التوصل للتمددات (للتغيرات النسبية الخطية) باتجاه المحاور الاحداثية الثلاثة الآتية :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d\bar{x}-dx}{dx} = \frac{d\bar{x}}{dx} - 1$$



شكل 3-2

$$\varepsilon_{yy} = \frac{d\bar{y} - dy}{dy} = \frac{d\bar{y}}{dy} - 1$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{d\bar{z} - dz}{dz} = \frac{d\bar{z}}{dz} - 1$$

وللتغيرات الزاوية الثلاثة التالية :

$$\gamma_{xy} = \varphi - \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi}$$

$$\gamma_{yz} = \chi - \bar{\chi} = \frac{\pi}{2} - \bar{\chi}$$

$$\gamma_{zx} = \psi - \bar{\psi} = \frac{\pi}{2} - \bar{\psi}$$

تصف (تحدد) التشوهات الستة المذكورة حالة التشوه في النقطة ذات الاحداثيات (x , y , z) بشكل كلي وهي توابع قابلة للاشتقاق باستمرار (المستمر) (stetig differenzierbare Funktionen) بالنسبة لاحداثيات المكان z,y,x . إذاً بواسطة ثلاثة قيم تمددية (Dehnungsgrößen) وثلاثة تغيرات زاوية (Winkelaenderungen)يتم وصف (تحديد) حالة التشوه الفراغية (ثلاثية المحور). تمثل التشوهات الستة المذكورة مركبات تنسور التشوه الفراغي (raeumlichen Verzerrungstensor) التالي :

$$\begin{bmatrix} d_{xx} & d_{yx} & d_{zx} \\ d_{xy} & d_{yy} & d_{zy} \\ d_{xz} & d_{yz} & d_{zz} \end{bmatrix} \quad ; \; d_{kl} = \begin{cases} \varepsilon_k & ; \quad k = l \\ \frac{1}{2}\gamma_{kl} \; ; & k \neq l \end{cases} \qquad (3\text{-}2)$$

بينما ينبغي ان تحقق الاجهادات شروط التوازن ، ينبغي ان تحقق القيم التشوهية (التشوهات) (Verzerrungsgrößen) شروط التوافق Verträglichkeits – oder Kompatibilitätsbedingungen الآتـية :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \, \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \, \partial z} \qquad (3\text{-}3)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \, \partial z}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \, \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(- \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \, \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

٣ ـ ٣ العلاقة بين التشوهات والانتقالات

(Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen)

يستعمل في نظرية المرونة على الغالب شعاع الانتقال (Verschiebungsvektor) :

$$\mathbf{V} = (V_x \, , \, V_y \, , \, V_z)$$

بدلا عن القيم ε , γ . اثناء التشوه يتغير مكان كل نقطة من الجسم بالنسبة لمجموعة نسب ثابتة (مجموعة محاور إحداثية ثابتة) ، فالنقطة التي كانت قبل التشوه في المكان (x,y,z) سوف تنزلق (تنتقل) بعد تغير شكل الجسم لتصبح في المكان :

$$\bar{x} = x + V_x \quad , \quad \bar{y} = y + V_y \quad , \quad \bar{z} = z + V_z \qquad (3\text{-}4)$$

ان التغيرات الاحداثية V_x , V_y , V_z هي مركبات لشعاع الانتقال وهي على العموم توابع لاحداثيات المكان z,y,x وبذلك فان شعاع الانتقال يعين حالة الانتقال (Verschiebungszustand) او ما يسمى بحقل الانتقال (Verschiebungsfeld) لجسم متغير (متشوه) . والان سوف يتم إيجاد

العلاقة التي تربط بين التشوهات الستة وبين مركبات الانتقال . لهذا السبب سوف تتم ، في البداية، دراسة حالة الانتقال لقرص. ان العنصر القرصي (العنصر المقتطع من قرص) (Scheibenelement) اللانهائي في الصغر الذي تبلغ ابعاده الموازية للمحاور الاحداثية dx , dy سوف يأخذ بعد التشوه شكل متوازي اضلاع (شكل 3-3) فالنقاط P , A , B تنتقل الى النقاط $\bar{P}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$. يحدد انتقال النقطة P (x,y) الى النقطة $\bar{P}$ بواسطة شعاع الانتقال ذو المركبات Vx , Vy .

إن النقاط A (x+dx,y) و B (x,y+dy) اللامتناهية في القرب من بعضها والتي تنتقل الى النقاط $\bar{A}$, $\bar{B}$ سوف تعاني الانتقالات التالية :

$$V_x (x + dx , y) \quad , \quad V_y (x + dx , y) \quad , \quad V_x (x , y + dy) \; , \; V_y (x , y + dy)$$

باستخدام سلسلة (منشورة) تايلور (TAYLOR schen Entwicklung) يتم الحصول على علاقات تربط بين تلك الانتقالات وبين الانتقالات V_x (x,y) , V_y (x,y) والتي تأخذ بعد اهمال كل الحدود هي التي من المرتبة الثانية فما فوق ، والتي هي صغيرة جداً ، الشكل التالي :

$$V_x (x + dx , y) = V_x (x , y) + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx$$

$$V_y (x + dx , y) = V_y (x , y) + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx$$

$$V_x (x , y + dy) = V_x (x , y) + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy$$

$$V_y (x , y + dy) + V_y (x , y) + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy$$

تبلغ اطوال اضلاع متوازي الاضلاع $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ القيم التالية :

$$d\bar{x} = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{d V_y}{d x} dx\right)^2} = dx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial V_x}{d x} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2}$$

$$d\bar{y} = \sqrt{\left(dy + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy\right)^2 + \left(\frac{d V_x}{\partial y} dy\right)^2} = dy \sqrt{1 + 2 \frac{\partial V_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2}$$

وبواسطتها يتم الحصول على التمددات الخطية (التغيرات النسبية الخطية) الآتية :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d\bar{x}}{dx} - 1 = \sqrt{1 + 2\frac{\partial V_x}{\partial x} + (\frac{\partial V_x}{\partial x})^2 + (\frac{\partial V_y}{\partial x})^2} - 1$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{d\bar{y}}{dy} - 1 = \sqrt{1 + 2\frac{\partial V_y}{\partial y} + (\frac{\partial V_x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial V_y}{\partial y})^2} - 1 \qquad (3.4)$$

لتعيين التغير الزاوي للعنصر ، يشكل الجداء السلمي (skalare Produkt) لاشعة أضلاع متوازي الاضلاع وبذلك يتم بشكل أولي وبواسطة المركبات الآتية :

$$dx + \frac{\partial V_x}{\partial x}dx \quad , \quad \frac{\partial V_y}{\partial x}dx \quad , \quad \frac{\partial V_x}{\partial y}dy \quad , \quad dy + \frac{\partial V_y}{\partial y}dy$$

الحصول على العلاقة التالية :

$$d\bar{x}\, d\bar{y} \cos\bar{\varphi} = \left(dx + \frac{\partial V_x}{\partial x}dx\right)\frac{\partial V_x}{\partial y}dy + \frac{\partial V_y}{\partial x}dx\left(dy + \frac{\partial V_y}{\partial y}dy\right)$$

ومنها يتم الحصول على العلاقة الزاوية :

$$\cos\bar{\varphi} = \frac{1}{d\bar{x}\, d\bar{y}}\left[\left(dx + \frac{\partial V_x}{\partial x}dx\right)\frac{\partial V_x}{\partial y}dy + \frac{\partial V_y}{\partial x}dx\left(dy + \frac{\partial V_y}{\partial y}dy\right)\right]$$

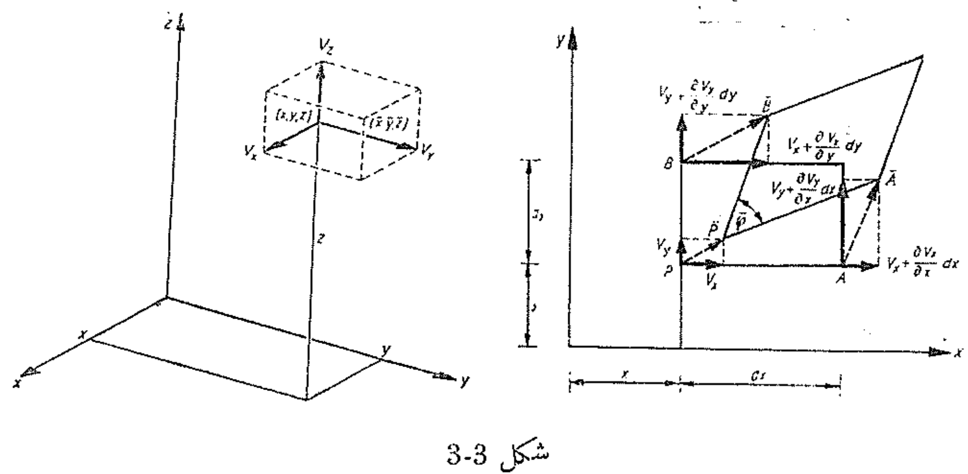
بواسطة القيم :

$$d\bar{x} = dx\,(1 + \varepsilon_{xx}) \quad , \quad d\bar{y} = dy\,(1 + \varepsilon_{yy}) \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$$

يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right) = \sin\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\frac{\partial V_y}{\partial y}}{(1+\varepsilon_{xx})(1+\varepsilon_{yy})}$$

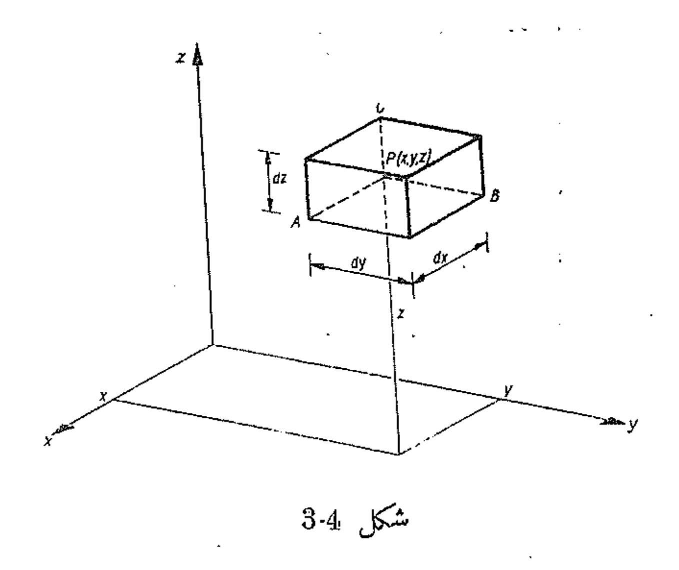
تقتصر مقاومة المواد في كثير من الحالات على التشوهات الصغيرة وذلك بحيث يمكن اهمال كافة الجداءات الناتجة عن ضرب مشتقين للانتقالات بالنسبة للحدود الخطية . بادخال ماذكر في المنشورات ثنائية الحدود (Binomialentwicklugen) العائدة لكل من ε_{xx} ، ε_{yy} ، $\sin\gamma_{xy} \approx \gamma_{xy}$ بعين الاعتبار ، عندئذ تأخذ تلك العلاقات الشكل المبسط التالي :



شكل 3-3

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \qquad (3.5)$$

وبهذا ينتهي ايجاد العلاقة التي تربط بين تشوهات قرص ومشتقات انتقاله .



شكل 3-4

بالتوسع بهذه الاعتبارات ونقلها الى السطوح الجانبية المارة بالنقـــطة P (x,y,z) ، من المكعب اللانهائي الصغر الممثل في الشكل (3-4) الذي يتحول بعد التغير الى متوازي السطوح (ذوالزوايا المنحرفة) عندئذ ينبغي اعتبار الانتقالات الثلاثة V_x , V_y , V_z . وبذلك يتم ، من اجـــل التشوهات الستة ، الحصول على العلاقات التالية :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \qquad (3\text{-}6)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}$$

في معظم المراجع وفيا يلي من فصول هذا الكتاب سوف يرمز لمركبات شعاع الانتقال بما يلي:

$$V_x = u \quad ; \quad V_y = v \quad ; \quad V_z = w \qquad (3.7)$$

٣ ـ ٤ التمدد الحجمي (Volumendehnung, kubische Dehnung)

فيا يلي سوف يتم تخيل مكعب لانهائي الصغر (صغير قدر الامكان) اطوال اضـلاعه الموازية للمحاور الاحداثية هي dx , dy , dz وحجمه هو $dV = dxdydz$ ومقتطع من الجسم غير المتغير (شكل 3-4) . أثناء التغير تتحول النقاط C,B,A,P ذات الاحداثيات :

$$\begin{array}{lll} x , & y , & z , \\ x + dx , & y , & z , \\ x , & y + dy , & z , \\ x , & y , & z + dz \end{array}$$

الى النقاط $\bar{C}$, $\bar{B}$, $\bar{A}$, $\bar{P}$ ذات الاحداثيات :

$$\begin{array}{lll} x + V_x , & y + V_y , & z + V_z , \\ x + dx + V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx , & y + V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx , & z + V_z + \frac{\partial V_z}{\partial x} dx , \\ x + V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy , & y + dy + V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy , & z + V_z + \frac{\partial V_z}{\partial y} dy , \\ x + V_x + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz , & y + V_y + \frac{\partial V_y}{\partial z} dz , & z + dz + V_z + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \end{array}$$

يعطى حجم المكعب المتشوه بواسطة المعينة التالية :

$$d\overline{V} = \begin{vmatrix} dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx & \frac{\partial V_y}{\partial x} dx & \frac{\partial V_z}{\partial x} dx \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} dy & dy + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy & \frac{\partial V_z}{\partial y} dy \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} dz & \frac{\partial V_y}{\partial z} dz & dz + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \end{vmatrix}$$

التي تأخذ ، بعد اهمال الجداءات الناتجة عن ضرب مشتقات الانتقالات بالنسبة للعدد واحد ، القيمة التالية :

$$d\overline{V} = dx \,.\, dy \,.\, dz \left(1 + \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

وبادخال العلاقة (3.6) بعين الاعتبار ينتج عنها :

$$d\overline{V} = dV \left(1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \right)$$

وبذلك يبلغ التغير الحجمي المنسوب على dV القيمة التالية :

$$e = \frac{d\overline{V} - dV}{dV} = \frac{d\overline{V}}{dV} - 1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \operatorname{div} V \quad (3\text{-}8)$$

ويسمى **بالتمددالحجمي** (التغيرالنسبيالحجمي) (kubische Dehnung oder Volumendilatation)

٣ ـ ٥ المحاور الرئيسية والتمددات الرئيسية من اجل المستوي

(Hauptachsen und Hauptdehnungen für die Ebene)

عندما تكون التشوهات :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} \,,\; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} \,,\; \gamma_{xy} = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \qquad (3\text{-}9)$$

في نقطة ما من قرص بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية x , y معلومة، عندئذ يستطاع بواسطتها تعيين التشوهات بالنسبة لاية مجموعة من المحاور الاحداثية (لتكن مجموعة المحاور الاحداثيـــة ξ ، η) التي تدور حول المجموعة الاصلية (وتشترك معها في المبدأ) :

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\partial V_\xi}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{\eta\eta} = \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta}, \quad \gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial V_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\eta}{\partial \xi} \qquad (3.10)$$

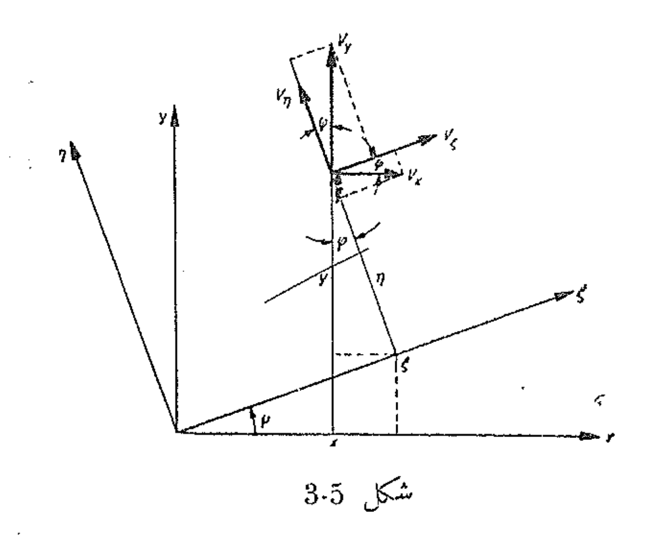
ان العلاقة التي تربط بين احداثيات المجموعة الاصلية والمجموعة المدورة هي :

$$x = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi$$
$$y = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \qquad (3\text{-}11)$$

أما العلاقة التي تربط بين الانتقالات بالنسبة للمجموعة الاصلية وبين الانتقالات بالنسبة للمجموعة المدورة فهي :

$$V_\xi = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi$$
$$V_\eta = - V_x \sin \varphi + V_y \cos \varphi \qquad (3\text{-}12)$$

يمكن قراءة هذه العلاقات من الشكل (3-5) مباشرة .



شكل 3-5

يفضل ، في العلاقات (3-9) و (3-10) استخدام نصف التغير الزاوي كالتالي :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \quad \varepsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \gamma_{\xi\eta}$$

لامكانية اعطاء الانتقالات V_ξ , V_η كتوابع للمتغيرات x , y يتم الحصول من المعادلة (3-10) بعد ادخال العلاقة (3-11) بعين الاعتبار ، على المعادلات التالية :

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\partial V_\xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial V_\xi}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial V_\xi}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\varepsilon_{\eta\eta} = \frac{\partial V_\eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} = -\frac{\partial V_\eta}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial V_\eta}{\partial y}\cos\varphi$$

$$\varepsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_\eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial V_\xi}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial V_\xi}{\partial y}\cos\varphi + \frac{\partial V_\eta}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial V_\eta}{\partial y}\sin\varphi\right)$$

بالاستعاضة عن القيم V_ξ , V_η بالقيم V_x , V_y من خلال العلاقة (3.12) ، يتم الحصول من المعادلات الأخيرة بشكل اولي على العلاقات الآتية :

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial V_y}{\partial x}\sin\varphi\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\cos\varphi + \frac{\partial V_y}{\partial y}\sin\varphi\right)\sin\varphi$$

$$\varepsilon_{\eta\eta} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial V_y}{\partial x}\cos\varphi\right)\sin\varphi + \left(-\frac{\partial V_x}{\partial y}\sin\varphi + \frac{\partial V_y}{\partial y}\cos\varphi\right)\cos\varphi$$

$$\varepsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial V_x}{\partial x}\cos\varphi - \frac{\partial V_y}{\partial x}\sin\varphi\right)\sin\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\cos\varphi + \frac{\partial V_y}{\partial y}\sin\varphi\right)\cos\varphi$$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial V_x}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial V_y}{\partial x}\cos\varphi\right)\cos\varphi + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial V_x}{\partial y}\sin\varphi + \frac{\partial V_y}{\partial y}\cos\varphi\right)\sin\varphi$$

وبعد ادخال التشوهات ε_{xx} ، ε_{yy} ، ε_{xy} ينتج :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{\xi\xi} &= \varepsilon_{xx}\cos^2\varphi + \varepsilon_{yy}\sin^2\varphi + \varepsilon_{xy}\sin 2\varphi \\
\varepsilon_{\eta\eta} &= \varepsilon_{xx}\sin^2\varphi + \varepsilon_{yy}\cos^2\varphi - \varepsilon_{xy}\sin 2\varphi \\
\varepsilon_{\xi\eta} &= -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\sin 2\varphi + \varepsilon_{xy}\cos 2\varphi
\end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

وأخيراً وبعد الاستعانة بالعلاقات التالية :

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$

يتم التوصل للمعادلات الآتية :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\cos 2\varphi + \varepsilon_{xy}\sin 2\varphi \\ \varepsilon_{\eta\eta} &= \frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2} - \frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\cos 2\varphi - \varepsilon_{xy}\sin 2\varphi \\ \varepsilon_{\xi\eta} &= \qquad\qquad - \frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\sin 2\varphi + \varepsilon_{xy}\cos 2\varphi \end{aligned}\right\} \quad (3.14)$$

والآن سوف يسؤلعن الزاوية التي ينبغي ان تدورها مجموعة الاحداثيات ξ ، η حتى تأخذ التمددات (التغيرات النسبية الخطية) في نقطة ما من قرص قيماً حدية .

بما ان المعادلات (3-14) ، التي تعطي العلاقة بين التشوهات ε_{xx} ، ε_{yy} ، ε_{xy} وبين التشوهات $\varepsilon_{\xi\xi}$ ، $\varepsilon_{\eta\eta}$ ، $\varepsilon_{\xi\eta}$ نفس شكل معادلات الاجهاد (العلاقة 2-28) لذلك يمكن تعميم النتيجة التي تم الحصول عليها هناك ، على حالة التشوه في قرص . وحسب ذلك فانه يوجد هناك اتجاهان متعامدان هما s_1 و s_2 تأخذ التمددات عندها قيماً حدية :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \max\varepsilon \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\varepsilon_{12}+\varepsilon_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \min\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (3.15)$$

كما ينعدم عندها التغير الزاوي $2\varepsilon_{12} = \gamma_{12}$. تسمى القيم الحدية المشار اليها بالعلاقة (3-15) **بالتمددات الرئيسية** (التغيرات النسبية الخطية الرئيسية Hauptdehnungen) كما تسمى المحاور المتعامدة s_1 و s_2 التابعة لها **بمحاور التمددات الرئيسية** (Hauptdehnungsachsen) . تعطى الزاوية φ_0 المحصورة بين المحورين x و s_1 بواسطة العلاقة التالية :

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{yy}} \quad (3.16)$$

٣ ـ ٦ التشوهات بالنسبة للمحاور القطبية (Verzerrungen in Polarkoodinatien) :

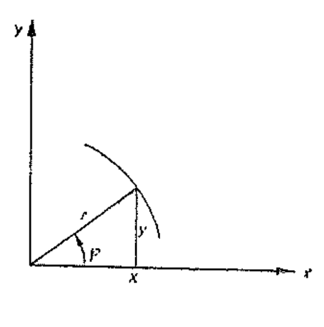
في كثير من مشاكل مقاومة المواد لايفضل اختيار مجموعة محاور احداثية متعامدة وذلك لصعوبة تمثيل النتائج . في مثل تلك الحالات يفضل نسب الانتقالات V_x ، V_y ، V_z والتشوهات ε_{xx} ، ε_{yy} ، ε_{zz} ، γ_{xy} ، γ_{yz} ، γ_{zx} الى احداثيات منحنية (krummlinigen Koordinaten).

فيما يلي سوف يتم شرح تحويل العلاقات السابقة بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية القطبية r , φ (شكل 3-6) .

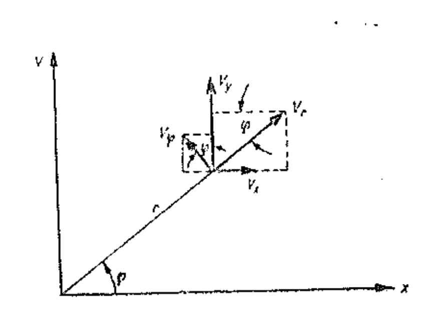
ان العلاقة التي تربط بين الاحداثيات القطبية r , φ والاحداثيات المتعامدة (الديكارتية) x , y كما هو معلوم ، هي التالية :

$$x = r\cos\varphi \quad . \quad y = r\sin\varphi \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \varphi = \text{arc tg}\frac{y}{x}$$

ليحلل شعاع انتقال نقطة ، احداثياته في المجموعة المتعامدة x ; y هي Vx , Vy ، الى مركبة قطرية Vr ومركبة مماسية Vφ (شكل 3-7).



شكل 3-6



شكل 3.7

من الشكل (3-7) يتم التوصل بشكل مباشر للعلاقات التالية :

$$\left.\begin{aligned} V_x &= V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi \\ V_y &= V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (3,17)$$

أما التشوهات :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,(V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi)\,,$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,(V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi)\,,$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial y}\,(V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi)$$

فنأخذ بعد اعتبار العلاقات :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

الشكل التالي :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial V_r}{\partial x}\cos\varphi - \frac{\partial V_\varphi}{\partial x}\sin\varphi + V_r\frac{\sin^2\varphi}{r} + V_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r},$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V_r}{\partial y}\sin\varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial y}\cos\varphi + V_r\frac{\cos^2\varphi}{r} - V_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_r}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial V_\varphi}{\partial y}\sin\varphi + \frac{\partial V_r}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial x}\cos\varphi\right)$$
$$-\frac{1}{r}V_r\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{2r}V_\varphi\cos 2\varphi$$

بما أن V_φ , V_r هي توابع للمتغيرات r , φ وهذه هي بدورها توابع للاحداثيات x , y لذلك تصلح العلاقات التالية :

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} = \frac{\partial V_r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial V_r}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial y} = \frac{\partial V_r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial V_r}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial x} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial y} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}$$

وبذلك تأخذ التشوهات الشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial V_r}{\partial r}\cos^2\varphi - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + V_r\frac{\sin^2\varphi}{r} \\
&\quad - \frac{\partial V_\varphi}{\partial r}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r} + V_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}, \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial V_r}{\partial r}\sin^2\varphi + \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + V_r\frac{\cos^2\varphi}{r} \\
&\quad + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r} - V_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial V_r}{\partial r}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}\frac{1}{2r}\cos 2\varphi - V_r\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} \\
&\quad + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r}\frac{1}{2}\cos 2\varphi - \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - V_\varphi\frac{1}{2r}\cos 2\varphi
\end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}18)$$

يمر من كل نقطة ذات الاحداثيات (x,y) والتي اعطيت تشوهاتها ε_{xx} ، ε_{yy} ، ε_{xy} مسبقاً ، خطين احداثيين هما $\varphi = const.$ و $r = const.$.

تشكل المماسات على الخطوط الاحداثية المذكورة في النقطة (x,y) مجموعة احداثيـــة متعامدة مدورة هي x,y والتي سوف يتم الآن نسب التشوهات اليها .

ليرمز لهذه التشوهات بالرموز :

$$\varepsilon_{rr} \; , \; \varepsilon_{\varphi\varphi} \; , \; \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi}$$

وبذلك يستطاع إستخدام علاقات التحويل (13 3) التي تعطي المعادلات التالية:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{xx} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{yy} \sin^2 \varphi + \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{xx} \sin^2 \varphi + \varepsilon_{yy} \cos^2 \varphi - \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \varepsilon_{xy} \cos 2\varphi$$

بواسطة العلاقة (18-3) يتم الحصول من المعادلات الاخيرة ، بعد اجراء عمليات حسابية أولية طويلة ، على النتيجة التالية :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial V_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_r\right) \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}19)$$

الفصل الرابع

قانون المرونة

ELASTIZITAETSGESETZ

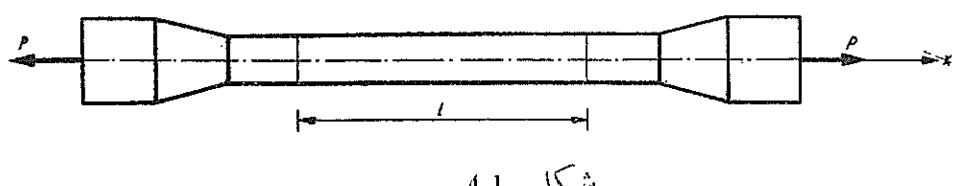
٤ ـ ١ اختبار المواد (Untersuchung von Werkstoffen)

لا يمكن حل وظيفة مقاومة المواد المتمثلة بتعيين حالة الاجهاد (Spannungszustand) وحالة الانتقال (Verschiebungszustand) للعناصر الانشائية إلا بعد أن يكون السلوك الفيزيائي (physikalische Verhalten) للمادة تحت تأثير الحمولة معلوماً . لذلك تظهر ضرورة التجارب التي تعطي العلاقة التي تربط بين الحمولات المطابقة وانتقالات الجسم وتشوهاته .

بسبب كثرة المواد المستعملة في المجالات الهندسية وتعدد العناصر الانشائية يبدو للوهلة الاولى ان التوصل لقوانين عامة وشاملة لكل المواد هو غير ممكن . لكن فيما بعد ظهرت امكانية تتبع الانواع المتعددة لتحميل العناصر الانشائية بشكل حسابي وذلك من خلال تجربتين ، هما تجربة الشد / الضغط وتجربة فتل القضيب الاسطواني .

٤ ـ تجربة شد الفولاذ (Zugversuch für Stahl)

لتعيين العلاقة التي تربط بين الحمولة وبين تغير الشكل ، ينبغي تحميل قضيب فولاذي موجود ضمن حرارة الغرفة ، بحمولة شد محورية تنمو تدريجياً وببطء (حمولة ستاتيكية) . لاسباب صنعية (فى الصنع) سوف يستخدم وبشكل عام قضيب اختبار اسطواني دائري الشكل توضع نهايتيه العريضتين في آلة الشد (شكل 4.1) .



شكل 4.1

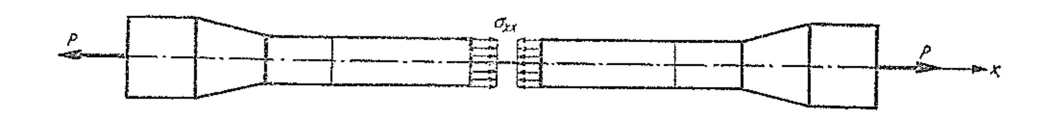
تبعد مسافة القياس l للقضيب ذو المقطع العرضي F عن الاتساعات مخروطية الشكل (لنهايات القضيب) مسافة كافية بحيث تتألف حالة الاجهاد المتشكلة عن قوة الشد Z في جميع نقاط

مجال القياس من اجهاد ناظمي ثابت يشير باتجاه محور القضيب (الاوسط) ، بحيث تسيطر على القضيب ، ضمن مجـال طول القياس ، حالة اجهاد خطيـة (وحيـدة المحور) متجـانسة (homogener, linearer Spannungszustand) (شكل 2 - 4) .

لوجوب تحقيق المحصلة $\sigma_{xx} F$ العائدة للاجهادات σ_{xx} مع القوى الخارجية P حالة التوازن ، لذلك تصلح من أجل أي مكان من مجال القياس العلاقة التالية :

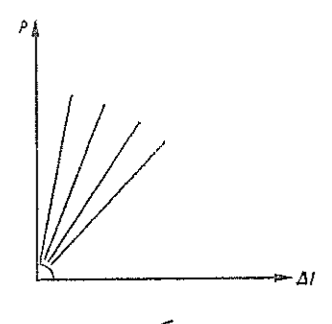
$$\sigma_{xx} F = P$$

من خلال التجارب العديدة تم التأكد من صحة تجانس حالة الاجهاد (على طول مجال القياس) المفروض .



شكل 2-4

نتيجة لتأثير قوة الشد P المطبقة تدريجياً على قضيب الاختبار فان الطول الاصلي لقيـاس l سوف يزداد بالمقدار Δl . إذا رسمت الآن ، لكل استطالة Δl قيمة القوة P التابعة لهـا ، ضمن مخطط ، عندئذ يتم الحصول ، حسبما تكون أبعاد قضيب الاختبار F , l من أجل نفس المواد ، على منحنيات مختلفة للقوة والاستطالة (شكل 3-4) .



شكل 3-4

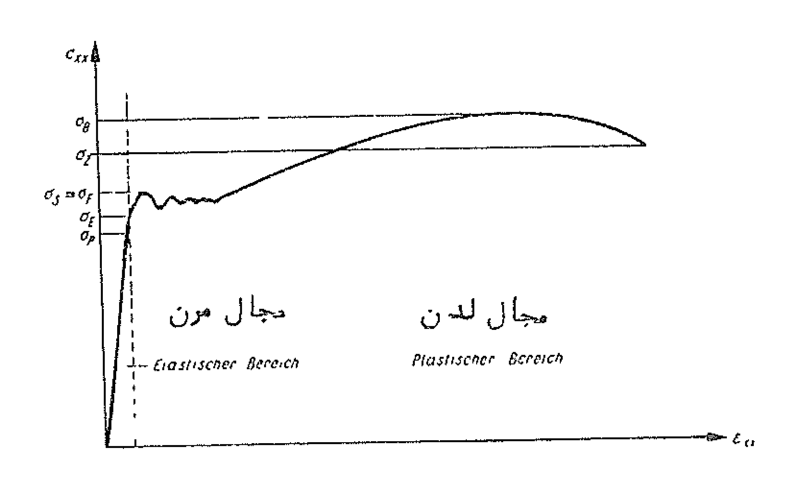
أما إذا رسمت التمددات (التغيرات النسبية الخطية) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$$

على المحور الافقي (كترتيب Abszisse) ورسمت قيم الاجهادات التابعة لها :

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{F}$$

على المحور الشاقولي (كفصل Ordinate) لمجموعة نسب متعامدة عندئذ يتم الحصول ، من أجل نفس المادة مهما اختلفت أبعاد قضيب الاختبار F , l على منحني واحد للاجهاد ـ التمدد (Spannungs–Dehnungskurve) (شكل 4 – 4) .



شكل 4 – 4

لقد أخذت مفاهيم الاجهاد ـ التمدد أهميتها بعد أن أعطى إستعمالها علاقات تتعلق بالمادة ولكنها مستقلة عن أبعاد العناصر الانشائية .

من خلال تجربة الشد الممثلة في الشكل (4–4) نشأ قانون يعبر عن المادة ، يسمى **قانون المادة** (Stoffgesetz) . يتابع منحني (خط) الاجهاد ـ التمدد (Spannungs–Dehnungs–Linie) للفولاذ سيره حتى تقريباً بشكل خطي وذلك حتى اجهاد معين ، هو الاجهاد σ_p ، هـذا الحـد فان الاجهادات تتناسب مع التمددات . لهذا السبب يسمى الاجهاد σ_p

بحد التناسب (Proportionalitätsgrenze) . بزيادة التحميل (بمتابعـة التحميل) فان خـط الاجهاد ـ التمدد يبدأ بالانحناء . بتخطي الاجهاد σ_p (بعد زيادة التحميل) يظهر الاجهـاد σ_E ، الذي يسمى **بحد المرونة** (Elastizitätsgrenze) والذي يتم تعيينه انطلاقاً من فكرة كون سلوك الفولاذ ، من اجل الحمولات $\sigma_{xx} \leqq \sigma_E$ ، هو سلوك مرن كلياً ، فالاستطالات الـتي

تنتج عن تأثير حمولات اصغر من σ_E تزول بالتدريج كلياً بعد زوال الحمولة بالتدريج وبطيء وتسمى **بالتغيرات المرنة** . اما الاستطالات التي تنتج عن تأثير الحمولات $\sigma_E < \sigma_{xx}$ فيبقى جزءاً منها حتى بعد زوال الحمولة كلياً (وتسمى **بالتغيرات اللدنة**) . بمتابعة زيادة الاجهاد فان الخط المميز (Kennlinie) يزداد انحناء حتى بلوغ قيمة الاجهاد $\sigma_S = \sigma_F$. ببلوغ هذا الحد فان التمدد يزداد بشكل كبير دون الحاجة لزيادة التحميل . اما ذلك فيعود سببه الى التغير الجذري (الواضح) في البناء البلوري للمادة . فالبلورات الكبيرة سوف تتمزق وتتنضد ويطرا تغير على طبقاتها الوسطية ، تسمى هذه الظاهرة **بانسياب المادة** (Fließen des Werkstoffes) كما يسمى الاجهاد $\sigma_S = \sigma_F$ الذي يتشكل الانسياب حين بلوغه ، **بحد الانسياب** (حد الرضوخ ، حد الانقياد ، حد الاذعان) (Fließgrenze, Strekgrenze) يشير خط (منحني) التمدد ـ الاجهاد عند بلوغه مجال الانسياب الى توزيع متموج بشكل خفيف يمكن إعادة سببه الى الاحتكاك الداخلي الذي يتشكل بين الطبقات البلورية للمادة.تنتهي مرحلة الانسياب بتقسية (verfestigung) للمادة تمكنها من تحمل اجهاد اكبر من الاجهاد σ_F . لكن التمددات المتشكلة اثناء ذلك تزداد بشكل كبير وهي تبقى حتى بعد إزالة (زوال) الحمولة (Entlastung) . تبقى هذه التقسية ممكنة حتى بلوغ الاجهاد الاعظمي σ_B المسمى باجهاد الكسر (اجهاد الانكسار) (Bruchspannung) او **مقاومة الشد** (متانة الشد Zugfestigkeit)

يشترك طول القياس الكلي حتى بلوغ إجهاد الكسر (الانكسار) في تغير الشكل وحين بلوغ هذه القيمة من الاجهاد يظهر في المنطقة المخلخلة في تركيبها الداخلي اختناق (تضيق) واضح . يبدأ الفولاذ ضمن هذا المجال بالانسياب وتبدأ مساحة المقطع العرضي F للقضيب الاصلي تتناقص بشكل كبير . وما يلبث الاختناق بالازدياد الى ان يتم التغلب على قوى الارتباط (Kohäsionskraefte) عندئذ ينقطع (ينفصل) القضيب ويتم ذلك عند بلوغ الاجهاد σ_z . يقسم الاجهاد σ_E ، عند حد المرونة ، خط التمدد ـ الاجهاد الى مجالين :

مجال المرونة (elastischen Bereich) $0 \leqq \sigma_{xx} \leqq \sigma_E$

ومجال اللدونة (Plastische Bereich) $\sigma_E \leqq \sigma_{xx} \leqq \sigma_B$

بما أن خط الاجهاد ـ التمدد العائد للفولاذ يشير خارج مجال المرونة الى انسياب واضح تعقبه تقسية في مجال اللدونة لذلك يعتبر الفولاذ معدن لدن ـ متين (Zaeh plastisch) .

يرافق تغير الاطوال في تجربة الشد تغيراً في ابعاد المقطع العرضي ايضاً . فمثلا يرافق ازدياد طول القضيب نقص في مساحة المقطع العرضي (القضيب المشدود يطول وينحف) وعلى العكس من ذلك ففي تجربة الضغط يرافق نقص طول القضيب المضغوط (تقاصر القضيب المضغوط) ازدياد في مساحة المقطع العرضي ايضاً (القضيب المضغوط يقصر ويثخن) .

بعض قيم المقاومة الستاتيكية لبعض المواد مقاسة بالـ kp/cm^2

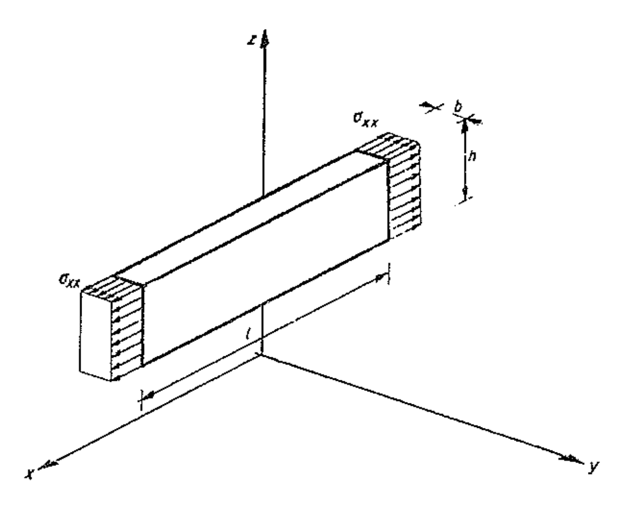
مادة التصنيع	عامل المرونة	عامل القص G	حد التناسب σ_P	حد الانسياب $\sigma_F (= - \sigma_{-F})$	مقاومة الشد (حد الانكسار) σ_B	مقاومة الضغط σ_{-B}
فولاذ البناء St.37	2 100 000	810 000	$1500 \div 2000$	$2000 \div 2500$	$3700 \div 4500$	تصلح σ_{-F}
فولاذ البناء St.52	2 100 000	810 000	2 6 5 0	$3000 \div 3600$	$5200 \div 6400$	تصلح σ_{-F}
نحاس	1 200 000	—	—	—	—	—
المينيوم	700 000	—	—	—	—	—
زجاج دوران	700 000	—	—	—	—	—
غرانيت	500 000	—	—	—	—	—
بيتون	10^5 $3 \cdot 10^5$	—	—	—	$30 \div 100$	$1000 \div 2000$
خشب الصنوبر ‖ للالياف	100 000	—	—	—	$10 \div 20$	$50 \div 400$
خشب الصنوبر ⊥ على الالياف	3 000	—	—	—	حتى 900	400
				—	30	60

إذا قيست في قضيب مقطعه العرضي مستطيل الشكل (شكل 4.5) ، عند بلوغ الاجهاد فيه قيمة معينة ، علاوة التغير الطولي Δl ، تغـــيرات ابعاد المقطع العرضي Δh و Δb ايضاً ، عندئذ يمكن وبشكل مشابه لما تم في التمدد الطولي $\varepsilon_{xx}=\Delta l/l$ تعيين التمـــــددات العرضية (التغيرات النسبية العرضية Querdehnungen) :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta b}{b} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\Delta h}{h} \tag{4-1}$$

في كلا الاتجاهين z , y . في حالة التحميل على الشد فان $\Delta h, \Delta b$ هي قيم سالبة بحيث تكون $\varepsilon_{zz}<0$, $\varepsilon_{yy}<0$.

تقترن التغيرات الموجبة لـ Δb و Δh ، في حالة التمـــدد السلبي (التقلص Stauchung) بتمددات عرضية موجبة .



شكل 4-5

تعالج في نظرية المرونة فقط الحمولات التي تكون من اجلها العلاقة بين الاجهادات والتمـددات هي علاقة خطية وبذلك فان الاجهادات الاعظمية التي تتشكل في المادة تقع تحت مجال التناسب (Proportionälitatsgrenze) . أما تعيين الاجهادات التي تقع فوق مجال التناسب فهي من وظيفة نظرية اللدونة (Plastizitätsgrenze) وهي تظهر بشكل خاص اثناء حدادة (Schmieden) او شد (Pressen) أو درفلة (Ziehen) المواد .

يعبر عن العلاقة الخطية ، التي تربط بين الاجهاد والتمدد الطولي ، والتي تعتـبر اساساً لنظرية المرونة ، بواسطة التناسب التالي :

$$\sigma_{xx} = E\, \varepsilon_{xx} \tag{4-2}$$

ويسمى هذا التناسب **بقانون المرونة** (Elastizitaetgesetz) **اوقانون هوك** (HOOKE sche Gesetz) وهو يعتبر ابسط قوانين المادة وهو يصلح فقط في المجالات الجزئية من جسم يعمل على الشد (محمل على الشد) او على الضغط وتسود فيه اجهادات محورية متجانسة . تمتد صلاحية **قانون** هوك على تغيرات الشكل الصغيرة فقط .

يسمى عامل التناسب E الذي تربط بينه وبين زاوية الميل α لمنحني الاجهاد ـ التمدد في كل نقطة من مجال التناسب ، العلاقة التالية :

$$E = \mathrm{tg}\ \alpha \tag{4.3}$$

عامل المرونة (Elastizitätsmodul) او **عامل يونغ** (YOUNG schen Modul). تعين واحدة عامل المرونة E ، حسب العلاقة (4-2) وبادخال العلاقة التالية :

$$[\varepsilon_{xx}] = \frac{\text{طول}}{\text{طول}} = 1$$

بعين الاعتبار ، بواسطة العلاقة الآتية :

$$[E] = \frac{[\sigma_{xx}]}{[\varepsilon_{xx}]} = \frac{\text{واحدة القوة}}{\text{واحدة المساحة}}$$

لوصف سلوك المادة في المجال الذي يقع تحت مجال التناسب يلزم ، علاوة على عامل المرونة ، ثابت آخر للمرونة . ولقد كان العالم بواسون (POISSON) هو أول من قام بادخاله . فلقد ثبت له ان العلاقة التي تربط بين التمدد العرضي ε_{yy} , ε_{zz} وبين التمدد الطولي ε_{xx} هي العلاقة الخطية التالية :

$$\varepsilon_{yy} = -\mu\, \varepsilon_{xx} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = -\mu\, \varepsilon_{xx} \tag{4.4}$$

وان هذه العلاقة مستقلة عن قيمة الاجهاد الذي تم قراءة التمدد عنده . يسمى عامل التناسب μ ، الذي لايتغير بالنسبة لكلا الاتجاهين z , y العموديين على اتجاه التحميل x بعدد (او عامل) التمدد العرضي (عامل التقلص العرضي) (Querdehnungszahl) وتسمى قيمته العكسية

$$m = \frac{1}{\mu} \tag{4.5}$$

بعامل (أو ثابت) بواسون (POISSON sche Konstante) . تعلن الاشارة السالبة في

العلاقة (4.1) بان التمدد الطولي الموجب ε_{xx} تتبعه تمددات عرضية سالبة (تقلصات) ε_{yy} , ε_{zz} والعكس صحيح . بالاستعاضة عن التمدد الطولي ε_{xx} في العلاقة (4.4) بما يساويه حسب العلاقة (4.2) عندئذ يتم التوصل للعلاقة ، التي تربط بين التمددات الثلاثة وبين الاجهاد الناظمي σ_{xx} ، التالية :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\mu \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = -\mu \frac{\sigma_{xx}}{E} \tag{4-6}$$

وبشكل مشابه يتم التوصل لنفس العلاقات عندما تأخذ مجموعة الاحداثيات وضعاً آخر :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E}$$

$$\varepsilon_{xx} = -\mu \frac{\sigma_{yy}}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = -\mu \frac{\sigma_{yy}}{E} \tag{4-7}$$

وكذلك

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{xx} = -\mu \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = -\mu \frac{\sigma_{zz}}{E} \tag{4-8}$$

بواسطة هذه العلاقات يصبح من الممكن ، من اجل الاجهاد σ_{xx} المعلوم مسبقاً تعيين التمددات بالاتجاهات الثلاثة المتعامدة z,y,x . يظهر في تلك العلاقات ثابتين للمرونة هما E و μ فقط وهي تعتبر من ثوابت المادة .

مثال 40 :

تستطيل مسافة القياس l لقضيب مساحة مقطعه العرضي F نتيجة لتأثير قوة الشد P بالمقدار Δl .

المعطى : $l = 20{,}0$ m , $F = 3{,}2$ cm² , $P = 5{,}5$ Mp , $\Delta l = 0{,}0164$ cm

المطلوب :

١ – تعيين قيمة اجهاد الشد σ_{xx} وقيمة التمدد الخطي ε_{xx} وقيمة عامل المرونة E .

٢ ـ تعيين مقاومة الشد (متانة الشد Zugfestigkeit) عندما تبلغ قيمة اكبر قوة يمكن للقضيب ان يتحملها هي 11,8 Mp .

الحل :

اجهاد الشد الثابت σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{F} = \frac{5,5}{3,2} = 1,719 \text{ Mpcm}^{-2}$$

التمدد الخطي (التغير النسبي الخطي) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,0164}{20,0} = 0,00082$$

بالاستعانة بكلا العلاقتين يتم تعيين عامل المرونة :

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{1,719}{0,00082} = 2096,0 \text{ Mpcm}^{-2}$$

تبلغ مقاومة الشد (متانة الشد) للمادة :

$$\sigma_B = \frac{11,8}{3,2} = 3,688 \text{ Mpcm}^{-2}$$

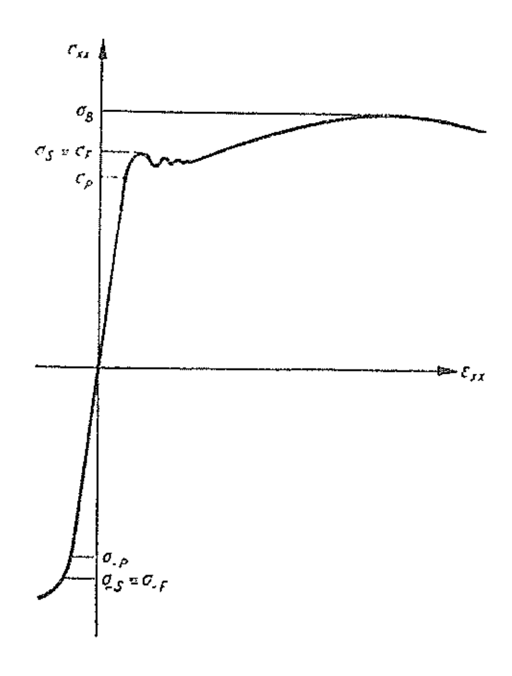
٤ ـ ٣ اضافات على تجربة الشد (Ergänzungen des Zugversuches)

لاكمال منحني (خط) الاجهاد ـ التمدد للفولاذ سوف تجري على اجسام اختبار غليظة (gedrungenen probekoerper) تجربة الضغط . حيث ترافق الاجهادات السالبة تمددات سالبة ε_{xx} . اما قانون هوك (العلاقة 4.2) فيصلح هنا ايضاً حتى مجال الضغط σ_{-p} (الشكل 4,6) .

يسمى حد الانسياب $\sigma_{-F} = \sigma_{-s}$ الذي يقع تحت حد التناسب σ_{-p} والذي تنساب المادة عنده في تجربة الضغط بحد الانسحاق (Quetschgrenze) وهو اقل ظهوراً من حد الانسياب في تجربة الشد .

يحدد المجال المرن الذي هو مجال اهتمام نظرية المرونة بواسطة العلاقة التالية :

$$\sigma_{-p} \leqq \sigma_{xx} \leqq \sigma_p \qquad (4\text{-}9)$$

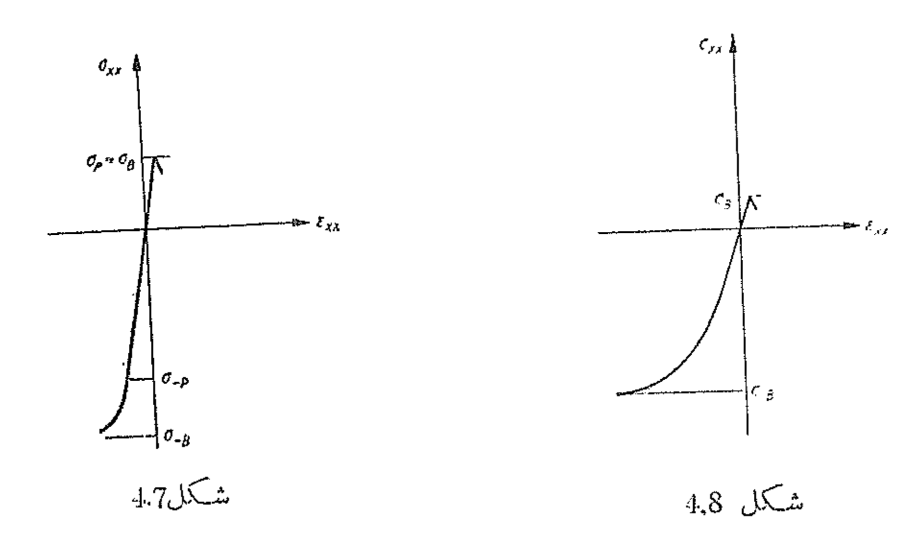


(شكل 4.6)

بشكل تقريبي تصلح من اجل الفولاذ :

$$\sigma_P = | \sigma_{-P} | \qquad (4\text{-}10)$$

يحدد سلوك المواد في حالة التحميل على الشد او الضغط بواسطة منحني الاجهاد ـ التمدد ايضاً . فمن أجل حديد الصب (Gußeisen) يتم الحصول على منحني التوزيع الممثل في الشكل (4.7) .



شكل4.7

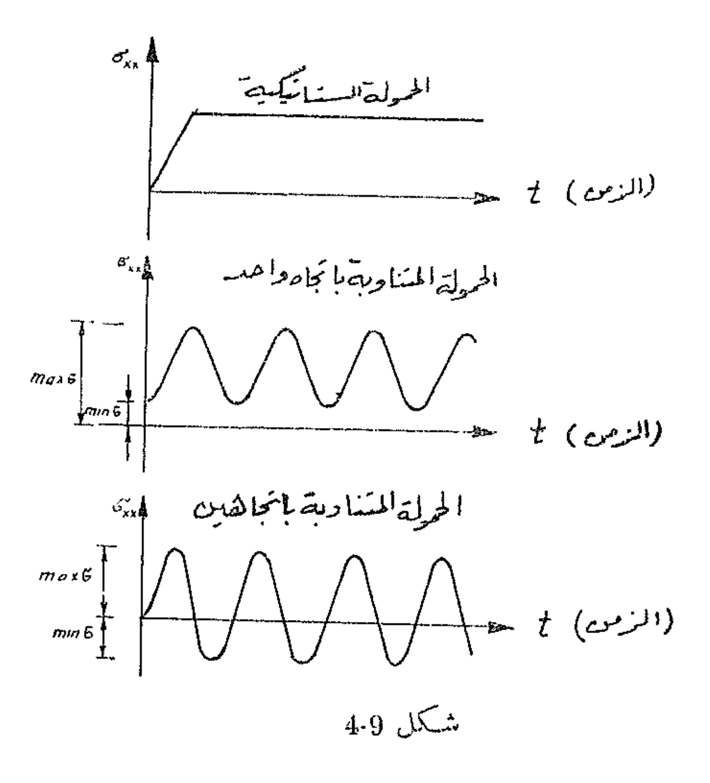
شكل 4.8

لايلاحظ في قضيب الاختبار المصنوع من حديد الصب ضمن مجال الشد أي انسياب للمادة ولا اي اختناق (تضيق) بحيث تنطبق الاجهادات σ_B و σ_P فوق بعضها البعض . لذا فان حديد الصب هو مثال نموذجي المواد المتقصفة (Spröde Werkstoffe) . يشير منحني الاجهاد ـ التمدد الى ان حديد الصب يستطيع تحمل اجهادات ضغط كبيرة اما اجهادات الشد التي يستطيع تحملها فضئيلة نسبياً .

إن منحني الاجهاد ـ التمدد للاحجار الطبيعيـة (Natursteinen) والبيتون (Beton) هو كما يشير الشكل (4.8) . من هذه المنحنيات يتبين ان باستطاعة هـذه المواد (بشـكل رئيسي) تحمل اجهادات ضاغطة فقط . في هذه الحـالة ومن اجل الاجهادات والتمددات الكبيرة فان قانون هوك يفقد صلاحيته . ولهذا السبب فقد اقترح العالم بلفنجر (BILFINGER) علاقة على شكل قطع مكافىء تربط بين التمدد والاجهاد هي التالية :

$$\varepsilon_{xx} = a\,\sigma_{xx}^{m} \qquad (4\text{-}11)$$

ان كل منحنيات (خطوط) الاجهاد ـ التمدد التي يتم الحصول عليها من تجارب الشد/ الضغط تتعلق من درجة الحرارة وتصلح فقط من اجل الحمولات الساكنة التي تطبق بالتدرج وببطىء وتسمى بالحمولات الستاتيكية (statische Belastung) (شكل 4.9) .



شكل 4-9

٤ ـ ٤ أنواع الحمولات (Belastungsarten)

إن السير الزمني للحمولة يلعب دوراً هاماً بالنسبة لمقاومة المادة التي تشكل أساساً لما يسمى **بالكشف عن المقاوما** (Festigkeitsnachweis) .

يمكن التفريق بين ثلاثة حالات للتحميل :

١ ـ **الحمولة الساكنة** (او الحمولة الستاتيكية) (ruhende – oder statische Belastung (شكل 4-9a) .

٢ ـ **الحمولة المتناوبة باتجاه واحد** (بدون تغير اشارة الاجهاد ، بدون قلب اشارة الاجهاد) (schwellende Belastung) (شكل 4-9b) .

٣ ـ **الحمولة المتناوبة باتجاهين** (مع تغير اشارة الاجهاد ، مع قلب اشارة الاجهاد) (شكل 4-9 c) .

تصعد الحمولة الساكنة ، ابتداء من الصغر الى أن تبلغ قيمتها النهائية التي تحتفظ بها ، ببطىء وبالتدريج .

تسمى مقاومة المادة للانكسار (Bruchfestigkeit des Werkstoffes) في هذه الحالة **بالمقاومة الستاتيكية أو مقاومة الاتزان** (statische – oder Standfestigkeit) τ_{st} , σ_{st} .

تعبر اجهادات الانكسار σ_B , σ_{-B} المتشكلة ، عن المقاومة الستاتيكية للمادة . تسمى مرحلة الانكسار بالذات في حالة التحميل الستاتيكي **بالكسر القسري** (Gewaltbruch) . لكن تحميل اجزاء المنشآت وعناصرالآليات ليس ستاتيكياً بل يتغيربتغير الزمن (الاشكال 4-9 b , 4-9 c) فحبل الرافعة مثلا يحمل بشكل تصعد فيه الحمولة من الصفر الى قيمتها النهائية ومن ثم تعود الى الصفر . يسمى هذا النوع من الحمولات بالحمولة المتناوبة باتجاه واحد (فحالة الاجهاد تتغير بتغير الزمن بحيث تظهر له قيمتين من نفس الاشارة)وتسمى مقاومة الكسر (مقاومةالانكسار) التابعة لها بالمقاومة المتناوبة باتجاه واحد أو المقاومة الابتدائية σ_{sch} , τ_{sch} (Schwell – oder Ursprungfestigkeit) وهي أصغر من المقاومة الستاتيكية وتزداد صغراً كلما ازداد عدد تناوب الحمولة (عدد تغير الحمولة) (Zahl der Lastwechsel) .

يقال عن الحمولة انها متناوبة باتجاهين عندما تغير الاجهادات اشارتها زمنياً (بتغير الزمن) وتتأرجح بين حدين ثابتين (مثلا اذا اعقب ازالة الحمولة ، تحميل باتجاه آخر كما هو الحال على سبيل المثال في نابض الساعة أو عندما يتكرر ثني السلك الى الخلف والامام عندئذ يتم الحصول

على حمـــولة متغيرة) (شكل 4-9 c) وتسمى المقاومة التابعة لهـــا **بالمقاومة المتناوبة** (Wechselfestigkeit) τ_w و σ_w وهي أصغر من المقاومة المتناوبة باتجاه واحد وتزداد صغراً بازدياد عدد تناوب الحمولة . ان الاجهاد الديناميكي في حالة الحمولة المتناوبة باتجاه واحد وكذلك في حالة الحمولة المتناوبة باتجاهين ، الذي يؤدي لانكسار المادة هو دائماً اصغر بكثيرمن الاجهاد الستاتيكي ولذلك يتكلم عن تعب (اعياء) المادة ويسمى الانكسار الناتج عن الحمولة المتناوبة **بالانكسار الاهتزازي** (Schwingungsbruch) او **الانكسار الدائم** (Dauerbruch) وتسمى القيم الحدية للاجهادات **بالمقاومة المتناوبة** (Wechselfestigkeit) او **المقاومة الدائمة**. (Dauerfestigkeit) بشكل عـام وفي حالة الانكسار الدائم لا يتشكل على مقربة من مكان الانكسار اختناق (تضيق) تشير تجارب الشد والضغط الى ان تغير الشكل لا يبلغ قيمته النهائية بعـــد التحميل (بعد تطبيق الحمولة) مباشرة وإنما بعد إنقضاء زمن ليس بالقصير يسمى تأخر بلوغ تغير الشكل قيمته النهائية بعد تطبيق الحمولة **بزحف المادة** (Kriechen des Werkstoffes). ليس لظاهرة الزحف في الفولاذ أية اهمية أما في البيتون فينبغي أخذها بعين الاعتبار .

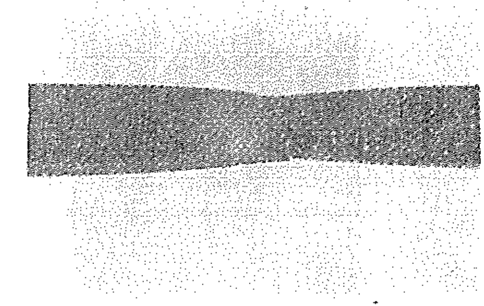
بتحميل قضيب فولاذي فوق حد المرونة σ_E ثم ازالة الحمـولة كلياً يلاحظ عند إعادة تحميـل الفولاذ من جديد ازدياد في قيمة حد المرونة (ارتفاع حد المرونة). تسمى هذه الظـاهرة بمفعول باوشنجر (BAUSCHINGER – Effect) . يعمد في الحياة العملية ، في بعض الحالات، الى تقسية (vorreken) الفولاذ الذي سوف يحمل على الشد بالاعتماد على هذه الظاهرة وبذلك يتم التوصل الى حد مرونة أعلى .

يلاحظ في تجارب الشد والضغـــط نوعان للانكسار (للكسر) هما : كسر انفصال (Trennbruch) وكسر اجهاد مماسي (Schubspannungsbruch) . يتعامد ، في كسر الانفصال، سطح الكسر مع محور القضيب .

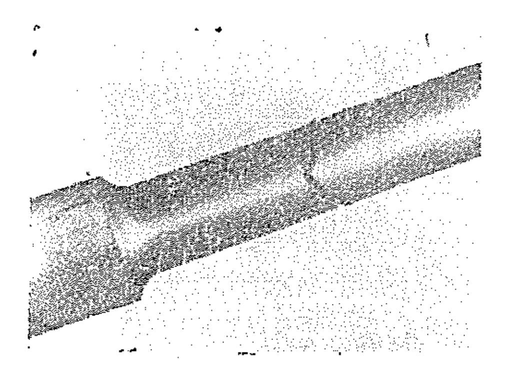
تشير المواد المتقصفة (Spröde Werkstoffe) كما على سبيل المثال في بعض خلائـــط الالمنيوم والشبه (النحاس الاصفر) والبيتون والخشب الى سطوح كسور تميل بزاوية 45° تقريباً بالنسبة لاتجاه القوة (الاشكال 4-10 a حتى 4-10 h) . تسمى امثـــال هذه الكسور بكسور الاجهاد المماسي .

لتعليل كلا الظاهرتين سوف تحسب الاجهادات التي تتشكل في سطح القطع الذي يميل بالنسبة لمحور القضيب (الاوسط) بالزاوية φ (شكل 4-11) . ان الاجهادات التي تتشكل في قطع عمودي على محور القضيب هي :

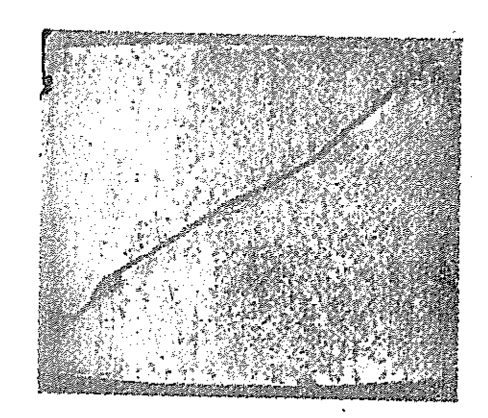
$$\sigma_{xx}(x) = \text{const.} \quad , \quad \sigma_{yy} = 0 \quad , \quad \tau_{xy} = 0$$



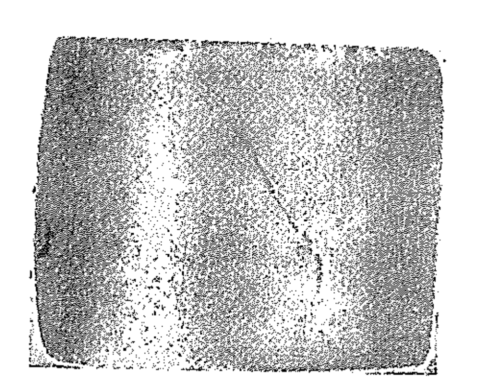
شكل 4-10 b قضيب مستطيل الشكل مشدود (فولاذ)



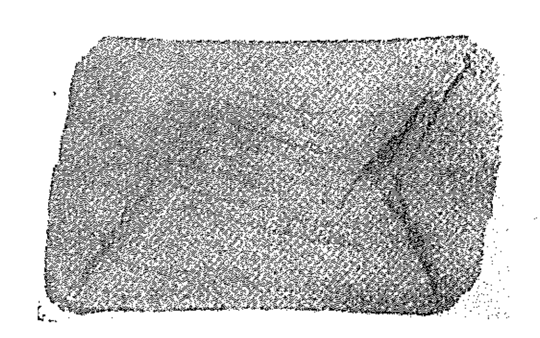
شكل 4-10 a قضيب مبروم مشدود (خليطة Al)



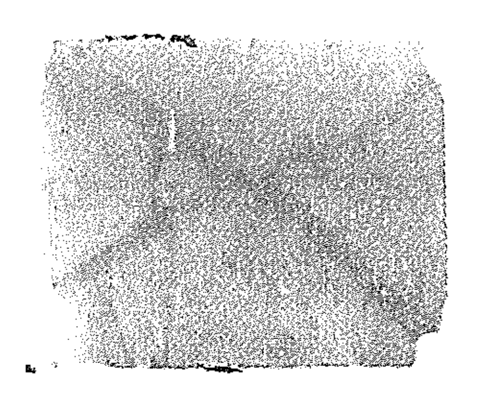
شكل 4.10 d جسم اسطواني مضغوط (خليطة Mg)



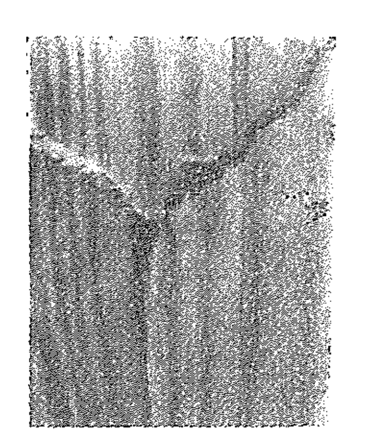
شكل 4.10 c جسم اسطواني مضغوط (حديد صب)



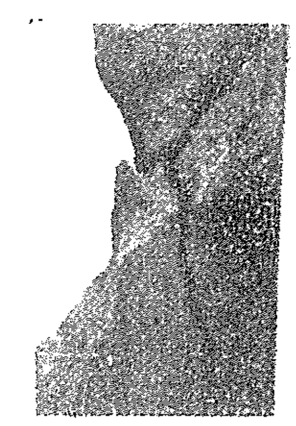
شكل 4.10 f مكعب من الخشب القاسي (زان أحمر) مضغوط عمودياً على إتجاه الألياف



شكل 4,10 e مكعب من الخشب القاسي (زان أحمر) مضغوط باتجاه الألياف



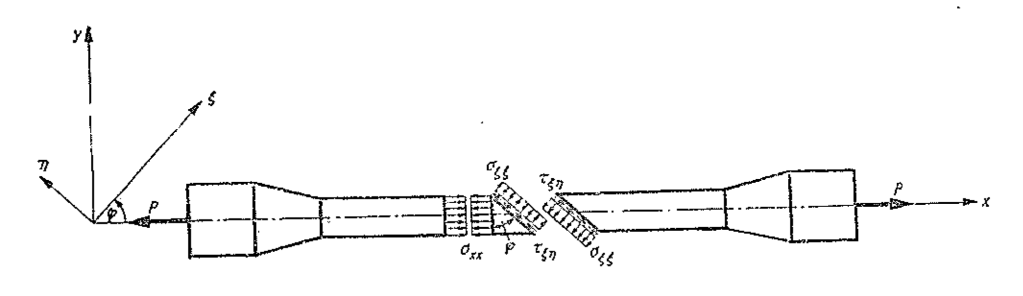
شكل 4.10 g خشب الصنوبر مضغوط
باتجاه الألياف



شكل 4.10 h جسم اسطواني مضغوط
(فحم المهابط الكهربائية)

من أجل سطح القطع const=ξ الذي يميل بالزاوية φ ، يتم الحصول من العلاقة (2-24) على الاجهادات التالية :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\varphi) &= \frac{\sigma_{xx}}{2} + \frac{\sigma_{xx}}{2}\cos 2\varphi = \frac{\sigma_{xx}}{2}(1+\cos 2\varphi) \\ \tau_{\xi\eta}(\varphi) &= -\frac{\sigma_{xx}}{2}\sin 2\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (4\ 12)$$



شكل 4 11

تتشكل القيمة الاعظمية (بالقيمة المطلقة) للاجهاد المماسي من اجل $\sin 2\varphi = \pm 1$ ، اي باتجاه القطع $\varphi = \pm \pi/4$ (القطع الذي يميل بزاوية $\pm 45°$) . اما الاجهادات التي تتشكل على سطوح القطع المذكورة فتبلغ :

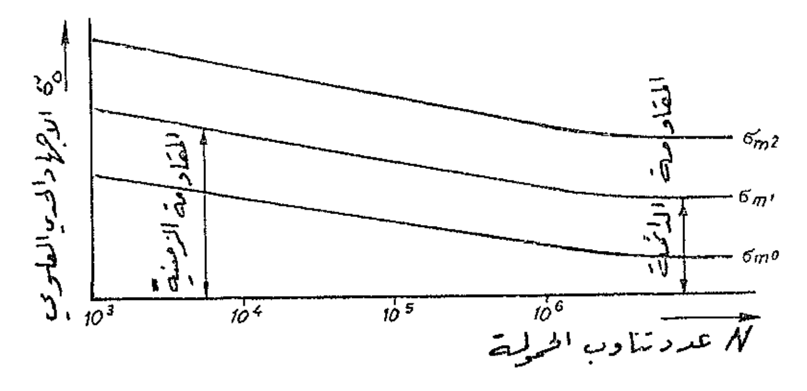
$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi}\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) &= +\frac{\sigma_{xx}}{2} \\ \tau_{\xi\eta}\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) &= \mp\frac{\sigma_{xx}}{2}\end{aligned}\right\} \qquad (4\ 13)$$

بواسطة العلاقة (4-13) يمكن الان تعليل اسباب تشكل نوعي الكسر في تجارب الضغط والشد:

إذا كان سطح الكسر عمودياً على محور القضيب (الاوسط) فان الاجهاد الناظمي وحده هو المسؤول عن الكسر . اما اذا مال سطح الكسر بالنسبة لمحـور القضيب بزاوية قدرها 45° فان السبب في الكسر يعود للاجهاد المماسي الاعظمي $|\sigma_{xx}/2|$. تسمى السطوح المتشكلة في هذه الحالة **بسطوح الانزلاق** (Gleitflaechen) (وذلك لانزلاقها بالنسبة لبعضها في لحظةالكسر).

٤ ـ ٥ مقاومة الاهتزاز (Schwingungsfestigkeit)

لقد تم ، فيما سبق ، التنويه الى ان مقاومة المواد في حالة الحمولة المهتزة تنقص (تنخفض) بزيادة عدد تناوب الحمولة . تسمى هذه الظاهرة **بالتعب** (Ermüdung) ، ولقد قام العلمـاء في الآونة الاخيرة بالتركيز على بحثها ودراستها.ففي القرن التاسع عشر قام العالم فولر (WOEHLER) باختبار مقاومة المواد المستخدمة في حالة الحمولة المهتزة واليه تنسب ما تسمى **بمنحنيات فولر** . (WOEHLER-Kurven) (شكل 4-11 b) .



شكل 4-11b

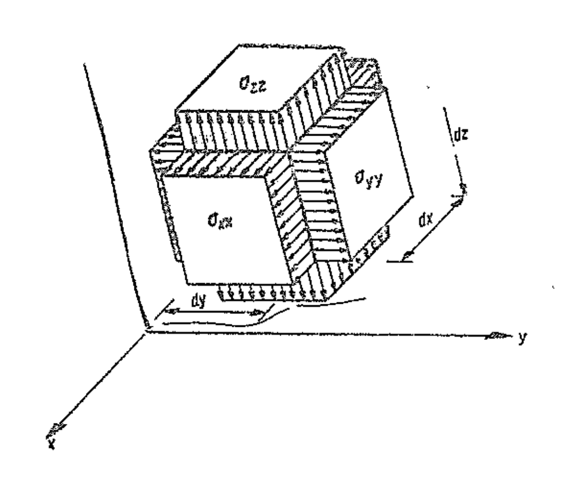
تمثل منحنيات فولر ، المنحنيات الحدية للاجهاد الاعلى (العلوي) الذي تستطيع المـادة المستخدمة تحمله وذلك من اجل عدد معين لتناوب الحمولة هو N ومن اجل اجهاد وسطيمعين هو σ_m . لقـد تم في الشكل (4-11b) تمثيل الاجهاد الحدي σ_o بالاستعـانة بعـدد تنـاوب الحمولة (Lastwechselzahl) الذي مثل فيه بشكل لوغارتمي .

يسمى الاجهاد الحدي في الجزء الهابط من المنحني بالمقاومة الزمنية (Zeitfestigkeit) وفي الجزء الافقي بالمقاومة الدائمة (Dauerfestigkeit). ويسمى الاجهاد الذي لا يؤدي لتهشم (لتحطيم) المادة المستعملة مهما ازداد عدد تناوب الحمولة بالاجهاد الدائم . ففي الفولاذ يتم بلوغ المقاومة الدائمة حين يصل عدد تناوب الحمولة 10^6 ، أما في المعادن الخفيفة فحين بلوغه العدد 8.10^6 . تمثل المقاومة الدائمة في كثير من الحالات كتابع للاجهاد الوسطي σ_m اما الناتج فيسمى بالشكل الايضاحي (الصورة الايضاحية) للمقاومة الدائمة (Dauerfestigkcitssehaubild) .

تتلخص وظيفة المصمم بتخمين عدد وقيمة تناوب الحمولة التي تتشكل في اجزاء المنشأ على مدى حياته أما المنحني الذى ينتج عن ذلك فيتوجب وقوعه تحت المنحني الحدي المسموح .

٤ ـ ٦ قانون مرونة كوشي (CAUCHY sches Elastizitätsgesetz)

لقد تمت حتى الآن ، بواسطة قانون هوك ، معالجة التمدد المرن لجسم تسيطر عليه حالة إجهاد محورية (وحيدة المحور) متجانسة فقــــط . والآن سوف تتم دراسة مكعب لانهائي الصغر (صغير قدر الامكان) أضلاعه الموازية للمحاور الأحـداثية هي dz , dy , dx وتؤثر عليـــه الاجهادات σ_{x} ، σ_{yy} ، σ_{zz} الموازية لاضلاعه الثلاثة (شكل 2 -4) .



شكل 12 4

نتيجة لتأثير هذه الاجهادات فان الجسم يقوم بالتغيرات الطولية التالية :

$\Delta\, dx\,(\sigma_{xx})$, $\Delta\, dx\,(\sigma_{yy})$, $\Delta\, dx\,(\sigma_{zz})$,

$\Delta\, dy\,(\sigma_{xx})$, $\Delta\, dy\,(\sigma_{yy})$, $\Delta\, dy\,(\sigma_{zz})$,

$\Delta\, dz\,(\sigma_{xx})$, $\Delta\, dz\,(\sigma_{yy})$, $\Delta\, dz\,(\sigma_{zz})$

ينبغي الانتباه الى أن التغيرات الطولية الموجودة خارج القطار الرئيسي المخطط المكتوب أعلاه هي تغيرات طولية سالبة. تعطى تغيرات الطول الكلية للمكعب بواسطة العلاقة التالية (يتم الحصول على التمددات الكلية بجمع التمددات بالاتجاهات الطولية والتقلصات العرضية بالاتجاهين العموديين عليها) :

$$\Delta dx = \Delta dx(\sigma_{xx}) + \Delta dx(\sigma_{yy}) + \Delta dx(\sigma_{zz}),$$

$$\Delta dy = \Delta dy(\sigma_{xx}) + \Delta dy(\sigma_{yy}) + \Delta dy(\sigma_{zz}),$$

$$\Delta dz = \Delta dz(\sigma_{xx}) + \Delta dz(\sigma_{yy}) + \Delta dz(\sigma_{zz})$$

وكذلك

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(\sigma_{xx}) + \varepsilon_{xx}(\sigma_{yy}) + \varepsilon_{xx}(\sigma_{zz}),$$

$$\frac{\Delta dy}{dy} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}(\sigma_{xx}) + \varepsilon_{yy}(\sigma_{yy}) + \varepsilon_{yy}(\sigma_{zz}),$$

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(\sigma_{xx}) + \varepsilon_{zz}(\sigma_{yy}) + \varepsilon_{zz}(\sigma_{zz})$$

بتعويض التمددات (العلاقة 4-6 حتى 4-8) في العلاقة الاخيرة ، يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} - \mu\sigma_{zz}), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \mu\sigma_{zz}), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}14)$$

تعطي هذه المعادلات العلاقة التي تربط بين الاجهادات الناظمية والتمددات لحالة إجهاد فراغية (ثلاثية المحور) ولقد كان اول من قام بالتعبير عنها هو العالم كوشي (CAUCHY) .

لحل هذه المعادلات بالنسبة للاجهادات يصار اولاً ومن العلاقة (4-14) ، لتشكيل مجموع التمددات (الانفعالات) :

$$\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}) \qquad (4\text{-}15)$$

باضافة ما يلي :

$$0=-\mu\,\sigma_{xx}+\mu\,\sigma_{xx}\ ,\ 0=-\mu\,\sigma_{yy}+\mu\,\sigma_{yy}\ ,\ 0=-\mu\sigma_{zz}+\mu\,\sigma_{zz}$$

لقانون مرونة كوشي ينتج :

$$E\ \varepsilon_{xx}=\sigma_{xx}\,(1+\mu)-\mu\,(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}),$$

$$E\ \varepsilon_{yy}=\sigma_{yy}\,(1+\mu)-\mu\,(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}),$$

$$E\ \varepsilon_{zz}=\sigma_{zz}\,(1+\mu)-\mu\,(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})$$

وبعد إعتبار العلاقة (4-14) يتم التوصل للعلاقات التالية :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=\frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_{xx}+\frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})\right],\\
\sigma_{yy}&=\frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_{yy}+\frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})\right],\\
\sigma_{zz}&=\frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_{zz}+\frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}16)$$

تسمى هذه العلاقات في كثير من المراجع بقانون هوك المعمم (verallgemeinertes HOOKE sches Gesetz) للاجهادات الناظمية .

بواسطة العلاقة (4-14) يمكن التعبير عن التمدد الحجمي (Kubische Dehnung) بالشكل التالي :

$$e=\frac{d\overline{V}\quad dV}{dV}=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}=\frac{1\quad 2\mu}{E}\ \sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz} \qquad (4\text{-}17)$$

بسبب صلاحية العلاقة السابقة يتبين ان التمدد الحجمي هو لا متغير (Invarianten) (قيمة مستقلة) بالنسبة لدوران الاحداثيات . بشكل خاص عندما تكون :

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\sigma$$

فان التمدد الحجمي يأخذ الشكل التالي :

$$e = \frac{d\overline{V} - dV}{dV} = \frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma$$

من الخبرة يتبين أنـه لا يمكن ان يكون التغير الحجمي (Volumenaenderung) في حالة اجهادات الشد من كل الاطراف ، سالباً كما لا يمكنه أن يكون في حالة إجهادات الضغط على كل الجهات ، موجباً . من العلاقة العامة (4-17) ومن العلاقة الخاصة الاخـيرة يتبين ان إشارة e تتحدد من خلال إشارة الاجهادات . من ذلك يتم التوصل لصلاحية العلاقة التاليـة :

$$1 - 2\mu \geqq 0$$

التي تحدد المجال الذي يقع عامل التمدد العرضي:

$$0 \leqq \mu \leqq \frac{1}{2} \tag{4-18}$$

ضمنه . من اجل $\mu=0{,}5$ ينعدم ، حسب العلاقة (4-17) ، التغير الحجمي . تسمى المواد التي تنطبق عليها هذه الحالة بالمواد غير القابلة للانضغاط (inkompressible Werkstoffe) .

حالات خاصة :

ا ـ حالة الاجهاد المستوية (Ebener Spannungszustand) .

من اجل حالة الاجهاد المستوية ينعدم في المستوي x , y الاجهاد الناظمي σ_{zz} . اما قانون مرونة كوشي الذي يصلح من اجل هذه الحالة فيتم الحصول عليه من العلاقة (4-14) بالشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \mu\sigma_{xx}) \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{aligned}\right\} \tag{4-19}$$

وكذلك من العلاقة (4-16) بالشكل الآتي :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}) , \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}) , \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = -\frac{\mu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{aligned}\right\} \tag{4-20}$$

ب ـ حالة التشوه المستوية (Ebener Verzerrungszustand) .

اذا لم يكن بالامكان تشكل التمدد بالاتجاه ـ z وكانت التمددات في كل من الاتجاهـين y , x ممكنة حينئذ يقال عن هذه الحالة انها حالة تشوه مستوية . ففي هذه الحالة يتم الحصول ، من قانون مرونة كوشي (4-14 وكذلك (4-16) وبالاستعانة بالتمدد $\varepsilon_{zz}=0$ على العلاقات التالية :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}\right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\sigma_{yy} - \mu\sigma_{xx}\right] \\ \varepsilon_{zz} &= \mu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) = \frac{E\,\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}(\varepsilon_{xx}+\mu\varepsilon_{yy}) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}21)$$

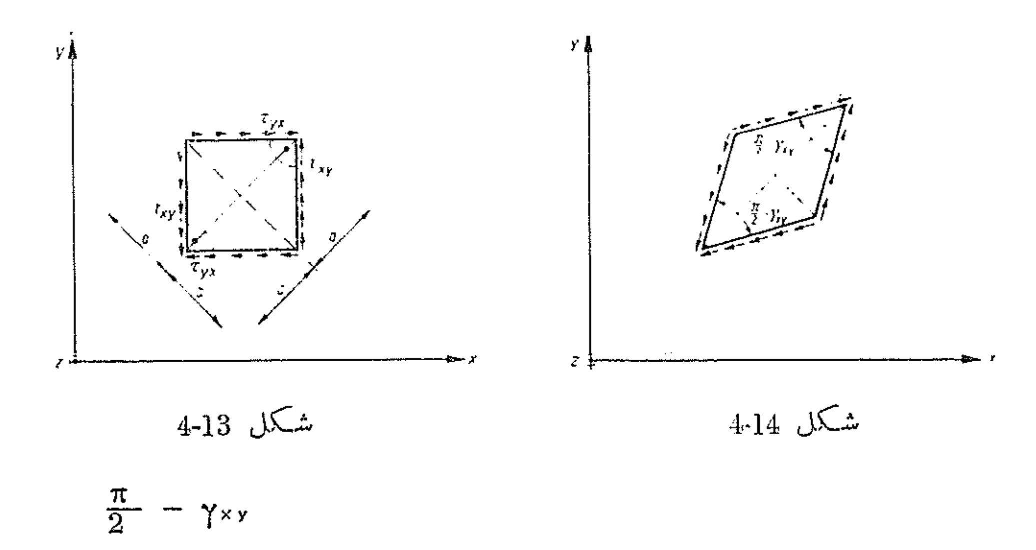
أو بعد حلها بالنسبة للاجهادات على العلاقات الآتية :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}\right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}\right] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}22)$$

٤ ـ ٧ قانون المرونة من أجل الاجهادات المماسية

(Elastizitaetsgesetz für schubbeanspruchung)

بينما يعطي قانون مرونة كوشي (العلاقة 4.14 و 4.16) العلاقات التي تربط بين الاجهـادات الناظمية والتمددات فان قانون المرونة من أجل الاجهادات المماسية يعطي العلاقات التي تربط بين الاجهادات المماسية (Schubspannungen $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ و $\tau_{yz}=\tau_{zy}$ ، $\tau_{zx}=\tau_{xz}$ والتغيرات الزاوية Winkeländerungen γ_{xy} ، γ_{yz} ، γ_{zx} . للتمكن من التعبير عن هذه العلاقات سوف يتم تمثيل المكعب الممثل في الشكل (4 13) والمحمل بالاجهادات المماسية $\tau_{xy}=\tau_{yx}$. لتكن مادة الجسم المدروس محققة لقانون مرونة كوشي . يؤدي التحميل الصـافي بالاجهادات المماسية (التحميل القصي الصافي) الى تغير زاوي γ_{xy} لكل سطح من سطوح القطع المربعة الشكل x=const بحيث تتحول الزاوية القائمة التي تغلقها السـطوح فيما بينها (شكل 4-13) الى زاوية حادة (شكل 4-14) :

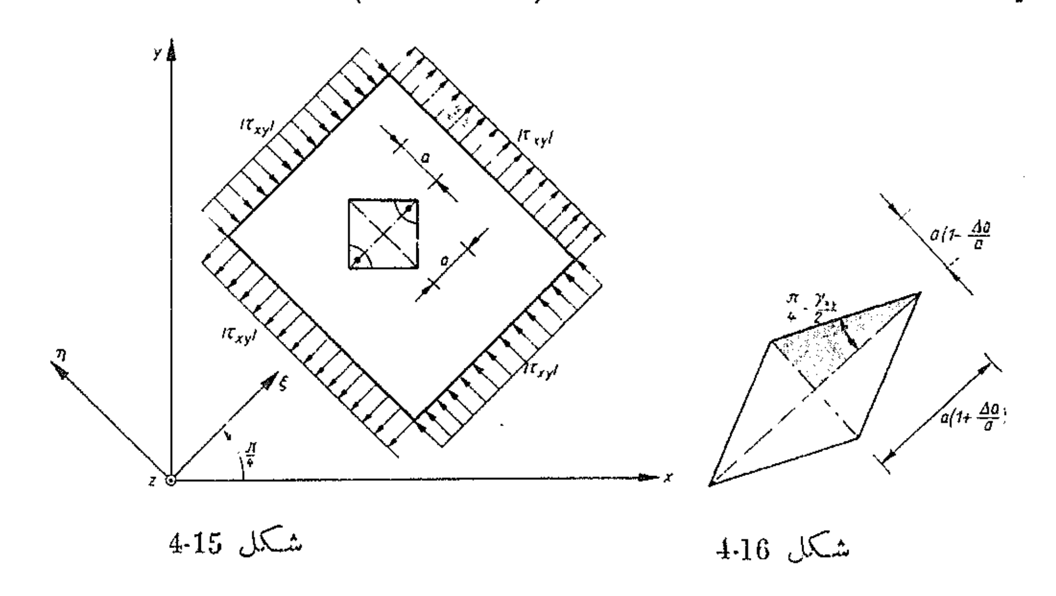


شكل 4-13

شكل 4-14

$$\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$$

يمكن التوصل للتحميل القصي الصافي المذكور بواسطة الاجهادات الناظمية $\sigma_{\xi\xi} = \tau_{xy}$ و $\sigma_{\eta\eta} = -\tau_{xy}$ التي تؤثر على السطوح المنسوبة الى المجموعة ξ , η المدورة بزاوية $\pi/4$ بالنسبة لمجموعة الاحداثيات x , y وذلك وفقاً لحالة اجهاد ده سانت فينانت (ده سان فينان) المشار إليها في المثال 35 من الفقرة ٢ – ٣ – ٦ (شكل 4-15) .



شكل 4-15

شكل 4-16

لايجاد علاقة تربط بين التغير الزاوي وبين التمددات سوف تتم دراسة نصف الوتر a لسطح القطع z=const من المكعب غير المتشوه والذي يأخذ بعد التشوه الاطوال التالية :

$$a + \Delta a = a\left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)$$

$$a - \Delta a = a\left(1 - \frac{\Delta a}{a}\right)$$

بعد أعتبار العلاقة :

$$tg\,\frac{\gamma_{xy}}{2} \approx \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

يتم الحصول على ظل الزاوية $\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{xy}}{2}$ وذلك كما يلي :

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{xy}}{2}\right) = \frac{tg\,\frac{\pi}{4} - tg\,\frac{\gamma_{xy}}{2}}{1 + tg\,\frac{\pi}{4}\;tg\,\frac{\gamma_{xy}}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma_{xy}}{2}}{1 + \frac{\gamma_{xy}}{2}} = \frac{a\left(1 - \frac{\Delta a}{a}\right)}{a\left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)}$$

منها ينتج

$$\frac{\Delta a}{2} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

بالاستعانة بالتمددات في كل من الاتجاهين ξ , η :

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\Delta a}{a}\;,\;\varepsilon_{\eta\eta} = -\frac{\Delta a}{a}$$

يتم الحصول ، من العلاقة السابقة، على العلاقات التي تربط بين التمددات والتغيرات الزاوية المطلوبة:

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\gamma_{xy}}{2}\;,\;\varepsilon_{\eta\eta} = -\frac{\gamma_{xy}}{2} \qquad (4,23)$$

من قانون مرونة كوشي (4-19) يتم الحصول ، بعد الاستعانة بالعـلاقات $\sigma_{\xi\xi} = \tau_{xy}$ و $\sigma_{\eta\eta} = -\tau_{xy}$ على ما يلي :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{\xi\xi} - \mu\,\sigma_{\eta\eta}\right) = \frac{1+\mu}{E}\,\tau_{xy} \\ \varepsilon_{\eta\eta} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{\eta\eta} - \mu\,\sigma_{\xi\xi}\right) = -\frac{1+\mu}{E}\,\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \qquad (4.24)$$

بمقارنة العلاقة (4.23) مع العلاقة (4-24) ينتج :

$$\frac{1+\mu}{E}\,\tau_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

أو

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \quad (4.25)$$

بنفس الطريقة يمكن ، من أجل الاجهادات الماسية τ_{yz} , τ_{zx} ، اشتقاق العلاقة التالية :

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} \quad (4.26)$$

و

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx} \quad (4.27)$$

تمثل العلاقات (4-25 حتى 4-27) قانون المرونة من اجل الاجهادات الماسية لمادة متجانسـة متماثلة المناحي (مادة متجانسة ايزوتروبية) ومنها يتم التوصل للعلاقة الخطية بين الاجهادات الماسية وبين التغيرات الزاوية الصغيرة الناتجة عنها . يسمى عامل التناسب :

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (4.28)$$

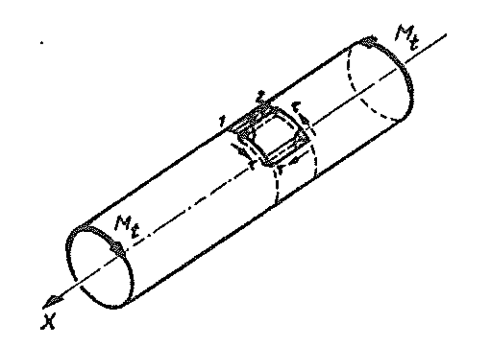
بعامل المرونة القصي (Schubelastizitaetsmodul) **أو عامل الانزلاق** (Gleitmodul) بهذا يكون قد تم التوصل لقانون المرونة من اجل الاجهادات المماسية ممثلا بالشكل التالي :

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \;,\; \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \;,\; \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (4.29)$$

اذا تم ، بواسطة تجربة الشد او تجربة الضغط ، تعيين عامل المرونة E وعامل التمدد العرضي μ لمادة عندئذ يستطاع تعيين عامل المرونة القصي G حسب العلاقة (4-28) . لكن نظراً لما يعده التعيين الدقيق لعامل التمدد العرضي μ لمادة ، بواسطة تجربة الشد او تجربة الضغط ، من صعوبات كبيرة لذلك فان تعيين G من العلاقة(4-28) ليس أمراً سهلا كما يعتقد . لذلك يعيين عامل الانزلاق G باللجوء للتجارب ثم يعيين بعد ذلك عامل التمدد العرضي بواسطة العلاقة (4-28) :

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (4.30)$$

فلتعيين عامل المرونة القصي G تجرى تجربة الفتل (Torsionsversuch) على قضيب اسـطواني دائري يحمل في نهايتيه بعزوم فتل متعاكسة (شكل 4-17).



شكل 4-17

ختاماً لهذه الفقرة سوف يتم تلخيص قانون المادة لجسم مثـالي المـرونة (ideal – elastisch) ومتجانس ومتماثل المناحي (قانون كوشي او ما يسمى في اغلب المراجع بقانون هوك المعمم) :

التمددات (Dehnungen) :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \mu\,(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \mu\,(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})\right] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \mu\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right] \end{aligned}\right\} \quad (4.31)$$

التغيرات الزاوية (Winkelaenderungen) :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\,,\quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\,.\quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \qquad (4.32)$$

أو تكتب بعد حلها بالنسبة للاجهادات :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_{xx} + \frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_{yy} + \frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\right] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_{zz} + \frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\right] \end{aligned} \qquad (4.33)$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}\;;\quad \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz}\;;\quad \tau_{zx} = G\,\gamma_{zx}$$

بواسطة الاجهادات الرئيسية σ_{11} ، σ_{22} ، σ_{33} يتم التوصل من العلاقة (4-31) الى التمددات الرئيسية ε_{11} ، ε_{22} ، ε_{33} :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \mu\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \mu\left(\sigma_{33} + \sigma_{11}\right)\right] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \mu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (4.34)$$

حالات خاصة :

آ ـ حالة الاجهاد المستوية (Ebener Spannungszustand) :

في أحد الاتجاهات لا تتشكل اجهادات .

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \qquad (4.35)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \mu\,\sigma_{yy}\right), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \mu\,\sigma_{xx}\right), \quad \gamma_{yz} = 0 \qquad (4.36)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) \quad ; \quad \gamma_{zx} = 0$$

وبذلك

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \mu\,\varepsilon_{yy}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \mu\,\varepsilon_{xx}\right) \qquad (4.37)$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

ب ـ حالة التشوه المستوية (Ebener Verzerrungszustand) :

في أحد الاتجاهات تنعدم تغيرات الشكل .

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

أن فرضية حالة التشوه المستوية هي على العموم حالة اجهاد فراغية . من العلاقة (4 21) ينتج بعد تبديل :

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad : \quad \sigma_{zz} = \mu\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \qquad (4.38)$$

وبذلك يتم الحصول على التغيرات (Verformungen) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\,\sigma_{xx} - \mu\,\sigma_{yy}\right]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\,\sigma_{yy} - \mu\,\sigma_{xx}\right] \qquad (4.39)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

وكذلك الاجهادات :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\,\varepsilon_{xx} + \mu\,\varepsilon_{yy}\right]; \; \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\,\varepsilon_{yy} + \mu\,\varepsilon_{xx}\right] \; ; \; \tau_{yz} = 0 \quad (4\text{-}40)$$

$$\sigma_{zz} = \mu\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \; ; \; \tau_{zx} = 0$$

دائرة التشوه المستوية (Ebener Verzerrungskreis) :

بشكل مشابه لدائرة اجهاد مور يمكن أيضاً تخطيطياً ايجاد قيم التشوهات على سطح يشكل ناظمه مع المحور x الزاوية ψ .

$$\epsilon_{\psi} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\cos 2\psi + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\psi =$$

$$= \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} + \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2}\cos 2(\psi_0 - \psi) \qquad (4.41)$$

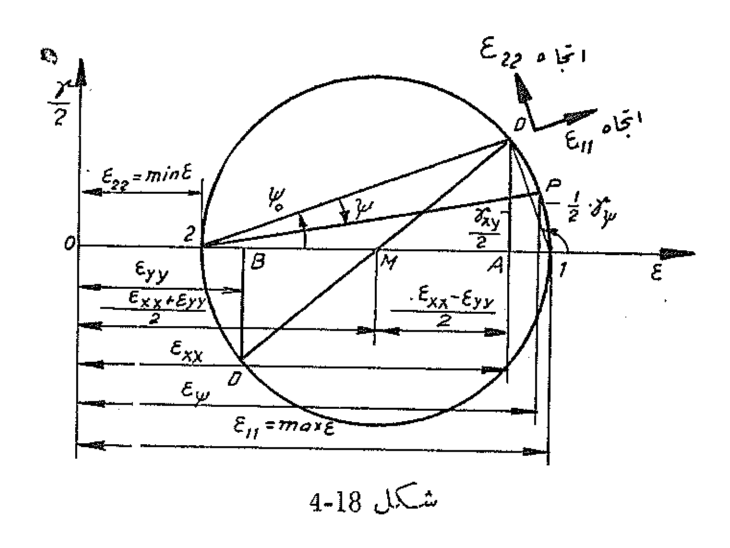
$$\frac{\gamma\psi}{2} = -\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\sin 2\psi + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\psi =$$

$$= \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2}\sin 2(\psi_0 - \psi)$$

يتم الحصول على اتجاه التغيرات النسبية الرئيسية (التمددات الرئيسية) $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ من العلاقة التالية :

$$\operatorname{tg} 2\psi_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \tag{4.42}$$

تتطابق المعادلات (4-41) مع معادلات حالة الاجهاد المستوية (العلاقة 2-24) ولهذا السبب يمكن تبديل τ_{xy} في دائرة اجهاد مور بـ $\gamma_{xy}/2$ (شكل 4-18)



شكل 4-18

٤ ـ ٨ أمثلة

مثال 41 :

حمل قضيب موشوري (prismatische Druckstab) مقطعه العرضي دائري الشكل بحمولة ضاغطة (شكل 4-18a) .

المعطى :

. $P = 2000\ kp$, $r = 2\ cm$, $\varphi = 30^{\circ}$

المطلوب : تعيين

١ ـ اجهادات القطع (Schnittspannungen) التي تتشكل في المستوي الذي يميل بزاوية φ .

٢ ـ الاجهادات الماسية الاعظمية .

بإستخدام الطريقين التحليلي والتخطيطي .

الحـــل :

الاجهادات في القطع الناظمي (القطع العمودي على المحور الاوسط للقضيب) :

$$\sigma_0 = -\frac{P}{F} = -\frac{P}{\pi r^2} = -159 \text{ kp/cm}^2$$

الطريق التحليلي :

اجهادات القطع :

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_0}{2}(1 + \cos 2\varphi) = -119{,}5 \text{ kp/cm}^2$$

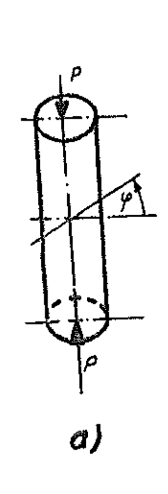
$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\varphi \qquad = -69 \quad \text{kp/cm}^2$$

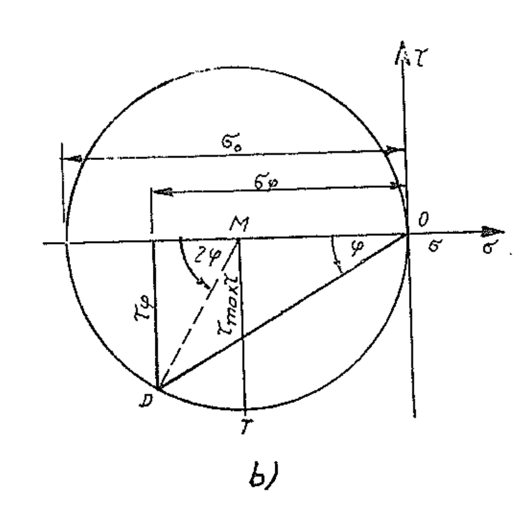
الاجهاد المماسي الاعظمى (وهو يتشكل عند الزاوية $\varphi = 45^\circ$):

$$\max \tau = \tau_\varphi (\varphi = 45^\circ) = \frac{\sigma_0}{2} = -79{,}5 \text{ kp/cm}^2$$

الطريق التخطيطي :

المقياس : $34{,}5 \text{ kp/cm}^2 \;\widehat{=}\; 1 \text{ cm}$ (شكل 4-18 b)





شكل 4-18 a,b

مثال 42 :

المعطى : حالة اجهاد مستوية

$$\sigma_{xx} = -1000\ kp/cm^2$$

$$\sigma_{yy} = +\ 400\ kp/cm^2$$

$$\sigma_{xy} = -\ 500\ kp/cm^2$$

المطلوب : تعيين

١ ـ الاجهادات الرئيسية σ_{11} ، σ_{22} .

٢ ـ اتجاه الاجهادات الرئيسية .

٣ ـ اجهادات القطع σ_φ ، τ_φ التي تتشكل في المستوي الذي يميل ناظمه بزاوية قدرها $\varphi = 30^0$.

٤ ـ الاجهادات المماسية الرئيسية .

٥ ـ سطوح الاجهادات المماسية الرئيسية .

وذلك باتباع الطريقين التحليلي والتخطيطي .

الحل :

الطريق التحليلي :

اتجاه الاجهادات الرئيسية :

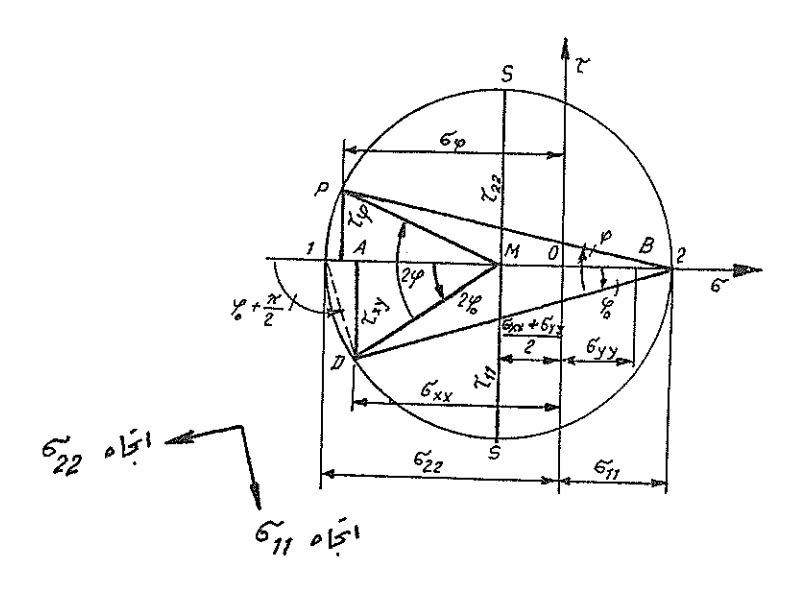
$$tg\ 2\varphi_0 = \frac{2\ \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = 0,7144$$

$$\varphi_0 = 17,77^0 \quad ; \quad \varphi_0 + \frac{\pi}{2} = 107,77^0$$

(φ_0 هي الزاوية المحصورة بين الناظم على السطح والمحور x وهي تشير بعكس اتجاه عقارب الساعة) .

$$\sigma_{22} = \sigma_\varphi(\varphi = \varphi_0) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi_0 + \tau_{xy}\sin 2\varphi_0 = -1160,3\ kp/cm^2$$

$$= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



شكل 4-19

$$\sigma_{11} = \sigma_\varphi(\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi_0 - \tau_{xy} \sin 2\varphi_0 = 560{,}3 \text{kp/cm}^2$$

$$= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

اجهادات القطع ($\varphi = 30^\circ$) :

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi = -1083 \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau_\varphi = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi = 356{,}2 \text{ kp/cm}^2$$

الزاوية المحصورة بين المحور x وبين الناظم على سطح الاجهاد المماسي الرئيسي :

$$\text{tg } 2\varphi_1 = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}} = -1{,}4$$

$$\varphi_1 = -27{,}23^\circ \qquad , \qquad \varphi_1 + \frac{\pi}{2} = 62{,}77^\circ$$

وكذلك

$$\left(\varphi_1 = \varphi_0 \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

الاجهادات المماسية الرئيسية :

$$\tau_1 = \tau_\varphi(\varphi=\varphi_1) = -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\varphi_1 + \tau_{xy}\cos 2\varphi_1 = 860{,}3\ \text{kp/cm}^2$$

$$\tau_2 = \tau_\varphi\left(\varphi = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\ \tau_1$$

الطريق التخطيطي :

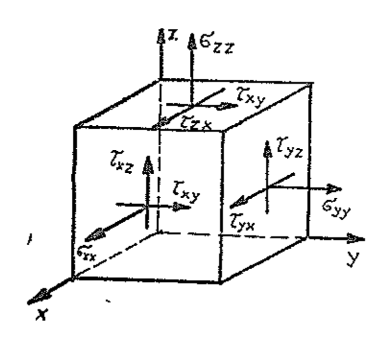
لقد تم في الشكل (4·19) تمثيل دائرة اجهاد مور .

المقياس :

$$1\ \text{cm} \ \widehat{=}\ 370\ \text{kp/cm}^2$$

مثال 43 :

المعطى : حالة اجهاد فراغية (شكل 4·20) .



شكل 4·20

$\sigma_{xx} = 300\ \text{kp / cm}^2$; $\tau_{xy} = 200\ \text{kp / cm}^2$

$\sigma_{yy} = 200\ \text{kp/cm}^2$; $\tau_{yz} = 200\ \text{kp/cm}^2$

$\sigma_{zz} = 500\ \text{kp/cm}^2$; $\tau_{zx} = 100\ \text{kp/cm}^2$

المطلوب : تعيين :

١ ـ الاجهادات الرئيسية σ_{11} ، σ_{22} ، σ_{33} .

٢ ـ الاجهاد المماسي الاعظمي .

الحـــل :

معادلة ايجاد الاجهادات الرئيسية (Bestimmungsgleichung der Hauptspannungen) :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx}-\sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^3-(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\sigma^2+(\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\sigma_{yy}\sigma_{zz}+\sigma_{zz}\sigma_{xx}-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2)\sigma-$$
$$-[\sigma_{xx}(\sigma_{yy}\sigma_{zz}-\tau_{yz}^2)+\tau_{xy}(\tau_{yz}\tau_{zx}-\tau_{xy}\sigma_{zz})+\tau_{zx}(\tau_{xy}\tau_{yz}-\tau_{zx}\sigma_{yy})]=0$$

القيم العددية :

$$\sigma^3-10^3\sigma^2+22.10^4\sigma-4.10^6=0$$

$\sigma_{11}=689{,}2\ kp/cm^2$, $\sigma_{22}=290{,}9\ kp/cm^2$

$\sigma_{33}=19{,}9\ kp/cm^2$

الاجهاد المماسي الاعظمي :

بما أن :

$$\sigma_{11}>\sigma_{22}>\sigma_{33}$$

فان :

$$\max\tau=\frac{\sigma_{11}-\sigma_{33}}{2}=334{,}65\ kp/cm^2$$

ان سطح الاجهاد المماسي العائد للاجهاد المماسي $\max\tau$ ينصف الزاوية القائمة المحصورة بين سطوح الاجهادات الرئيسية العائدة للاجهادات الناظمية σ_{11} ، σ_{33} .

مثال 44 :

المعطى : حالة تشوه مستوية .

$$\sigma_{xx} = 400 \ kp/cm^2$$

$$\sigma_{yy} = -200 \ kp/cm^2 \quad ; \quad \mu = 0,3$$

$$\tau_{xy} = -200 \ kp/cm^2 \quad ; \quad E = 2,1 \ . \ 10^6 \ kp/cm^2$$

المطلوب : تعيين

١ ـ الاجهاد σ_{zz} اللازم ليتم بلوغ حالة التشوه المستوية .

٢ ـ ε_{xx} ، ε_{yy} ، γ_{xy} (تحليلياً) .

٣ ـ التمددات الرئيسية ε_{11} ، ε_{22} واتجاهات التمددات الرئيسية وكذلك التغيرات التي تتشكل على السطح الذي يشكل ناظمه مع المحور x زاوية $\psi = +30°$ (تخطيطاً بواسطة دائرة التشوه) .

٤ ـ التمدد الحجمي .

الحل :

حالة التشوه المستوية :

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

١ ـ من العلاقة التالية :

$$\epsilon_{zz} = 0 = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \mu \ (\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right]$$

ينتج :

$$\sigma_{zz} = \mu \ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 60 \ kp / cm^2$$

٢ ـ

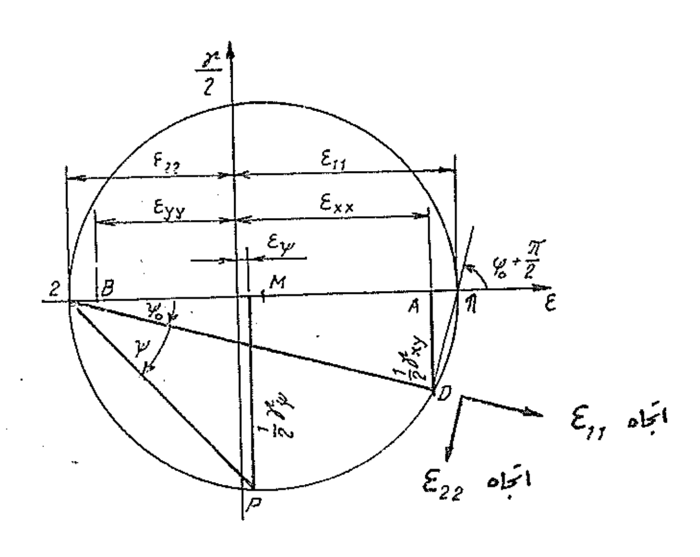
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = 8,08 \ 10^5 \ kp / cm^2$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\,\sigma_{xx} - \mu\,\sigma_{yy}\right] = 2,105 \ . \ 10^{-4}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\,\sigma_{yy} - \mu\,\sigma_{xx}\right] = -1,610 \ . \ 10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -2,476 \ . \ 10^{-4}$$

٣ ـ المقياس : $1\,cm \mathrel{\widehat{=}} 0{,}8 \cdot 10^{-4}$ (شكل 4-21) .



شكل 4-21

من الشكل المذكور ينتج :

$$\psi_0 = -16{,}85^\circ$$

$$\psi_0 + \frac{\pi}{2} = 73{,}15^\circ$$

التمددات الرئيسية :

$$\epsilon_{11} = \epsilon_\varphi\,(\psi = \psi_0) = \max \epsilon = 2{,}480 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_\varphi\left(\psi = \psi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \min \epsilon = -1{,}986 \cdot 10^{-4}$$

تغير الشكل على السطح المائل :

$$\epsilon_\psi = 0{,}104 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_\psi = -4{,}455 \cdot 10^{-4}$$

٤ ـ التمدد الحجمي :

$$c = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} = 0{,}495 \,.\, 10^{-4}$$

مثال 45 :

وضع جسم مرن عديم الحركة (spielfrei) وعديم الاحتكاك (Reibungsfrei) في مغــــطس (قالب) صلب (starren Gesenk) ثم ضغط عليه بواسطة مكبس صلب بقـوة قدرهـا P (شكل 4-22) .

المعطى : a , b , c , E , μ , V_z .

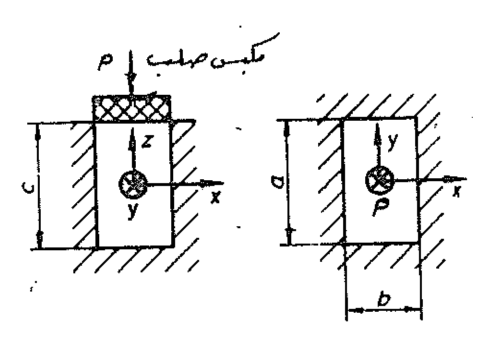
المطلوب : تعيين

١ ـ القوة الضاغطة P التي تكبس الجسم بالاتجاه z بمقدار يساوي V_z .

٢ ـ الضغط (الذي يتشكل) على سطوح المغطس (القالب) .

٣ ـ تغير طول المحيط (konturlaenge) تحت تأثير القوة P وذلك بعد رفع المغطس (القالب) .

٤ ـ القوة الضاغطة *P اللازمة لكبس الجسم بمقدار V_z دون مغطس (قالب) .



شكل 4-22

الحل :

قانون هوك :

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \mu\,(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right]$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \mu\,(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right]$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \mu\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right]$$

١ - و ٢ -

$$\varepsilon_{xx} = 0 \quad , \quad \sigma_{zz} = -\frac{P}{ab}$$

$$\varepsilon_{yy} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{V_z}{c}$$

وبذلك يتم التوصل من قانون هوك المعمم لما يلي :

$$P = \frac{V_z \, ab \, E}{c\left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}\right)}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{-P\mu}{ab\,(1-\mu)}$$

٣ -

$$\sigma_{xx} = 0 \quad , \quad \Delta b = \varepsilon_{xx}\, b = \frac{\mu P}{E a}$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad , \quad \Delta a = \varepsilon_{yy}\, a = \frac{\mu P}{E b}$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{P}{ab} \quad , \quad \Delta c = \varepsilon_{zz}\, c = -\frac{Pc}{abE}$$

٤ -

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-V_z}{c} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = -\frac{P^*}{abE} \quad , \quad (\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0)$$

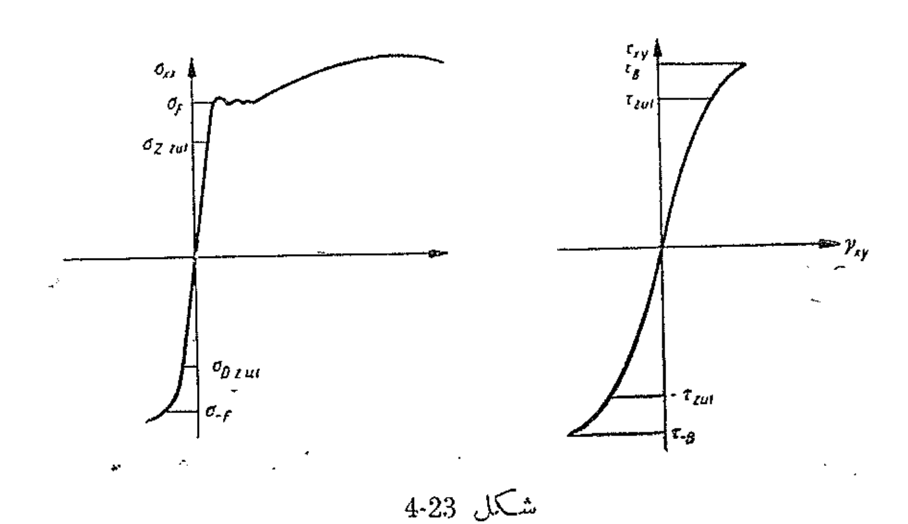
$$P^* = \frac{V_z\, E\, ab}{c}$$

٤ ـ ٩ مفهوم الاجهادات المسموحة (Begriff der zulaessigen Spannungen)

في حالة استعمال القضيب المشدود أو المضغوط كعنصر إنشائي عنـدئـذ لا يجوز للاجهادات الناتجة عن تأثير الحمولة (اجهاد الاستعمال Gebrauchssparnung) (والتي يتم الحصول عليها حسابياً) أن تتخطى حد الانسياب في المواد المتينة (zähen Werkstoffen) كما ولا يجوز أن تتخطى حد الانكسار في المواد المتقصفة (spröden Werkstoffen) (يعتبر حد الانسياب وحد الانكسار ، التي تمثل عوامل المتانة للمادة ، ثوابت يتم الحصول عليهما تجريبيا) . ففي الحالة

الأولى تظهر (تشكل) تغيرات شكل كبيرة وغير مسموحة (unzulassig große, bleibende Formaenderungen) وفي الحالة الثانية يحدث الانكسار (الذي يعتبر من أبلغ الأخطار التي يمكن أن تحدث للمنشأ) .

لوجوب تفادي وقوع كل من الحالتين أو كلاهما في العناصر الانشائية وبأمان معين ، لذلك ينبغي تحديد المجال الذي يسمح لاجهادات الاستعمال أن تقع ضمنه . أما ذلك فيتم بواسطة ما يسمى **بالاجهادات المسموحة** zul σ , zul τ (شكل 4-23).



شكل 4-23

تعتبر الاجهادات المسموحة المذكورة جزءاً من اجهادات الانسياب σ_F , σ_{-F} , τ_F وكذلك جزءاً من اجهادات الانكسار σ_B , σ_{-B} , τ_B (يقع الاجهاد المسموح دائماً تحت اجهاد الانكسار وكذلك تحت اجهاد الانسياب أيضاً) وهي تحسب بتقسيم اجهادات الانكسار وكذلك اجهادات الانسياب على عامل الآمان وذلك حسب العلاقة التالية :

$$\text{zul}\ \sigma_z = \frac{\sigma_F}{\nu_F}\ ,\quad \text{zul}\ \sigma_D = \frac{\sigma_{-F}}{\nu_F}\ ,\quad \text{zul}\ \tau = \frac{\tau_F}{\nu_F} \tag{4.43}$$

وكذلك

$$\text{zul}\ \sigma_z = \frac{\sigma_B}{\nu_B}\ ,\quad \text{zul}\ \sigma_B = \frac{\sigma_{-B}}{\nu_B}\ ,\quad \text{zul}\ \tau = \frac{\tau_B}{\nu_B} \tag{4.44}$$

حسب ذلك ينبغي أن تقع إجهادات الاستعمال σ_{xx} , τ_{xy} ضمن المجالات التالية :

$$zul\ \sigma_D \leqq \sigma_{xx} \leqq zul\ \hat{\sigma}_z \qquad (4.45)$$

$$- zul\ \tau \leqq \tau_{xy} \leqq zul\ \tau \qquad (4.46)$$

يسمى العامل $\nu > 1$ **بعامل الامان** (ν_F عامل أمان الانسياب و ν_B عامل أمان الانكسار) وهو يحدد من قبل مشرعي المواصفات أما قيمته فتتعلق بسلسلة من العوامل هي جودة (Güte) وخواص (Eigenschaft، المادة ودقة معطيات الحمولة وطرق حساب الاجهادات ومن وظيفـة العنصر الانشائي (فعامل الامان المستعمل هو مسألة اقتصادية تلعب فيها وظيفـــة العنصر الانشائي دوراً هاماً) . يصغر عامل الامان كلما ازدادت دقة الطريقة المتبعة لحساب الاجهادات التي تتشكل في العنصر الانشائي . كما أنه يصغر أيضاً كلما ازدادت الدقة التي تعطى بها صفات المادة (خواص المادة) .

فعلى سبيل المثال يمكن إعطاء الفولاذ عامل أمان أصغر من عامل الامان الذي يعطى للخشب وذلك لأن البناء الداخلي للفولاذ هو نوعاً ما متجانس بينما لا يمكن ضمان التجانس في البناء الداخلي للخشب . يرافق اختيار عوامل أمان كبيرة تصميم غير إقتصادي .

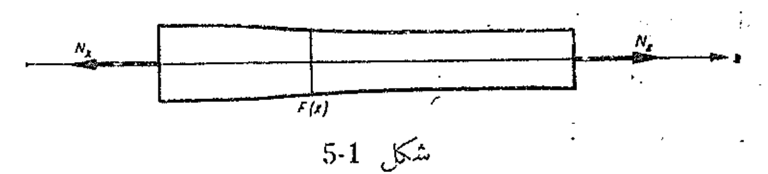
الفصل الخامس

التحميل على الشد ـ الضغط

ZUG / DRUCKBEANSPRUCHUNG

٥ ـ ١ الاجهادات في حالة التحميل على الشد / الضغط
(Spannnngen bei Zug/Druckbeanspruchung)

ليكن المقطع العرضي للقضيب المدروس ، المحمل بقوة طولية (ناظمية) ثابتة والتي ينطبق حاملها على محور القضيب الاوسط (المحور x) (شكل 5-1) ثابتاً او متغيراً بشكل خفيف . يسمى هذا التحميل ، **بالتحميل على الشد / الضغط** .

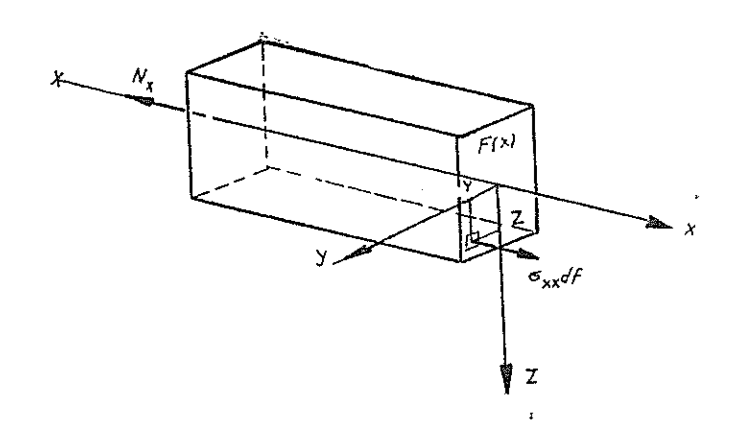


شكل 5-1

لتعيين الاجهادات التي تؤدي لها (الناتجة عن) القوة الناظمية N_x ، سوف يقطع القضيب وتثبت فيه مجموعة المحاور الاحداثية z , y (شكل 5-2) . يزال إضطراب التوازن الناتج عن القطع عندما تتوازن محصلة الاجهادات المتشكلة على سطح القطع مع القوة الناظمية N_x التي تؤثر على القضيب (وبذلك يتوازن كل جزء من الاجزاء المقطوعة على حدة تحت تأثير الحمولات الخارجية ومحصلات الاجهاد الداخلية المؤثرة عليه) .

تتحقق شروط توازن القوى في كل من الاتجاهين z , y وشرط توازن العزوم بالنسبة للمحور x دائماً عندما لا يحتوي سطح القطع إجهادات مماسية τ_{xz} , τ_{xy} . أما شرط توازن القوى بالاتجاه x وشرطي توازن العزوم بالنسبة لكل من المحورين z , y فتأخذ الشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned} & N_x - \int_{F(x)} \sigma_{xx}\, dF = 0 \;, \\ & \int_{F(x)} z\, \sigma_{xx}\, dF = 0 \;, \\ & \int_{F(x)} y\, \sigma_{xx}\, dF = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$



شكل 5-2

لكن هذه المعادلات لا تكفي وحدها لتعيين توزيع الاجهادات الناظمية $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(y, z)$ بشكل واضح (eindeutig) لذلك فان المشكلة المعروضة هي غير مقررة ستاتيكياً . للتوصل إلى حل هذه المشكلة سوف يستعان بالحقيقة المستمدة من الخبرة ألا وهي ان المقاطع العرضيةللقضبان المشدودة / او المضغوطة الثابتة والمتغيرة بشكل خفيف ، تبقى بعد تغير الشكل مستوية . تؤدي هذه الفرضية لان تبقى كافة النقاط التي تقع قبل التغير على مستوي عمودي على محور القضيب الاوسط ، بعد التغير ايضاً على مستوي عمودي على المحور x. وبذلك يبلغ التمددالانفعال في كل مكان من المقطع العرضي (شكل 5-3) القيمة التالية :

$$\epsilon_{xx} = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \epsilon\ (x) \qquad (5.2)$$

شكل (5-3)

بالاستعانة بقانون هوك :

$$\sigma_{xx} = E\, \epsilon_{xx}$$

فان العلاقة السابقة تعطي النتيجة التالية :

$$\sigma_{xx} = E\, \epsilon_{xx} = E\, \epsilon\ (x) = \sigma\ (x) \qquad (5.3)$$

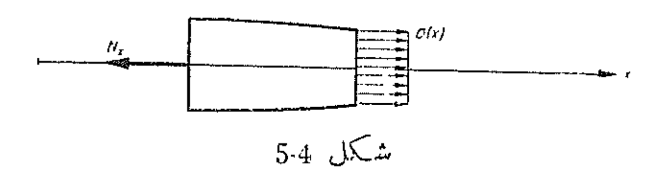
منها يلاحظ ان الاجهاد الناظمي يتوزع على القطع العرضي بشكل منتظم . بتبديل العلاقة (3-5) في المعادلات (5-1) ينتج :

$$\left.\begin{aligned} N_x - \sigma(x) \int_{F(x)} dF &= 0 \\ \sigma(x) \int_{F(x)} z\, dF &= 0 \\ \sigma(z) \int_{F(x)} y\, dF &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

يتطابق تحقيق المعادلتين الاخيرتين وذلك لان العزوم الستاتيكية لسطح القطع العرضي (للمقطع العرضي) بالنسبة للمحور y والمحور z ، والتي هي بالفرض (حسب الفرض) محاور مركزية معدومة . من المعادلة الاولى للعلاقة (5-4) يتم التوصل من اجل الاجهاد الناظمي الى العلاقة التالية :

$$\sigma(x) = \frac{N_x}{F(x)} \qquad (5\ 5)$$

يشير الشكل (5-4) إلى توزيع الاجهاد الناظمي في المقطع العرضي ٠



شكل 5-4

من اجل القوة الناظمية N_x الموجبة فان جزءاً من القضيب (قطعة من القضيب) سوف يشد ومن اجل القوة السالبة فانه سوف يضغط . تعتبر الاجهادات الناظمية في القضيب المشدود موجبة اي انها إجهادات شادة (Zugspannungen) اما في القضيب المضغوط فان الاجهادات الناظمية هي سالبة ، اي انها إجهادات ضاغطة (Druckspannungen) .

يسمى إستقلال (عدم إرتباط) التمدد عن إحداثيات المقطع العرضي ، الذي تعبر عنه المعادلة (5-2) ، **بفرضية بقاء المقاطع العرضية** ، للقضبان المحملة على الشد / الضغط ، **مستوية** ، وهي تصلح بدقة فقط من أجل القضبان ذات المقاطع العرضية الثابتة على طول القضيب وعلى بعد

كاف عن نقاط تطبيق القوى الوحيدة N_x . فعلى مقربة من نقاط تطبيق القوى الوحيـــدة لايستطاع تعيين توزيع الاجهاد بواسطة العلاقة البسيطة (5-5) فهناك تتشكل حالة اجهاد فراغية معقدة ولكنها تقتصر على الحدود الطرفية من القضيب فبعد تخطي تلك الحـدود يأخذ توزيع الاجهاد الشكل المعرف بالمعادلة (5-5) وهو يزداد دقة كلما إزداد البعد عن نقاط تطبيق القوى N_x . تسمى هذه الحقيقة بمبدأ ده سانت فينانت(سان فينان) (Prinzip von DE ST. VENANT) . في حالة تغير المقطع العرضي عند النقطة x بشكل كبير أو بشكل مفاجيء (شكل 5-5a) فان المقاطع العرضية لاتبقى مستوية وإنما تتشوه (verwöllen) أما توزيـع الاجهاد في مناطق تغـير المقاطع العرضية بشكل كبير (على سبيـل المثال فجوة ، ثقب والخ) فانه يشير الى رؤوس اجهاد (Spannungsspitzen) . يشير الشكل (5-5 b) الى توزيع الاجهاد النـاظمي في المقاطع العرضية التي يكون فيها التغير أعظمياً . إن الاجهادات الاعظمية $\max \sigma_{xx} = \max \sigma$ أكـبر بكثير من الاجهاد :

$$\sigma(x_0) = \frac{N_x}{F(x_0)}$$

(a)

(b)

$x = x_0$ — max σ — σ_{xx}

شكل 5-5

الذي يتشكل فيما لو استخدمت العلاقات دون أخذ لتأثير الفجوات بعين الاعتبار . حيث ان $F(x_0)$ هي مساحة المقطع العرضي في أضيق مكان من القضيب . تسمى النسبة :

$$\varkappa = \frac{\max \sigma}{\sigma(x_0)} \geqq 1 \qquad (5.6)$$

عامل الفجوة (معامل الثقب) (kerbfaktor) . فاذا كان هذا العامـــل (المعامل) معلوماً فبالامكان تعيين الاجهاد الاعظمي بواسطة العلاقة التالية :

$$\max \sigma = \varkappa\, \sigma(x_0) = \frac{N_x}{F(x_0)} \qquad (5.7)$$

عندما يكون أجهاد الشد المسموح (zuläessige Zugspannungen):

$$\text{zul } \sigma > 0$$

وكذلك اجهاد الضغط المسموح (Zulaessige Druckspannungen) :

$$\text{zul } \sigma_D < 0$$

لقضيب محمل معلومين عندئذ يطالب من الاجهادات الناظمية المتشكلة في أي مقـطع عرضي من القضيب أن تقع ضمن مجال الاجهاد التالي :

$$\text{zul } \sigma_D \leqq \sigma (x) = \frac{N_x}{F (x)} \leqq \text{zul } \sigma_z \qquad (5.8)$$

يسمى هذا النوع من الاختبار **بالكشف عن الاجهاد** (Spannungsnachweis) . من المعتـاد الاستعاضة عن العلاقة (5 8) بالعلاقة المختصرة التالية :

$$\frac{| N_x |}{F (x)} \leqq | \text{zul } \sigma | \qquad (5.9)$$

ففي حالة القوى الشادة يستعاض في المتراجحة بدلا عن $\text{zul}\sigma$ باجهـاد الشد المسموح $\text{zul } \sigma_z$ وفي حالة القوى الضاغطة يستعـاض عنها باجهاد الضغط المسموح $\text{zul } \sigma_D$. اذا كانت القـوة الناظمية N_x والاجهاد المسموح $\text{zul } \sigma$ معلومين فبالامكان استـخدام العلاقة (5-9) لحسـاب **مساحة المقطع العرضي اللازمة** erf F والتي لايجوز أثناء التصميم أخذ قيمه أصغر منها . وبذلك يتم التوصل **لعلاقة التصميم** (Bemssungsformel) التالية :

$$\text{erf } F \geqq \frac{| N_x |}{| \text{zul } \sigma |} \qquad (5.10)$$

في حالة كون المقطع العرضي معطاً وعندما يكون الاجهاد المسموح معلوماً عندئذ تعطي العلاقة (5-9) ، من أجل القيمة الحدية ، القوة المسموحة zul N :

$$| \text{zul } N_x | \leqq F (x) \cdot | \text{zul } \sigma | \qquad (5.11)$$

وبذلك يتم تعيين تحمل المقطع العرضي (Tragfaehigkeit des Querschnittes).

للتوسع في البحوث السابقة سوف يدخل تغير القوة الناظمية الموجودة (المتشكلة) في القاطع العرضية على طول القضيب بعين الاعتبار (أي سوف تدرس حالة كون القـــوى الناظمية

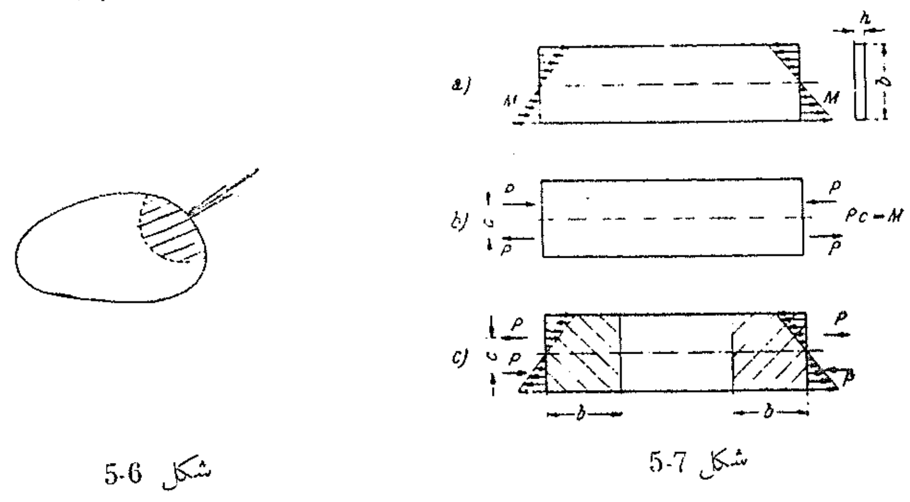
المتشكلة في مقاطع عرضية مختلفة من القضيب ليست ثابتة وانما هي توابع للاحداثي (x) . سوف تستخدم ، في هذه الحالة أيضاً ، العلاقة (5.5) لتعيين الاجهاد الناظمي والتي تكتب هكذا :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{|N_x(x)|}{F(x)} \leqq |zul\ \sigma| \\
&erf\ F \geqq \frac{|N_x(x)|}{|zul\ \sigma|} \\
&|znl\ N_x(x)| \leqq F(x)\,.\,|zul\ \sigma|
\end{aligned}\right\} \quad (5.12)$$

٥ ـ ٢ مبدأ ده سانت فينانت (Prinzip von DE ST. VENANT)

عندما تؤثر على جسم ، بمجموعة متوازنة من القوى بشكل موضعي (شكل 5.6) عندئـذ تتخامد القوى الداخلية والتغيرات بالابتعاد عن مكان التحميل بحيث تتحول عملياً ، على امتداد جزء محدود فقط يحيط بوضع التحميل ، الى اجهادات (لقد تم تهشيره في الشكل 5.6) ، بينما لا تظهر في بقية احزاء الجسم أية قوى داخلية وتغيرات ذات قيمة . مما ذكر يتم التوصل للنتيجة الهامة التي تقول ان حالة الاجهاد وحالة التغير في اجزاء معينة من الجسم لا تتغير عملياً عندما تستبدل الحمولة المؤثرة موضعياً بما يكافئها ستاتيكياً ولزيادة الايضاح سوف يلجأ للمثال التالي:

حملت الاطراف الضيقة لجسم سطحي مستوي (بلاطة او صفيحة) بعزمي انعطاف M تطبـق على الجسم على شكل قوى مستمرة التوزيع (شكل 5.7 a). بالاستعاضة عن هذه القـوى الموزعة بمزدوجة قوى وحيدة P.C=M تكافئها ستاتيكياً (شكل 5.7 b) عندئذ لا تتغير



شكل 5.6

شكل 5.7

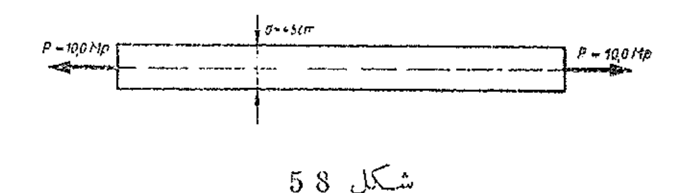
حالة الاجهاد في الجزء الاوسط تغيراً ملموساً (ذو اهمية) . بعد ذلك ليحمل الجسم في نفس الوقت بالقوى الموزعة وبمزدوجة القوى P . c − (شكل 5 7 c) عند ذلك تشكل هذه الحمولات ، على كل حافة ، مجموعة متوازنة من القوى ، لا يتعدى تأثيرها ، حسب مبدأ ده سانت فينانت ، الاجزاء الطرفية المؤشرة (شكل 5-7 c) بينما يبقى الجزء الاوسط عملياً خال من الاجهادات . اي ان تأثير القوى الموزعة (المستمرة التوزيع) في المنطقة الوسطى يبطل تأثير مزدوجة القوى P . c − (اي ان مزدوجة القوى P . c + والقوى الموزعة لها ، في المنطقة الوسطى ، نفس التأثير) .

٥ ـ ٣ امثلة

مثال 46 :

حمل قضيب فولاذي مقطعه العرضي دائري الشكل ، قطره d بقوة شد P (شكل 5-8).
المعطى : d=4,5 cm , P=10,0 Mp وعامل الامان بالنسبة لانسياب مادة القضيب $\nu_F=3$. يبلغ إجهاد انسياب المادة $\sigma_F=2,1\ \text{Mp cm}^{-2}$.

المطلوب : التأكد من امكانية القضيب على حمل القوة P ضمن الامان المعطى .



شكل 5 8

الحل :

سوف يتم في البداية تعيين الاجهاد المسموح ، حسب العلاقة (4-43) :

$$\text{zul}\ \sigma = \frac{\sigma_F}{\nu_F} = \frac{2,1}{3} = 0,7\ \text{Mp cm}^{-2}$$

بالاستعانة بمساحة المقطع العرضي :

$$F = \frac{\pi\, d^2}{4} = \frac{\pi\ 4,5^2}{4} = 15,9\ \text{cm}^2$$

والقوة الناظمية $N_x(x)=P$ فان الكشف عن الاجهادات حسب العلاقة (5-9) يصبح كالتالي:

$$\frac{P}{F} = \frac{10.0}{15,90} = 0,629 \text{ Mp cm}^{-2} < 0,7 \text{ Mp cm}^{-2}$$

من هذه العلاقة يتبين ان القضيب المذكور يستطيع حمل القوة P ضمن عامل امان قيمته 3 .

مثال 47 :

حمل قضيب مسطح (Flachstab) سماكته d بقوة شد P .

المعطى :

$d = 1,0$ cm , $P = 7,5$ Mp , zul $\varepsilon = 1,4 \text{ Mp cm}^{-2}$.

المطلوب : تعيين عرض القضيب b حتى يستطيع تحمل القوة المؤثرة عليه .

الحل :

يتم تعيين المساحة اللازمة للمقطع العرضي ، حسب العلاقة (5.10) :

$$\text{erf F} \geqq \frac{7.5}{1,4} = 5,36 \text{ cm}^2$$

وبما ان سماكة القضيب هي d=1,0 cm فان العرض اللازم للقضيب erf b يأخذ القيمةالتالية :

$$\text{erf b} \geqq \frac{5,36}{1,0} = 5,36 \text{ cm}$$

مثـال 48 :

يتألف المقطع العرضي لقضيب من بروفيل 16] .

المعطى : الاجهاد المسموح للمادة $\text{zul } \sigma = 1,6 \text{ Mpcm}^{-2}$.

المطلوب : تعيين قوة الشد التي يستطيع القضيب المذكور حملها .

الحل :

تقرأ مساحة المقطع العرضي للبروفيل 16] ، من الجدول الخاص بالبروفيلات الموجود فيالملحق:

$$F = 24,0 \text{ cm}^2$$

وحسب العلاقة (5.11) يتم تعيين قوة حمل القضيب:

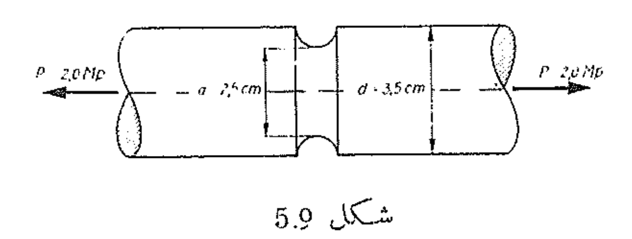
$$\text{zul P} \leqq 24,0 \cdot 1,6 = 38,4 \text{ Mp}$$

مثال 49 :

حمل قضيب فولاذي مدور (مقطعه العرضي دائري الشكل) ، يحتوي على فجوتين مدورتين على شكل نصف دائرة حسب الشكل (5.9) ، بقوة شد P .

المعطى : $P=2,0\ Mp$ وعامل الفجوة $\kappa=2,8$.

المطلوب : تعيين الاجهاد الأعظمي في القضيب .



شكل 5.9

الحل :

بالاستعانة بمساحة أصغر مقطع عرضي :

$$F = \pi \frac{2,5^2}{4} = 4,91\ cm^2$$

يتم ، استناداً الى العلاقة (5.7) ، تعيين الاجهاد الأعظمي :

$$\max \sigma = \kappa \frac{P}{F} = 2,8 \cdot \frac{2,0}{4,91} = 1,141\ Mp\ cm^{-2}$$

مثال 50 :

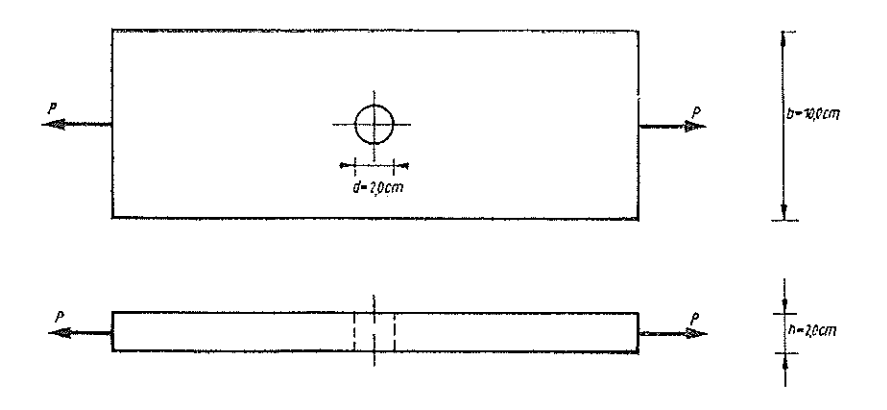
يحتوي قضيب مسطح ، عرضه b وسماكته d ، على ثقب دائري الشكل قطره 1,0 cm يقع في منتصفه (شكل 5.10).

المعطى : $b=10,0\ cm$, $d=2,0\ cm$ ويبلغ الاجهاد المسموح لمادة القضيب $zul\ \sigma=1,6\ Mcm^{-2}$

المطلوب : تعيين القوة p التي يستطيع القضيب حملها .

الحل :

لوجوب عدم تخطي الاجهاد الاعظمي للاجهاد المسموح $zul\ \sigma$ يتم الحصول ، من العلاقة (5.7) على ما يلي :



شكل 5.10

$$N_x = P = \frac{F\ zul\ \sigma}{\varkappa} = \frac{(10,0-2,0)\ 2,0\ .\ 1,6}{3,0} = 8,53\ Mp$$

٥ ـ ٤ تغيرات الشكل (Formaenderungen)

لتعيين الانتقالات في القضبان المشدودة / المضغوطة ذات المقطع العرضي المتغير بشكل خفيف سوف ينطلق من التوزيع المنتظم للاجهاد الناظمي على المقطع العرضي :

$$\sigma\ (x) = \frac{N_x\ (x)}{F\ (x)}$$

تقابل هذه الاجهادات ، حسب قانون هوك ، التمددات (التغيرات النسبية) :

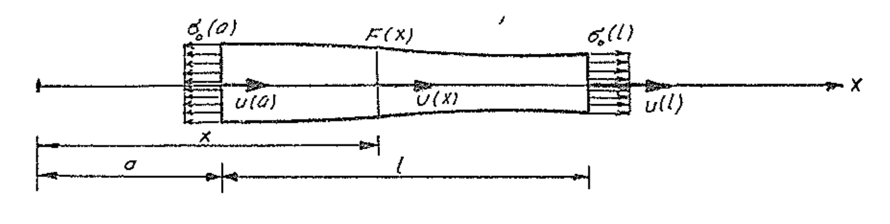
$$\varepsilon\ (x) = \frac{\sigma\ (x)}{E} = \frac{N_x\ (x)}{E\ F\ (x)} \tag{5.13}$$

العائدة لكل من محاور القضيب الموازية لمحور القضيب الاوسط . بما أن هـــذه التمددات مستقلة عن احداثيات المقطع العرضي z , y لذلك فان كل مقطع عرضي كـكل يقوم بالانتقـال (شكل 5-11) :

$$V_x = u\ (x) \tag{5 14}$$

إن العلاقة التي تربط بين الانتقالات $u\ (x)$ والتمددات للانفعالات $\epsilon\ (x)$ ، تبعاً للعلاقة الاولى من (3-9) هي:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial\ V_x}{\partial x}$$



شكل 5-11

هي

$$\varepsilon\ (x) = \frac{du\ (x)}{dx} \qquad (5\text{-}15)$$

باختزال (بحذف) التمدد $\in (x)$ من العلاقتين (5-13) و (5-15) ينتج :

$$\frac{du\ (x)}{dx} = \frac{\sigma\ (x)}{E} = \frac{N_x\ (x)}{E\ F\ (x)} \qquad (5\text{-}16)$$

من هذه العلاقة يمكن ، في حالة كون $\sigma\ (x)$ أو كذلك $N_x\ (x)$ و $F\ (x)$ معلومة ، تعيين الانتقالات $u = u\ (x)$ (حالة مقررة ستاتيكياً) . بذلك ينتج :

$$u\ (x) = \int \frac{\sigma\ (x)}{E}\, dx + c \qquad (5\text{-}17)$$

أو كذلك

$$u\ (x) = \int \frac{N_x\ (x)}{E\ F\ (x)}\, dx + c \qquad (5\text{-}18)$$

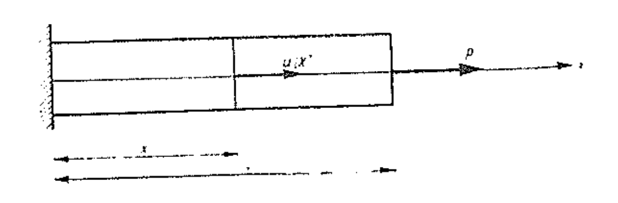
حيث أن c هي في البداية ثابت تكامل ما .

حالة خاصة :

عندما تكون القوة الطولية $N_x\ (x) = P$ ومساحة المقطع العرضي F ثابتة فان علاقـة الانتقال تصبح ، بالاستعانة بالانتقال $u\ (a)$ في المكان $x = a$ ، كما يلي :

$$u\ (x) = \frac{P\ (x - a)}{E\ F} + u\ (a) \qquad (5\text{-}19)$$

من اجل قضيب موثوق عند النقطة $x = 0$ (شكل 5-12) فان علاقة الانتقال السابقة تصبح ، بسبب كون $u\ (o) = 0$ ، كالتالي :



شكل 5.12

$$u(x) = \frac{Px}{EF} \qquad (5\text{-}19b)$$

عندما تكون P قوة شد فان الانتقال u (x) يكون موجباً وعندما تكون P قوة ضغط فان الانتقال u (x) يكون سالباً . أما الاستطالة / التقاصر Δl لقضيب طوله l فتبلغ :

$$\Delta l = u(l) = \frac{Pl}{EF} \qquad (5.20)$$

من أجل القضيب المدور (المبروم ، ذو المقطع العرضي الدائري الشكل) المستعمل في المثال 46 الذي يبلغ طوله $l = 4{,}0$ m وعامل مرونته $E = 2000{,}0$ Mp cm^{-2} فان الاستطالة تبلغ :

$$\Delta l = \frac{10{,}0 \;.\; 400{,}0}{2000{,}0 \;.\; 15{,}9} = 0{,}126 \text{ cm}$$

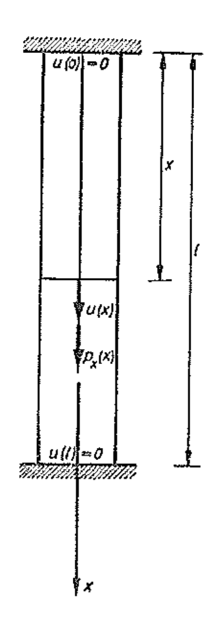
يمكن تعيين الانتقال u (x) لقضيب مشدود / مضغوط ، بواسطة العلاقة (5.16) وذلك عندما تكون القوة الناظمية $N_x(x)$ معلومة . وهذا يتحقق في جميع القضبان ذات الاستناد المقرر ستاتيكياً . أما في القضبان ذات الاستناد غير المقرر ستاتيكياً (شكل 5.13) فلا يمكن تعيين القوة الناظمية $N_x(x)$ بواسطة شروط التوازن وحدها . للتمكن من حل أمثال هذه الحالات سوف ينطلق من العلاقة (5.16) :

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{N_x(x)}{EF(x)}$$

للتسهيل سوف يفترض بأن المقطع العرضي للجائز ثابت على طوله . باشتقاق العلاقة السابقة ينتج:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \frac{1}{EF} \frac{dN_x(x)}{dx}$$

وبالأستعانة بالعلاقة التفاضلية التي تربط بين القوة الناظمية والحمولة التالية :



شكل 5.13

$$\frac{dN_x(x)}{dx} = -p_x(x)$$

يتم الحصول ، من المعادلة السابقة ، على العلاقة التفاضلية الآتية :

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{p_x(x)}{EF} \tag{5.21}$$

باجراء مكاملة مزدوجة (مضاعفة) ينتج :

$$\left.\begin{aligned} EF\frac{du(x)}{dx} &= -\int p_x(x)\,dx + c_1 \\ EF\,u(x) &= -\int dx\int p_x(x)\,dx + c_1x + c_2 \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

بهذه العلاقة يتم تعيين الانتقال $u(x)$ ماعدا ثابتي التكامل c_1 , c_2 . أما تعيين ثوابت التكامل هذه فيتم ، بعد تحقيق النتائج لشروط أطراف القضيب . فمن أجل الجائز الممثل في الشكل (5.13) فان شروط الأطراف هي :

$$u(x=0) = 0 \quad ; \quad u(x=l) = 0$$

والآن يمكن تعيين القوة الناظمية (القوة الطولية) $N_x(x)$ ، حسب العلاقة (5.16) :

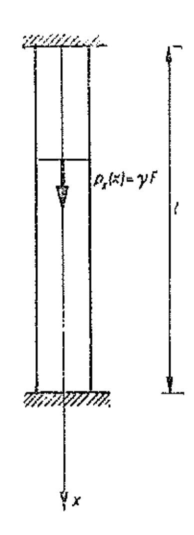
$$N_x(x) = EF\,\frac{du(x)}{dx} \tag{5.23}$$

مثـال 51 :

حمل قضيب موثوق من كلا الطرفين ومقطعه العرضي F ثابت ، بوزنه الذاتي (شكل 5.14).

المعطى : مساحة المقطع العرضي F وطول القضيب l والوزن النوعي لمادة صنع القضيب γ .

المطلوب : تعيين توزيـع الانتقال وتوزيـع القوة الناظمية .



شكل 5.14

الحـل :

تؤثر على الجائز نتيجة لتأثير وزنه الذاتي , الحمولة الموزعة $p_x(x)$ باتجاه المحور x :

$$p_x(x) = \gamma F$$

بحيث تصبـح المعادلة التفاضلية بالشكل التالي :

$$EF\,\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\gamma F$$

باجراء مكاملة مزدوجة (مضاعفة) عليها ينتج :

$$EF\,\frac{du(x)}{dx} = -\gamma F x + c_1$$

$$EF\,u(x) = -\gamma F\,\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

بتحقيق الحلول السابقة لشروط الأطراف التالية :

$$u(x=0) = u(x=l) = 0$$

يتم التوصل المعادلتين التاليتين :

$$c_2 = 0 \quad ; \quad -\gamma F \frac{l^2}{2} + c_1 l + c_2 = 0$$

والتي تعطي بعد الحل ، ثوابت التكامل :

$$c_1 = \gamma F \frac{l}{2} \quad ; \quad c_2 = 0$$

وبتبديلهما في العلاقات السابقة ينتج :

$$EF \frac{du(x)}{dx} = N_x(x) = \gamma F \frac{l}{2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)$$

$$u(x) = \frac{\gamma l^2}{2E} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

أما ردود أفعال المساند (قوى الاستناد) فتبلغ :

$$N_x(x=0) = \frac{\gamma F l}{2} \quad , \quad N(x=l) = -\frac{\gamma F l}{2}$$

يوضح الشكل (5.15) توزيع القوة الناظمية $N_x(x)$ وكذلك توزيع الانتقال $u(x)$.

مثال 52 :

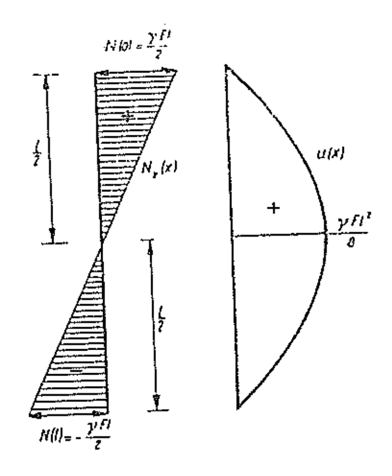
حمل قضيب طوله l ومقطعه العرضي F ثابت ويتألف من دائرة مليئة ، بقوتي شد قيمة كل منهما P وتؤثر على كل من نهايتي القضيب (شكل 5.16) .

المعطى :

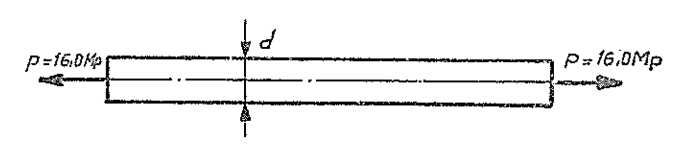
$$E = 2{,}1.10^6 \text{ kp/cm}^2 , \ l = 12 \text{ m} , \ P = 16000 \text{ kp} , \ \text{zul } \sigma = 1400 \text{ kp/cm}^2$$

المطلوب : حساب

١ ـ القطر اللازم erf d للدائرة (قطر الدائرة اللازم) وذلك عندما يكون الاجهاد المسموح لمادة صنع القضيب هو $\text{zul } \sigma = 1400 \text{ kp/cm}^2$.



شكل 5.15



شكل 5.16

٢ ـ الانتقال المتبادل للمقاطع العرضية المتواجدة عند النهاية.

(يهمل الوزن الذاتي أثناء الحل).

الحـل :

١ ـ عندما يطلب تصميم عنصر انشائي فهذا يعني أنه يطلب تعيين أبعاده بحيث يكون الاجهـاد الاعظمي σ_{max} الموجود في المقطع العرضي اصغر من الاجهاد المسموح σ_{zul} . بقطع القضيب في نقطه ما منه يتبين ان قيم القطع فيه تقتصر على القوة الناظمية فقط :

$$N = + P$$

الاجهاد الناظمي :

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}$$

مساحة المقطع العرضي (للدائرة) :

$$F = \frac{\pi d^2}{4}$$

بالتبديل في علاقة الاجهاد ينتج :

$$\sigma = \frac{4 P}{\pi d^2}$$

شرط التصميم (Dimensionierungsbedingung) :

$$\max \sigma = \frac{4\,P}{\pi\, d^2} \leqq \text{zul}\ \sigma$$

$$d \geqq \sqrt{\frac{4\,P}{\pi \cdot \text{zul}\ \sigma}}$$

من هذه المتراجحة يتم تعيين قطر الدائرة اللازم وهو كالتالي :

$$\text{erf}\ d = \sqrt{\frac{4 \cdot 16\ 00}{\pi \cdot 1400}} = 3{,}81\ \text{cm}$$

٢ ـ يتم حساب الانتقال المتبادل للمقطعين العرضيين المتواجدين عند نهايتي القضيب بواسطة العلاقة التالية :

$$\varepsilon = \frac{d\,u}{d\,x}$$

تعطى العلاقة التي تربط بين التمدد والاجهاد بواسطة قانون هوك :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

بالتبديل في المعادلة السابقة يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\frac{d\,u}{d\,x} = \frac{\sigma}{E}$$

ينبغي ان يمتد التكامل على كامل القضيب المشدود . من أجل الحد السفلي 0= فان u=0 ومن أجل الحد العلوي $x=l$ فان $u(x)=u$:

$$\int_0^l du = \frac{\sigma}{E}\int_0^l dx \qquad : \quad u = \frac{\sigma}{E}\, l$$

$$u = \frac{1400}{2{,}1 \cdot 10^6} \cdot 1200 = 0{,}8\ \text{cm}$$

مثال 53 :

حمل قضيب متدلي ، مقطعه العرضي F ثابت ، وموثوق من طرفه العلوي وحر من طرفه السفلي بالوزن P .

المعطى :

$l = 60\ m \quad , \quad F = 1\ cm^2 \quad , \quad P = 1000\ kp$

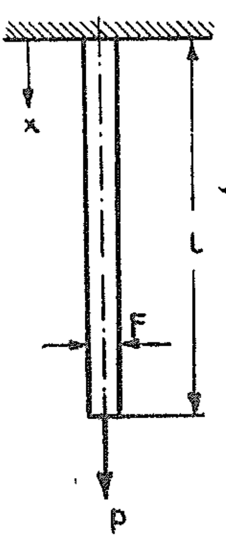
$E = 2,1 \cdot 10^6\ kp/cm^2 \quad ; \quad \gamma = 7,8 \cdot 10^{-3}\ kd/cm^2$

المطلوب : حساب

١ ـ الاجهاد الناظمي الاعظمي .

٢ ـ إنتقال المقطع العرضي عند النهاية السفلى للقضيب .

يدخل الوزن الذاتي للقضيب بعين الاعتبار .



شكل 5.17

الحل :

بقطع الجائز في النقطة ذات الاحداثي x يتبين ، بعد تطبيق شروط التوازن ، أن قيم القطع الموجودة فيه تقتصر على القوة الناظمية فقط :

$$N = P + \int_x^l \gamma\ F\ dx = P + \gamma\ F\ (l - x)$$

١ ـ الاجهاد الناظمي :

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{1}{F}\ [\ P + \gamma\ F\ (\ l - x\ )] = \frac{P}{F} + \gamma\ (\ l - x\ )$$

الاجهاد الناظمي الأعظمي :

تظهر القيمة الاعظمية للاجهاد الناظمي عند النقطة x=0 وهي تبلغ :

$$\max \sigma = \frac{P}{F} + \gamma l$$

$$\max \sigma = \left(\frac{1000}{1} + 7{,}8 \,.\, 10^{-3} \,.\, 6000 \right) = 1047 \text{ kp/cm}^2$$

٢ ـ حساب انتقال النهاية السفلي للجائز :

$$\frac{du(x)}{dx} = \varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{P}{EF} + \frac{\gamma}{E}(l-x)$$

بالمكاملة ينتج :

$$u(l) = \int_0^l \left[\frac{P}{EF} + \frac{\gamma}{E}(l-x)\right] dx = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}$$

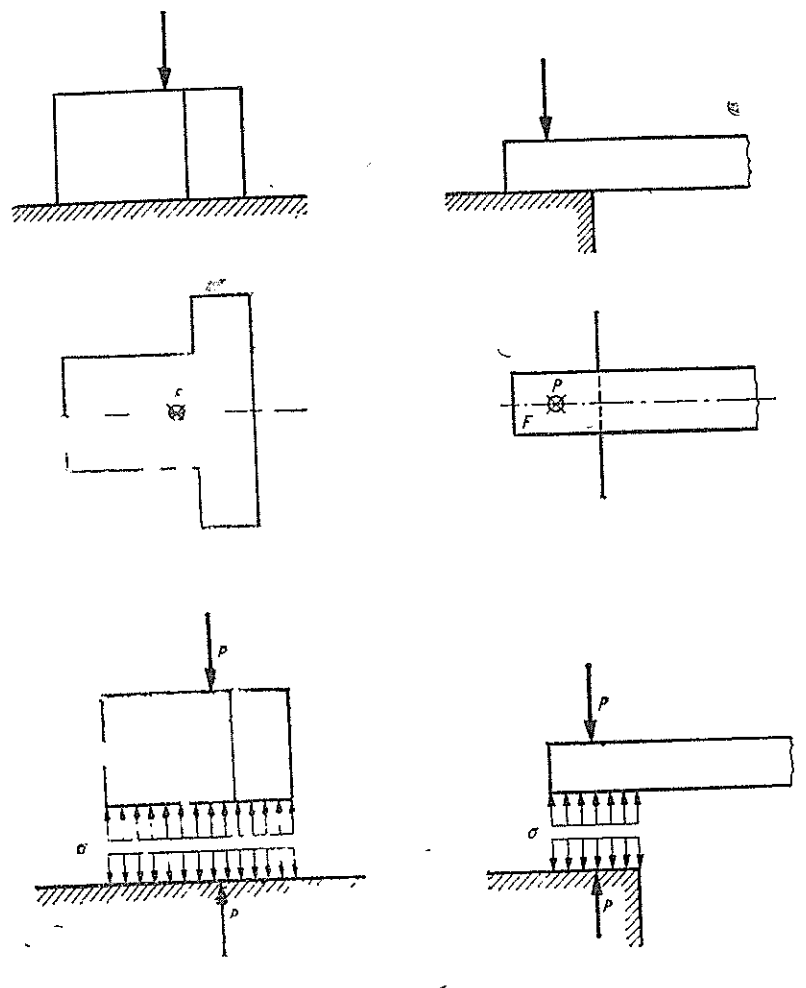
$$u(l) = \frac{1000 \,.\, 6000}{2{,}1 \,.\, 10^6 .1} + \frac{7{,}8.10^{-3} \,.\, 6000^2}{2 .2{,}1 \,.\, 10^6} = 2{,}93 \text{ cm}$$

٥ ـ ٥ اجهادات التماس (Berührungsspannungen)

أثناء انتقال القوى بين العناصر الانشائية المتلامسة (شكل 5 18 a,b) تتشكل في سطوح التماس قوى سطحية . لتكن P هي القوة التي ينبغي نقلها ولتكن F هي مساحة سطح التماس المستوي ، بذلك فان الاجهاد الضاغط الوسطي (mittlere Druckspannung) الذي يتشكل هو :

$$\sigma = \frac{P}{F} \qquad (5.24)$$

ولقد تم في الشكل (5.18 c) ايضاح الاجهاد الضاغط الوسطي من أجل المثاليين المرسومين هناك . للتمكن من استخدام العلاقة (5.24) يشترط أن تؤثر القوة P في مركز ثقل سطح التماس وذلك حتى يتم التوازن بين القوة الوحيدة P وبين الاجهاد الثابت (القوة السطحية) .

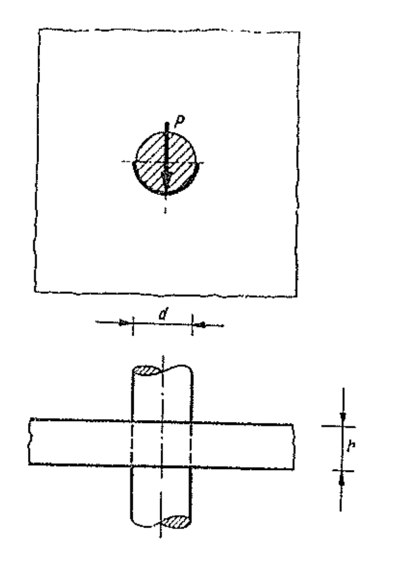


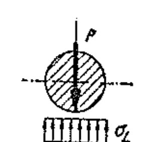
شـكل 5.18

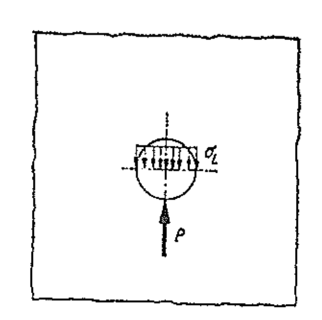
تتشكل اجهادات التماس أيضاً أثناء نقل القوى بين سطوح التماس المنحنية وعلى سبيل المثـال في حالة البراغي (Bolzen) والبراشيم (Nieten) المحملة عموديا على المحـور (شـكل 5.19) . نتيجة لتأثير القوة P فان السطح الاسطواني المرسوم بشـكل غامق سوف يضغط . إن بالامكان اتباع اقتراح العالم فايسباخ (WEISBACH) التقريبي والافتراض أن اجهادات التمـاس تتوزع على السطح F=b.d بشـكل منتظم (شكل 5-20) وذلك بحيث تصلح من أجله العلاقة التالية:

$$\sigma_L = \frac{P}{b\,d} \qquad (5\text{-}25)$$

تسمى الاجهادات σ_L **باجهادات حافة الثقب** (Lochleibungsspannungen) أو **بضغط حافـة الثقب** (Lochleibungsdruck) . كما لا يسمح للاجهادات التي تتشـكل في القضبـان المشدودة / المضغوطة أن تتخطى قيمة مسموحة معينة مسبقاً هي σ zul لايسمح أيضاً أن تتخطى اجهادات التماس قيمة مسموحة معينة مسبقاً هي σ_L zul , σ zul وبذلك تصلح العلاقة التالية :







شكل 5-19 شكل 5.20

في حالة سطوح التماس المستوية :

$$\sigma = \frac{|P|}{F} \leqq |zul\ \sigma|$$

وفي حالة سطوح التماس المنحنية :

$$\sigma_L = \frac{|P|}{F} \leqq |zul\ \sigma_L| \quad (5\text{-}27)$$

٥ ـ ٦ تطبيقات

مثال 54 :

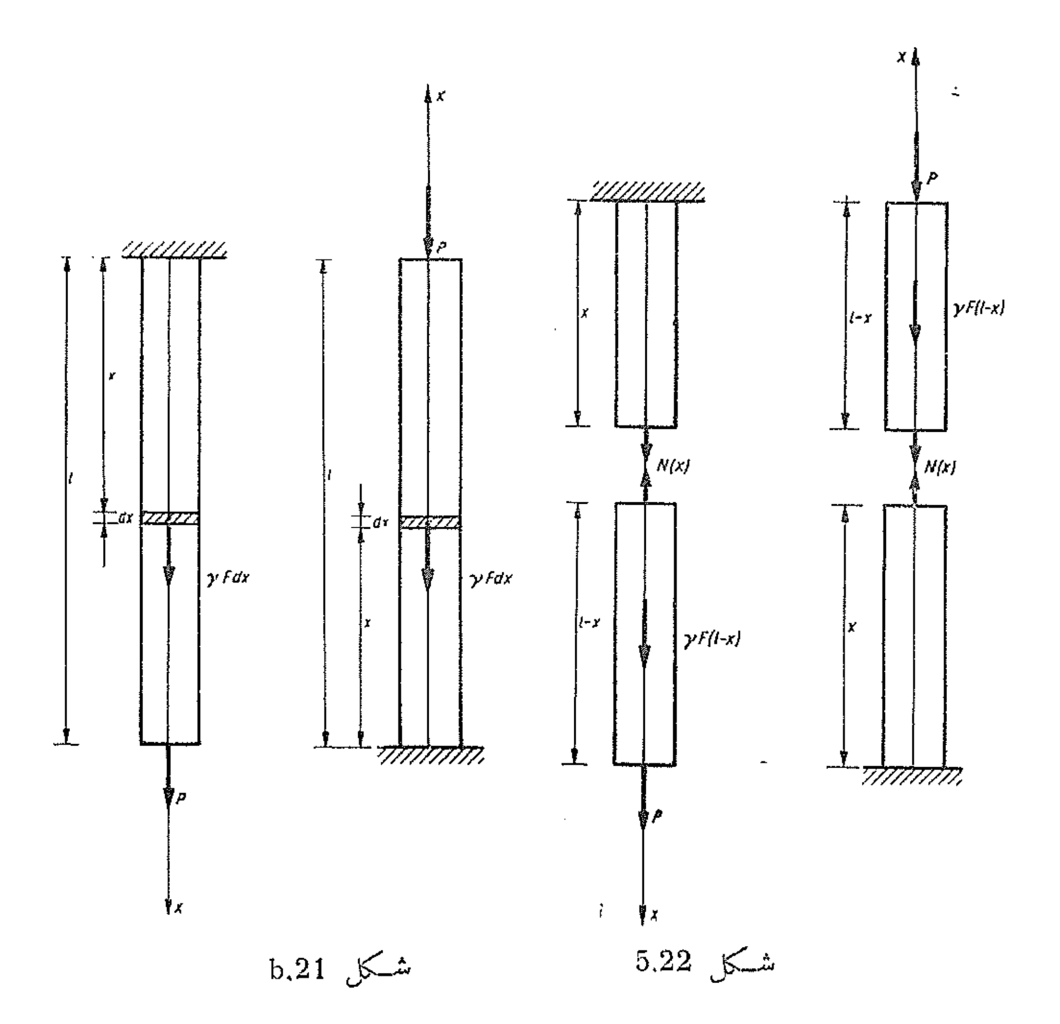
حملت القضبان ذات المقطع العرضي الثابت، الممثلة في الشكل (5.22)، بوزنها الذاتي وبالقوة P .
المعطى : P , l , γ .
المطلوب : حساب توزيع الاجهاد σ (x) وكذلك الانتقالات u (x) .

الحل :

بتطبيق شروط التوازن على أجزاء القضيب التي يبلغ طولها $l-x$ (شكل 5.23) :

$$N_x(x) = P + \gamma F (l - x)$$

أو كذلك



شــكل b.21

شــكل 5.22

$$N_x(x) = -[P + \gamma F(l - x)]$$

يتم الحصول على الاجهادات

$$\sigma(x) = \frac{P}{F} + \gamma(l - x)$$

أو كذلك

$$\sigma(x) = -\left[\frac{P}{F} + \gamma(l - x)\right]$$

تتشـكل القيم الاعظمية في المـكان $x=0$ وبذلك يصبـح الكشف عن الاجهاد كما يلي :

$$\left|\frac{P}{F} + \gamma l\right| \leqq |\text{zul}\ \sigma|$$

أما الانتقالات فيتم حسابها من العلاقة (5.18) بالشكل التالي :

$$u(x) = \frac{1}{E} \int \left[\frac{P}{F} + \gamma (l-x)\right] dx + c = \frac{1}{E}\left[\frac{P}{F} x + \gamma x \left(l - \frac{x}{2}\right)\right] + c$$

أو كذلك

$$u(x) = -\frac{1}{E} \int \left[\frac{P}{F} + \gamma (l-x)\right] dx + c = -\frac{1}{E}\left[\frac{P}{F} x + \gamma x \left(l - \frac{x}{2}\right)\right] + c$$

بالاستعانة بشرط الطرف $u(x=o) = 0$ يتم تعيين ثوابت التكامل لكلا الحالتين وهو $c=o$ وبذلك يصبح الانتقال ، بعد تبديل الثوابت ، كما يلي :

$$u(x) = \frac{Px}{EF} + \frac{\gamma l^2}{E} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{2l}\right)$$

أو كذلك

$$u(x) = -\left[\frac{Px}{EF} + \frac{\gamma l^2}{E} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{2l}\right)\right]$$

تتشكل الانتقالات الاعظمية عند مواضع تطبيق القوة الوحيدة ، وبذلك ينتج :

$$u(x=l) = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}$$

او كذلك

$$u(x=l) = -\left(\frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}\right)$$

اذا كان القضيب محملا بوزنه الذاتي فقط فبالامكان بسبب العلاقة التالية :

$$\gamma l \leqq |\text{zul}\ \sigma|$$

تعريف طول القضيب الاعظمي (maximale Stablaenge) :

$$\text{zul}\ l = \frac{|\text{zul}\ \sigma|}{\gamma} \qquad (5.28)$$

الذي يسمى بطول التحمل للمادة (Traglaenge des Werkstoffes) . فعلى سبيل المثال يبلغ طول التحمل لسلك اجهاده المسموح $\text{zul}\ \sigma = 5{,}0\ \text{Mp cm}^{-2}$ ووزنه النوعي $\gamma = 7{,}85\ \text{Mp cm}^{-2}$ القيمة التالية :

$$\text{zul}\, l = \frac{5,0 \cdot 10^4}{7,85} = 6369,4 \text{ m}$$

بالاستعاضة عن σ zul في العلاقة (5.28) باجهاد الكسر σ_B عندئذ يمكن تعيين الطول l_B الذي ينقطع القضيب المعلق بشكل حر عند بلوغه . يسمى هذا الطول والذي يعبر عنه بالعلاقة التالية :

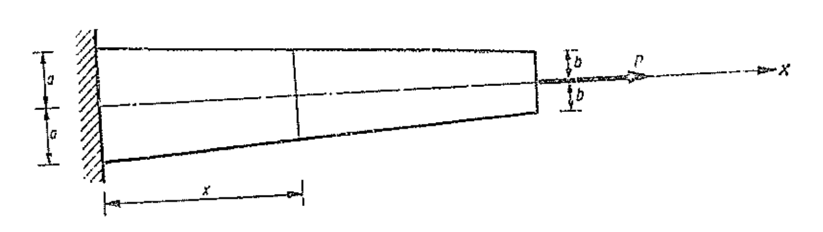
$$l_B = \frac{\sigma_B}{\gamma} \tag{5-25}$$

والذي يتعلق من (يتبع) مادة الصنع ، **بطول الكسر** (طول الانكسار) او **طول الانقطاع** (Reiβ – oder Bruchlaenge) .

يبلغ طول الكسر (طول الانقطاع) لسلك مصنوع من مادة تبلغ فيها $\sigma_B = 18,0 \text{ Mp cm}^{-2}$ و $\gamma = 7,85 \text{ Mpm}^{-3}$ القيمة التالية : $l_B = 22,93$ km . كما يبلغ طول الانقطاع لحبال القنب (Hanfseile) 35,0 km ولحبال القطن (للحبال المصنوعة من القطن) 25,0 km.

مثال 55 :

يطلب تعيين الاجهاد σ (x) والانتقال u (x) لقضيب مبروم (قضيب مقطعه العرضي دائري الشكل) مخروطي (شكل 5.23) .



شكل 5.23

الحل :

بالاستعانة بمساحة المقطع العرضي :

$$F(x) = \pi \left(a - \frac{a-b}{l} x \right)^2$$

يتم مبدئيا تعيين الاجهاد :

$$\sigma(x) = \frac{P}{\pi \left(a - \frac{a-b}{l} x\right)^2}$$

ومن العلاقة التالية :

$$u(x) = \int \frac{P}{E\pi\left(a - \frac{a-b}{l} x\right)^2} dx + c = P \frac{l}{E\pi(a-b)\left(a - \frac{a-b}{l} x\right)} + c$$

يتم التوصل ، بعد الاستعانة بشروط الاطراف :

$$u\,(x=o) = o = P \frac{l}{E\pi\,(a-b)\,a} + c$$

تعيين ثوابت التكامل :

$$c = -P \frac{l}{E\pi a(a-b)}$$

وذلك بحيث يصبح الانتقال :

$$u(x) = \frac{Px}{E\pi a\left(a - \frac{a-b}{l} x\right)} = \frac{Px}{E\sqrt{F(0)\,F(x)}}$$

مثال 56 :

يطلب اعطاء قضيب محمل بوزنه الذاتي وبقوة وحيدة ، الشكل اللازم ليكون الاجهاد المتشكل في أي مقطع عرضي من القضيب مساويا لاجهاد معلوم σ_0 (اي ليكون الاجهاد في كل مقطع عرضي من القضيب مساويا القيمة الثابتة σ_0) (شكل 5.24) .

الحل :

لحل هذا المثال سوف يتم تطبيق شروط توازن القوى بالاتجاه x على قطعة صغيرة قدر الامكان من القضيب .

تؤثر ، حسب الفرض على سطوح القطوع $F(x)$ و $F(x+dx)$ الاجهادات σ_0 بحيث تبلغ محصلة الاجهادات على سطوح القطوع القيمة التالية :

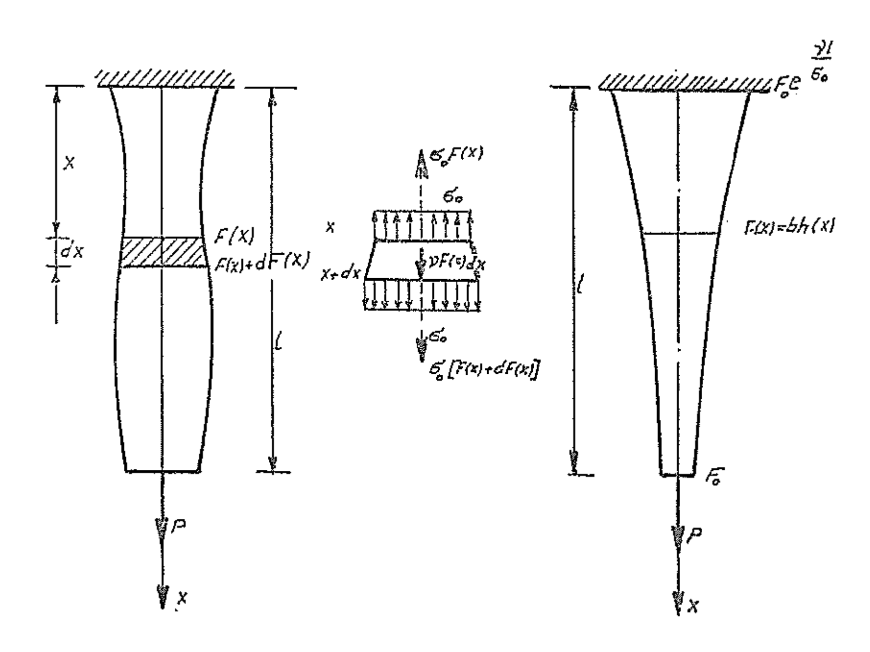
$$\sigma_0 F(x)\ ,\ \sigma_0 F(x+dx) \approx \sigma_0 [F(x) + dF(x)]$$

بالاستعـانة بالوزن الذاتي $\gamma\, F(x)$ للقطعة الصغيرة قدر الامكان المقتطعة من القضيـب فان شرط التوازن يأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_0 [\, F(x) + d\, F(x)\,] + \gamma\, F(x)\, d\, x - \sigma_0\, F(x) = 0$$

كما انه يأخذ بعد فصل المتغيرات (Trennung der veraenderlichen) الشكل الآتي :

$$\frac{dF(x)}{F(x)} = - \frac{\gamma}{\sigma_0}\, dx$$



شكل 5.24

تعطي مكاملة العلاقة السابقة ، التكامل العام التالي :

$$l n\, F(x) - l n\, c = l n\, \frac{F(x)}{c} = - \frac{\gamma}{\sigma_0}\, x$$

أو :

$$F(x) = c\, e^{-\frac{\gamma}{\sigma_0} x}$$

عندما تكون مساحة المقطع العرضي $F(x=l)=F_0$ معطاة فان الشرط الذى يعـــبر عنها ، يكتب هكذا :

$$F(x=l) = F_0 = c\, e^{-\frac{\gamma}{\sigma_0} l}$$

بواسطة هذا الشرط يتم تعيين ثابت التكامل :

$$c = F_0\, e^{\frac{\gamma}{\sigma_0} l}$$

الذي يعطي بعد التبديل علاقة تعيين مساحة المقطع العرضي كتابع للمحور x :

$$F(x) = F_0\, e^{\frac{\gamma}{\sigma_0}(l-x)}$$

اما مساحة المقطع العرضي F_0 الذي تؤثر فيه القوة P ، فيتم تعيينها استناداً الى المطلب الذي يشترط ان يكون الاجهاد المتشكل في كل مقطع عرضي هو الاجهاد المعلوم الثابت σ_0 :

$$F_0 = \frac{P}{\sigma_0}$$

لقد تم في الشكل (5.24 c) تمثيل قضيب مشدود من هذا النوع ، مقطعه العرضي مستطيل الشكل ومساحته هي $F(x) = bh(x)$.

للتمكن قدر المستطاع ، في حالة القضبان المشدودة / المضغوطة ذات المقاومة المتساوية (الثابتة) من بلوغ الاجهاد الموجود الثابت ، تستعمل في الحياة العملية قضبان ذات مقطع عرضي متدرج (كما هو الحال في ابراج نقل القدرة وكذلك في قضبان الحفر) . يتم تعيين الانتقالات في قضيب متساوي المقاومة (ذو مقاومة ثابتة) باستخدام العلاقة (5.17) وذلك بعد ادخال $\sigma(x) = \sigma_0$ بعين الاعتبار ، وبذلك ينتج :

$$u(x) = \frac{\sigma_0}{E} x + c$$

بالاستعانة بشروط الأطراف :

$$u(x=0) = 0 = c$$

يتم التوصل من العلاقة السابقة لما يلي :

$$u(x) = \frac{\sigma_0}{E} x \qquad (5\text{-}30)$$

وبواسطة :

$$\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$$

فان العلاقة السابقة تأخذ شكلها النهائي :

$$u(x) = \frac{P\,x}{E\,F_0}$$

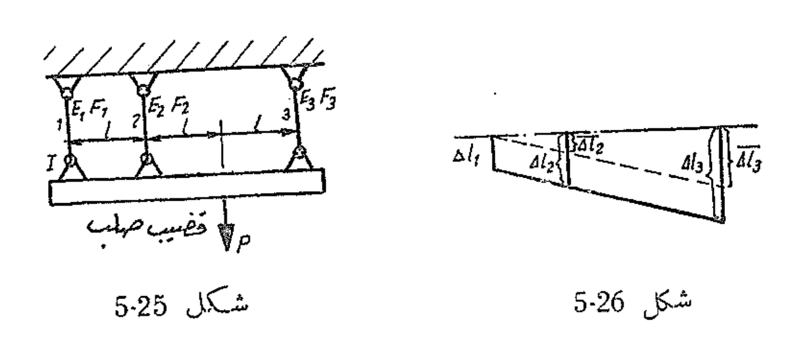
بمقارنة هذه النتيجة مع العلاقة (5.19 b) يتبين ان الانتقالات في القضيب متساوي المقاومة لها نفس قيمة الانتقالات في قضيب عديم الوزن ومحمل بالقوة P ومقطعه العرضي F_0 ثابت .

٥ ـ ٩ حل المسائل غير المقررة ستاتيكياً بالاستعانة بتغيرات الشكل

(Loesung statisch unbestimmte Aufgaben mit Hilfe der Formaenderung)

ليست تغيرات الشكل في الجسم هي اعتباطية وإنما تتبع شروطاً معينة . بما ان علاقات التوازن (شروط التوازن) لا تكفي لايجاد القيم المجهولة في المسائل غير المقررة ستاتيكياً ، لذلك يتم اللجوء لاعتبارات تغير الشكل والاستعانة بها . أما هذه الطريقة فسوف يتم شرحها من خلال المثالين التاليين .

٥ ـ ٩ ـ ١ قضيب صلب متصل بثلاثة قضبان (شكل 5-25)



شكل 5-25　　　　شكل 5-26

بعد الافتراض ان قوى القضبان الثلاثة هي قوى شد فان شروط التوازن تأخذ الشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma V = 0 \quad &: \quad S_1 + S_2 + S_3 - P = 0 \\ \Sigma M_I = 0 \quad &: \quad S_2 \cdot l + S_3 \cdot 3\,l - P \cdot 2\,l = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.31)$$

بالافتراض ان القوة تؤثر على قضيب صلب (شكل 5.25) لذلك يمكن بسهولة الحصول على العلاقات التي تربط بين التغيرات العائدة لكل من القضبان مع بعض :

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \overline{\Delta l}_2$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_1 + \overline{\Delta l}_3 \qquad (5\text{-}32)$$

$$\frac{\overline{\Delta l}_3}{\overline{\Delta}_2} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1} = \frac{3l}{l}$$

منها ينتج ان :

$$3\,\Delta l_2 = 2\,\Delta l_1 + \Delta l_3$$

من العلاقات (5.31) و (5-32) بالارتباط مع قانون هوك الذي يمكن تمثيله كما يلي :

$$\Delta l_i = \frac{S_i l_i}{E_i F_i}$$

يستطاع تعيين قوى القضبان :

$$S_1 = P\,\frac{3\,\frac{E_1F_1}{E_2F_2} - \frac{E_1F_1}{E_3F_3}}{4+9\,\frac{E_1F_1}{E_2F_2} + \frac{E_1F_1}{E_3F_3}} \quad ; \quad S_2 = P\,\frac{2+2\frac{E_1F_1}{E_3F_3}}{4+9\,\frac{E_1F_1}{E_2F_2} + \frac{E_1F_1}{E_3F_3}} \qquad (5\text{-}33)$$

$$S_3 = P\,\frac{2+6\,\frac{E_1F_1}{E_2F_2}}{4+9\frac{E_1F_1}{E_2F_2} + \frac{E_1F_1}{E_3F_3}}$$

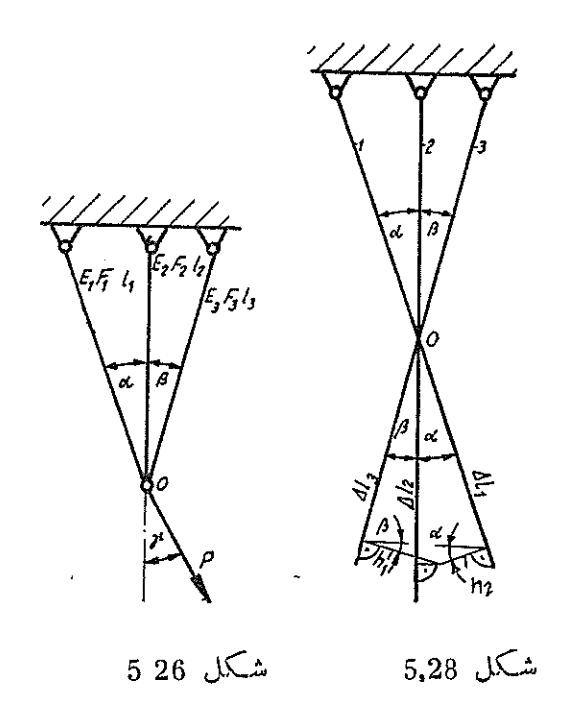
٥ ـ ٩ ـ ٢ جائز شبكي غير مقرر ستاتيكياً (شكل 5.27)

شروط توازن القوى :

$$\Sigma V = 0 \;:\; S_1 \cos\alpha + S_2 + S_3 \cos\beta - P\cos\gamma = 0 \qquad (5\ 34)$$

$$\Sigma H = 0 \;.\; S_1 \sin\alpha - S_3 \sin\beta - P\sin\gamma = 0$$

نتيجة للتحميل فان النقطة 0 سوف تقوم بالانتقال . بسبب تغيرات الشكل ، التي يفترض انها صغيرة ، يستطاع تمثيل استطالات القضبان Δl_i وذلك بأخذ عمود من النقطة المنتقلة على كل من الخطوط التابعة لها (شكل 5.28) . وعلاوة على ذلك يمكن اهمال تغير الزوايا α , β وبذلك يمكن التوصل للعلاقات الهندسية التالية :



شكل 5 26　　　　شكل 5,28

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos\alpha + h_2 \sin\alpha$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 \cos\beta + h_1 \sin\beta$$

$$\Delta l_1 \sin\alpha + \Delta l_3 \sin\beta = h_1 \cos\beta + h_2 \cos\alpha$$

منها يتم الحصول ، بعد اختزال (اختصار ، حذف) h_1 , h_2 ، على ما يلي :

$$\Delta l_1 \sin\beta + \Delta l_3 \sin\alpha = \Delta l_2 \sin(\alpha + \beta) \qquad (5\text{-}\cdot 5)$$

بادخال قانون هوك في العلاقة (5 35) عندئذ يتم الحصول من العلاقات (5 34) و (5.35) على قوى القضبان المجهولة :

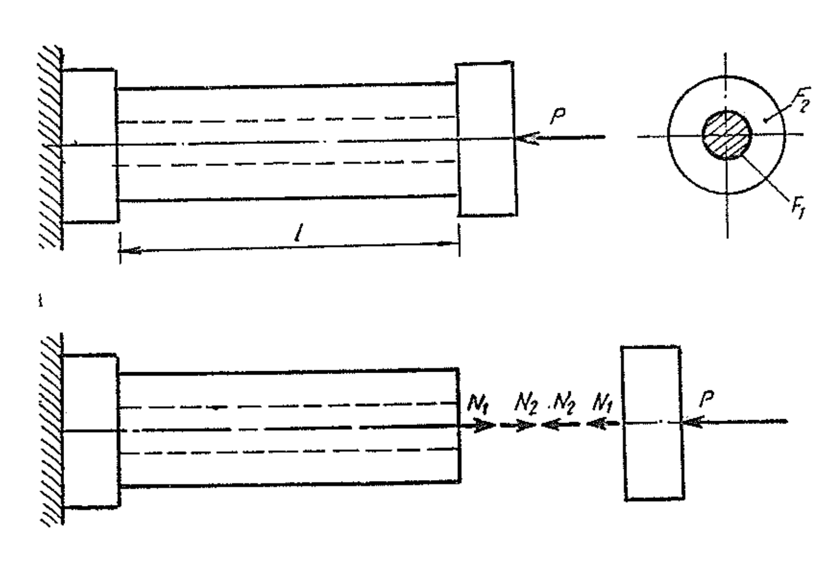
$$S_1 = \frac{\frac{l_2}{E_2F_2}\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) + \frac{l_3}{E_3F_3}\sin\alpha\sin\gamma}{\frac{l_1}{E_1F_1}\sin^2\beta + \frac{l_2}{E_2F_2}\sin^2(\alpha+\beta) + \frac{l_3}{E_3F_3}\sin^2\alpha} P$$

$$S_2 = \frac{E_2F_2}{l_2 \sin(\alpha+\beta)}\left[\frac{S_1 l_1}{E_1F_1}\sin\beta + \frac{S_3 l_3}{E_3F_3}\sin\alpha\right] \qquad (5,36)$$

$$S_3 = S_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - P\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

مثـال 57 :

يتألف قضيب مترابط (verbundstab) ، طوله l ومقطعه العرضـي دائري الشـكل ، من نواة فولاذية ومن تلبيسة (تغطية ، تكسية) نحاسية (شكل 5.29) .



شكل 5.29

يتم تحميل القضيب بقوة الضغط P بواسطة صفيحتين صلبتين .

المطلوب : حساب الاجهادات في النواة الفولاذية وفي التلبيسة النحاسية وذلك عندما تكـــون عوامل مرونتها هي E_1 , E_2 .

الحـل :

لتعيين الاجهادات سوف تفصل الصفيحة اليمنى عن جسم القضيب ثم ترسم بعـد ذلك القـوة الناظمية N_1 على النواة الفولاذية والقوة N_2 على التلبيسة النحاسية (شكل 5.29 b) .
بتطبيق شرط توازن القوى الافقية على الصفيحة اليمنى المفصولة يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$N_1 + N_2 + P = 0 \tag{5.37}$$

لعدم التمكن من تعيين المجهولين N_1 , N_2 بواسطة المعادلة السابقة لذلك فان المسألة المدروسة هي غير مقررة ستاتيكياً . أما معادلة التعيين التي مازال ناقصة فيتم الحصول عليها من الانتقالات التي تنتج عن القوى N_1 , N_2 :

$$u_1\ (x = l) = \frac{N_1\ l}{E_1 F_1} \quad ; \quad u_2\ (x = l) = \frac{N_2\ l}{E_2 F_2}$$

والتي ينبغي ان تكون متساوية وذلك لان الصفيحتين الصلبتين تقسر نهايتي المقطع العرضي من البقاء مستوية . اذاً :

$$u_1\ (x = l) = u_2\ (x = l)$$

بالاستعانة بهذا الشرط يتم التوصل لمعادلة التعيين الثانية ممثلة بالشكل التالي :

$$\frac{N_1}{E_1 F_1} = \frac{N_2}{E_2 F_2} \tag{5.38}$$

من العلاقتين (5.38) و (5.37) ينتج :

$$N_1 = -\frac{E_1 F_1}{E_1 F_1 + E_2 F_2}\ P \quad ; \quad N_2 = -\frac{E_2 F_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2}\ P$$

وبذلك فان الاجهادات المطلوبة تبلغ :

$$\sigma_1 = -\frac{E_1}{E_1 F_1 + E_2 F_3}\ P \quad ; \quad \sigma_2 = -\frac{E_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2}\ P$$

مثـال 58 :

حمل قضيب ، مقطعه العرضي ثابت وموثوق من كلا طرفيه، عند النقطة x بقوة وحيدة محورية (شكل 5.30) .

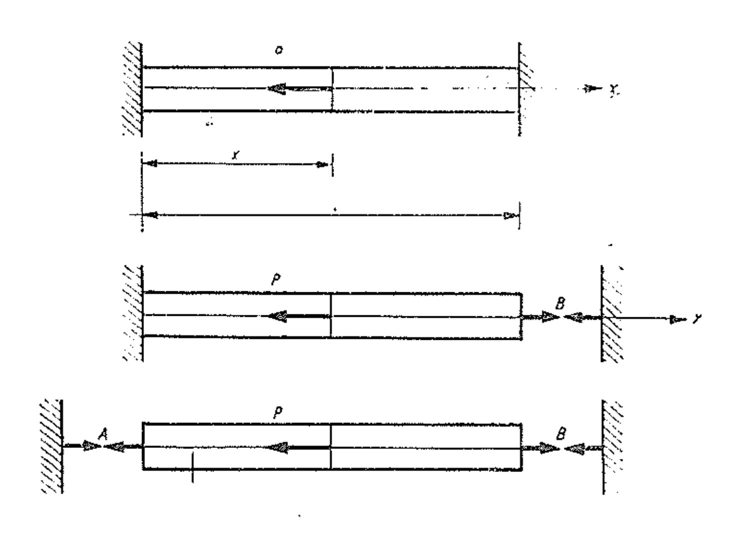
المطلوب : تعيين كيفية توزع القوة على كلا المسندين وكذلك تعـيين إنتقال المقطع العرضي عنـد النقطة x .

الحـل :

لحل هذه المسألة غير المقررة ستاتيكياً سوف يفصل القضيب عن المسند الأيمن ثم يجرى إدخال رد فعل المسند B الذى يعتبر في البداية كقوة مجهولة (شكل 5.30 b) .

لوجوب إنعدام الانتقال في المقطع العرضي عند النهاية $x=l$ ، والناتج عن تأثـير القوى P , B مشتركة ، يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$u\ (x = l) = \frac{B\ l}{EF} - \frac{P\,x}{EF} = 0$$



شكل 5.30

من هذه العلاقة يتم تعيين رد فعل المسند :

$$B = P\,\frac{x}{l}$$

أما رد فعل المسند A الذي يؤثر على القضيب عند المقطع x=0 (شكل 5-26 c) فهو :

$$A = -P + B = -P\,\frac{l-x}{l}$$

وأما إنتقال المقطع العرضي الكائن عند النقطة x فيبلغ :

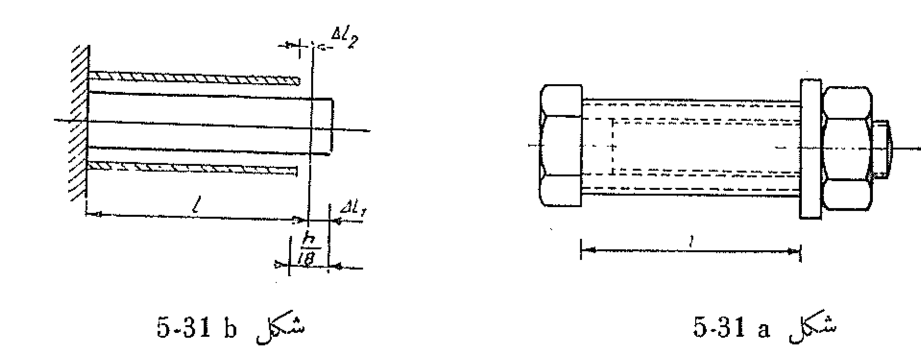
$$u(x) = \frac{B-P}{EF}\,x = -\frac{Px}{EF}\,\frac{l-x}{l}$$

من حل هذه المسألة غير المقررة ستاتيكياً يتبين أنه ينبغي ، علاوة على شرط التوازن ، إضافة شرط هندسي يعبر عن الانتقالات .

مثـال 59 :

يحاط برغي من الفولاذ ($F_1 = 3{,}2\ cm^2$, $E_1 = 2100{,}0\ Mp\ cm^{-2}$) بغلاف من الألمنيوم ($F_2 = 1{,}9\ cm^2$, $E_2 = 700{,}0\ Mpcm^{-2}$) طوله ثمانية سنتيمترات (شكل 5 31 a) . يبلغ طول الخطوة (ارتفاع الخطوة Ganghoehe) في البرغي h=3,0 mm .

المطلوب : تعيين الاجهادات التي تتشكل في جسم البرغي (Schraubenbolzen) وكذلك في غلاف الالمنيوم وذلك عندما تشد الصامولة بمقدار 20° .



شكل 5-31 b

شكل 5-31 a

الحـل :

أثناء شد الصامولة فان جسم البرغي سوف يحمل على الشد أما الغلاف فانه سوف يحمـل على الضغط . لتكن إستطالة البرغي الفولاذي هي Δl_1 وليكن تقاصر الغلاف هو Δl_2 .لأسباب هندسية ينبغي أن يكون الانتقال الناتج عن تدوير الصامولة والذي يؤدي لانتقال طولي مقداره h/18 مساوياً $\Delta l'_1 + \Delta l_2$.

ليرمز للقوة التي تمدد (تشد) البرغي وتقلص (تضغنط) الغلاف بالحرف X ، عندئذ تنتج من الشرط الهندسي التالي (geometrischen Bedingung) :

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{h}{18}$$

وبعد إعتبار العلاقة (5.20) ، المعادلة الآتية :

$$\frac{X l}{E_1 F_1} + \frac{X l}{E_2 F_2} = \frac{h}{18}$$

من هذه المعادلة يتم تعيين القوة المجهولة :

$$X = \frac{1}{18} \frac{h}{l} \frac{F_1 F_2 E_1 E_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2}$$

وبفضلها يتم تعيين الاجهادات :

$$\sigma_1 = \frac{X}{F_1} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{X}{F_2}$$

باستخدام المعطيات العددية للمسألة ينتج :

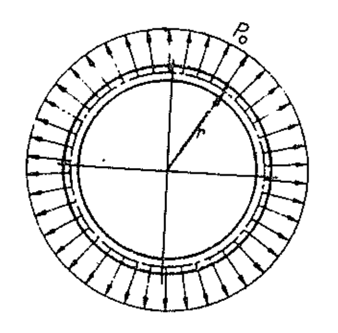
$$X = 2{,}313 \text{ Mp} , \quad \sigma_1 = 0{,}723 \text{ Mp cm}^{-2} , \sigma_2 = 1{,}217 \text{ Mp cm}^{-2}$$

٥ ـ ٧ الحلقات الدائرية رقيقة الجدار (Duennwandige Kreisringe)

يقال عن الحلقة الدائرية أنها رقيقة الجدار عندما تكون فيها أبعاد المقطع العرضي صغيرة بالنسبة لنصف القطر .

بتحميل أمثال هذه الحلقة الرقيقة بحمولة خطيــة p_0 ثابتــة بالنسبة لمحور الحلقـــة (شـكل 5-32) عندئذ تتشـكل في كل مقطع عرضي من الحلقة إجهادات ناظمية σ_0 (اجهادات حلقية Ringspannungen) يمكن اعتبارها موزعة على مساحـــة المقطع العرضي F بانتظام . حسب ذلك فان القوة الحلقية (قوة الحلقة Ringkraft) ، التي تؤثر مماسية على محور الحلقة ، تبلغ القيمة التالية :

$$N = \sigma_0 F$$



شكل 5-32

لتعيين هذه القوة ، سوف يتم ، حسب اقتراح العالم رانكين (RANKINE) ، شطر الحلقـــة الى شطرين (شكل 5-33) ثم تطبيـــق شرط توازن القوى بالاتجاه y على النصف العلوي وبذلك ينتج :

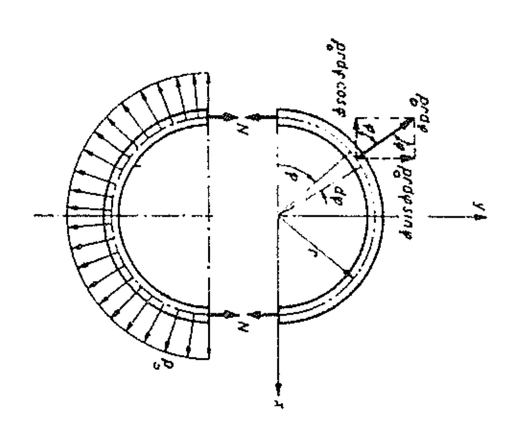
$$\int_0^\pi p_0 \, r \sin\varphi \, d\varphi - 2N = 0$$

من هذه العلاقة يتم تعيين القوة الحلقية المطلوبة :

$$N = \frac{1}{2} p_0 \, r \left[-\cos\varphi \right]_0^\pi = p_0 \, r \qquad (5\text{-}39)$$

أما شرط توازن القوى بالاتجاه x فهو لأسباب التنـاظر ، محقق . وبذلك فان الاجهـاد الحلقي يبلغ :

$$\sigma_0 = \frac{p_0\, r}{F} \qquad (5\text{-}40)$$



شكل 5-33

عندما يكون تأثير القوة الموزعة p_0 قطرياً ونحـو الخارج فان القـــوة الحلقيـة وكذلك الاجهاد الحلقي يكونا موجبتين ، وتكونا سالبتين عندما يكون تأثير القوة نحو الداخل (عندما تتجه الحمولة نحو الداخل) .

نتيجة للاجهادات الحلقية الموجبة يستطيل كل عنصر حلقي بالمقدار $d\bar{s} - ds$ (شكل 5.34) كما يظهر في نفس الوقت تغير قطري (تغير في القطر Radiusaenderung) مقـداره Δr .
من أجل التمدد

$$\varepsilon_0 = \frac{d\bar{s}}{ds} - 1$$

العائد لكل عنصر قوسي ، يتم بعد الاستعانة بالعلاقات التالية :

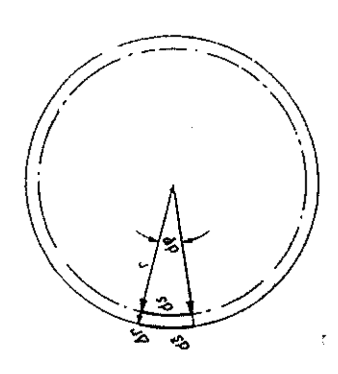
$$d\bar{s} = (r + \Delta r)\, d\varphi \ , \ ds = r\, d\varphi$$

الحصول على العلاقة الآتية :

$$\varepsilon_0 = \frac{r\, d\varphi + \Delta r\, d\varphi}{r\, d\varphi} - 1 = \frac{\Delta r}{r}$$

وبذلك فان التغير القطري يبلغ :

$$\Delta r = r\, \varepsilon_0 \qquad (5\text{-}41)$$



شكل 5.34

بواسطة قانون هوك :

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$$

يتم التوصل لاتساع حلقة دائرية رقيقة والذي يبلغ :

$$\Delta r = r\, \frac{\sigma_0}{E} = \frac{P_0\, r^2}{EF} \qquad (5\text{-}41b)$$

في حالة تحميل الحلقة على الضغط فان Δr يكون سالباً وذلك بحيث ينتج عنه تقلص الحلقة . بالامكان استخدام العلاقتين (5,40) و (5.41 b) ايضا لتعيين الاجهادات الحلقية والتغير القطري لانبوب رقيق الجدار ، سماكة جداره هي h .

في حالة تحميل الأنبوب بقوة سطحية q_0 ثابتة القيمة وقطرية الاتجاه ومنسوبـــة على السطح الأوسط للانبوب فان بالامكان تطبيق علاقة الحلقة (Ringformel) على الحلقةالمقتطعة منالأنبوب التي يبلغ عرضها b (شكل 5 35) . بواسطة محصلة القوة الخطية :

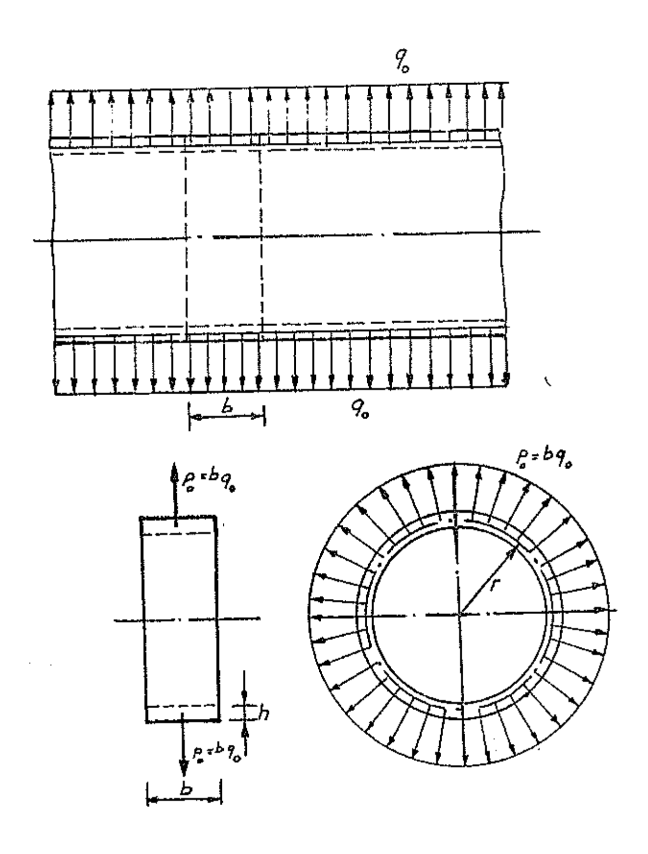
$$p_0 = b\, q_0$$

والمساحة F=bh فان الاجهاد الحلقي يبلغ حسب العلاقة (5,39) القيمة التالية :

$$\sigma_0 = \frac{b\, q_0\, r}{bh} = \frac{q_0\, r}{h} \qquad (5\text{-}42)$$

كما ان التغير القطري يبلغ حسب العلاقة (5·41 b) ما يلي :

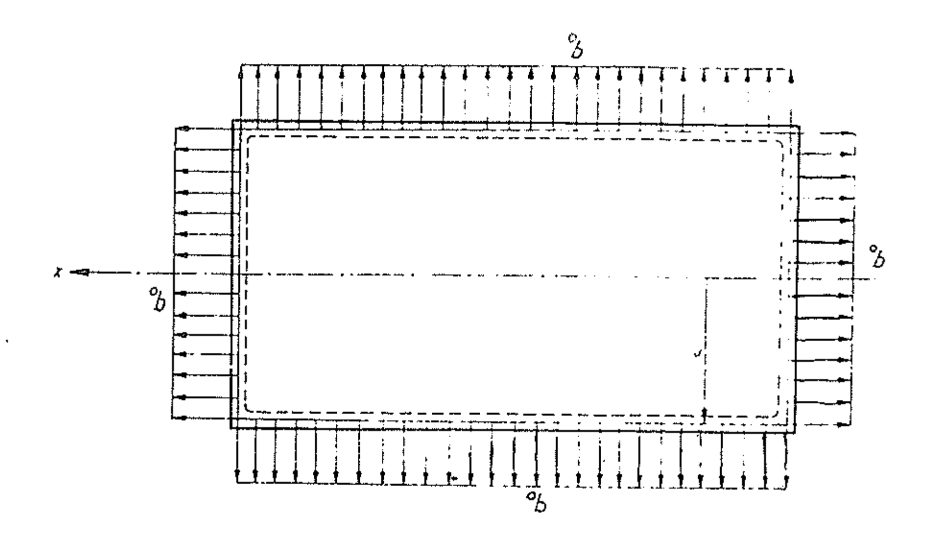
$$\Delta r = \frac{bq_0 r^2}{Ebh} = \frac{q_0 r^2}{E\,h} \qquad (5\text{-}43)$$



شكل 5.35

ان كلا القيمتين مستقل عن العرض b ولذلك فصلاحيتها تشمل كل انبوب رقيق مهما بلغ طوله .

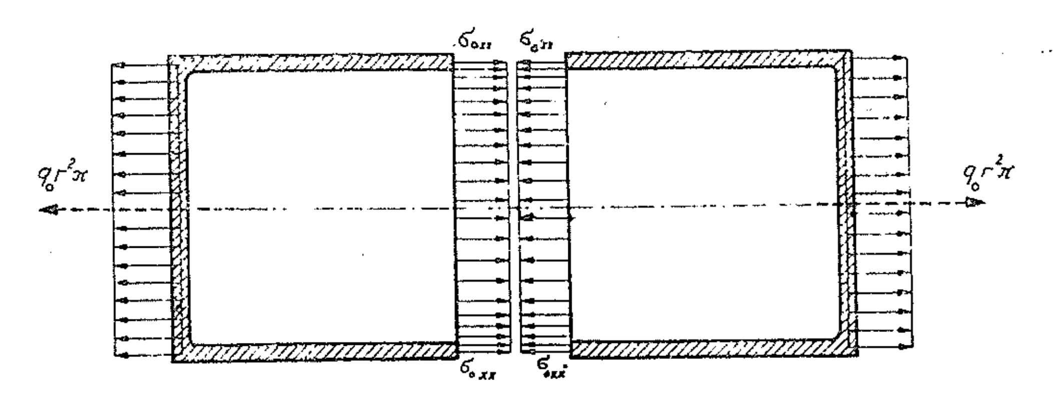
باغلاق نهايتي الانبوب رقيق الجدار يتشكل عنه مرجل اسطواني دائري (kreiszylindrischer Kessel) (شكل 5 36) وبذلك تتشكل في جداره ، في حالة التحميل على الضغط ، اجهادات حلقية واجهادات طولية (Ring – und Laengsspanuungen) . على بعد كبير وكاف عن صفائح اغلاق الأنبوب (Stirnwaenden) فان الاجهادات الحلقية في المرجل تتطابق مع الاجهادات الحلقية في الانبوب .



شكل 5-36

لتعيين الاجهادات الطولية ، سوف يقطع المرجل عرضياً (ناظمياً) على المحور الطولي (شكل 5.37) . تقوم محصلة الاجهادات الطولية σ_{xxo} ، التي يفترض انها تتوزع بانتظام ، مع المحصلة $q_0 r^2 \pi$ العائدة للقوى q_0 التي تؤثر على سطح صفائح الاغلاق ، بتحقيق حالة التوازن . بحيث تأخذ شروط التوازن من اجل الجزء المقتطع (المطبقة على الجزء المقتطع) من المرجل الشكل التالي :

$$\sigma_{xx0}\, 2 r \pi h - q^{0\,2} \pi = 0$$



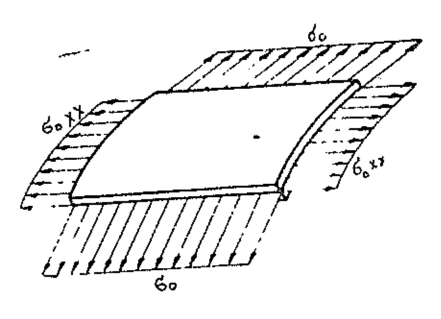
شكل 5.37

من هذه العلاقة يتم تعيين الاجهاد القطري :

$$\sigma_{xx0} = \frac{q_0\, r}{2h} \qquad (3\text{-}44)$$

الذي تبلغ قيمته نصف قيمة الاجهاد الحلقي σ_0 الذي يحسب بواسطة العلاقة (5.42) . اذاتؤثر على عنصر ما من السطح المغلف (Mantelflaeche) الموجود على بعد كاف من صفائح الاغلاق ، الاجهادات الناظمية التالية :

$$\sigma_0 = \frac{q_0 r}{h} \quad , \quad \sigma_{xx0} = \frac{q_0 r}{2h}$$



شكل 5.38

يوضح الشكل (5.38) حالة الاجهاد المذكورة .

٥ ـ ٨ التأثيرات الحرارية (Temperaturwirkungen)

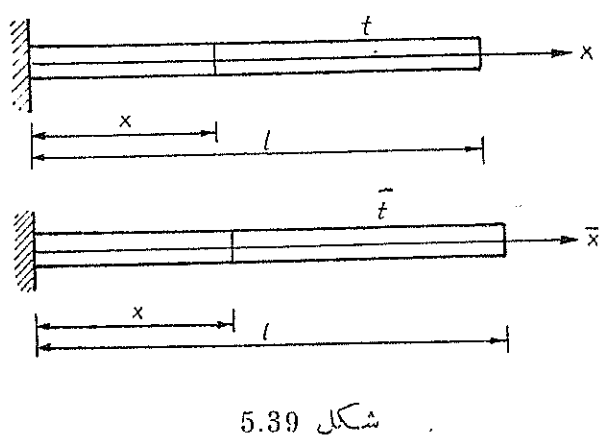
عندما تتغير درجة حرارة القضيب فانه يقوم في حالة ارتفاع درجة الحرارة بالاستطالة وفي حالة انخفاض درجة الحرارة بالتقاصر . سوف تهمل التغيرات الطارئة على ابعاد المقطع العرضي للقضيب وذلك لانها بالمقارنة مع طول القضيب صغيرة . سوف يتم الآن دراسة قضيب مقطعـه العرضي F ثابت وطوله l (شكل 5.39 a) وتبلغ درجة حرارته t .

عندما يكون α هو عامل التمدد الحراري الخطي (عامل الاستطالة الحراري الخطي او عامل التغير النسبي الحراري) (lineare thermische Ausdehnungskoeffizient) للمادة فان انتقال المقطع العرضي ، الذي يقع على بعد x من الاحداثيات والمعرف بالعلاقة التالية :

$$\bar{x} - x = u(x)$$

يبلغ في حالة تغير درجة الحرارة من t الى $\bar{t}$ (شكل 5.39 b) القيمة التالية :

$$u(x) = \alpha(\bar{t} - t)\, x \qquad (5\text{-}45)$$



شكل 5.39

ان تغير الطول الكلي للقضيب ، اي انتقال المقطع العرضي للنهاية (الموجود عند النهاية) والواقع على بعد $x=l$ ، يبلغ حسب العلاقة (5.40) ما يلي :

$$u\,(x=l)=\alpha\,(\,\bar{t}-t\,)\,l \qquad (5\text{-}46)$$

في حالة ارتفاع درجة الحرارة ، اي عندما تكون $\bar{t} > t$ ، فان الانتقالات تكون موجبةوفي حالة إنخفاض درجة الحرارة ، اي عندما تكون $\bar{t} < t$ ، فانها تكون سالبة . من العلاقة (5 45) ومن اجل التمدد الحراري ε_{th} ، يتم الحصول على القيمة المستقلة عن x ، التالية :

$$\varepsilon_{th}=\frac{du(x)}{dx}=\alpha(\bar{t}-t) \qquad (5\text{-}47)$$

حيث ان :

$\bar{t}$ هي درجة الحرارة النهائية.

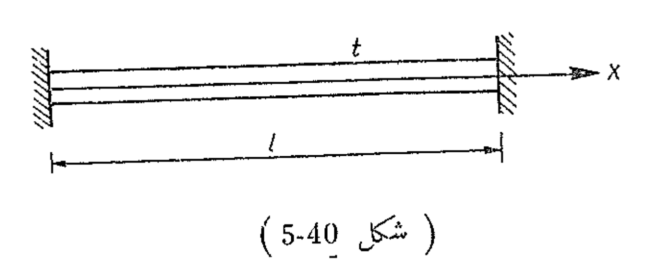
t هي درجة الحرارة الابتدائية .

α هو عامل التمدد الخطي الحراري (فهو يساوي ، على سبيل المثال

$\alpha_{Cu}=16{,}5.16^{-6}\,\frac{1}{^{0}C}$ ، $\alpha_{Fe}\approx 12.10^{-6}\,\frac{1}{^{0}C}$) .

لعدم اعاقة تمدد المادة اثناء التغير الحراري $\bar{t}-t$ فان التمددات الحرارية لا تؤدي في الجمل المقررة ستاتيكياً الى اجهادات . لكن بعد اعاقة التغير الطولي وذلك بتثبيت

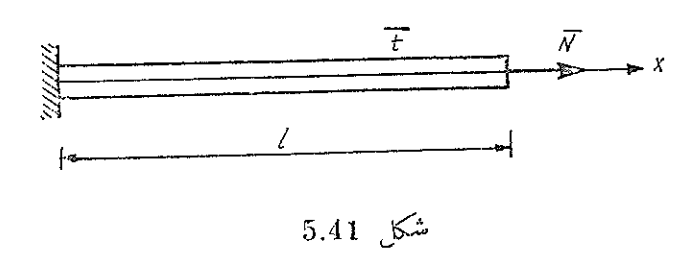
نهاية القضيـــب (شكل 5-40) تتشكل في القضيب اجهادات ، تسمى **بالاجهادات الحرارية** (Waermespannungen) .



(شكل 5-40)

لتعيين الاجهادات الحرارية المذكورة سوف يفصل القضيب عن نقطة الوثاقة ثم يجرى ادخال رد فعل المسند N الذي يعتبر في البداية مجهولا (شكل 5 41). نتيجةلتغير درجة الحرارةبالمقدار $\bar{t}-t$ فقط فان نهاية القضيب سوف تنتقل بالمقدار :

$$u\,(x=l)=\alpha\,(\bar{t}-t)\,l=\varepsilon_{th}\,l$$



شكل 5.41

بينما يبلغ انتقال نفس النقطة من القضيب ، تحت تأثير قوة رد فعل المسند N ؛ حسب العلاقة (5 20) ، القيمة التالية :

$$\bar{u}\,(x=l)=\frac{\bar{N}\,l}{EF}$$

لكن بما ان نهاية القضيب اليمنى هي في الحقيقة ثابتة ، لذلك ينبغي ان ينعدم مجموع كلا الانتقالين $u\,(l)+\bar{u}\,(l)$ بحيث يصبح :

$$\varepsilon_{th}\,l+\frac{\bar{N}l}{EF}=0$$

من هذه العلاقة يتم تعيين القوة الناظمية ، التي تتشكل في القضيب نتيجة لاعاقة التمددات الحرارية وهي تبلغ :

$$\overline{N} = -EF\,\varepsilon_{th} = -EF\alpha(\overline{t} - t) = N_x(x) \qquad (5\text{-}48)$$

في حالة ارتفاع درجة الحرارة تكون هذه القوة ضاغطة وفي حالة انخفاض درجة الحرارة فانها تكون قوة شادة . اما قيمة الاجهادات الحرارية الثابتة على طول القضيب فتبلغ :

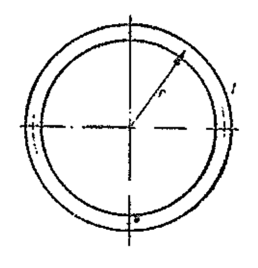
$$\overline{\sigma} = \frac{\overline{N}}{F} = -E\,\varepsilon_{th} = -E\alpha(\overline{t} - t) \qquad (5\text{-}49)$$

والآن سوف تتم دراسة الحلقة الدائرية الرقيقة التي تبلغ مساحة مقطعها العرضي F والتي غيرت فيها درجة الحرارة (شكل 5.42) . بواسطـة التغير الطولي الناتج عن التـأثير الحراري الذي يقوم به كل عنصر قوسي ds_0 والبالغ :

$$d\overline{s} - ds = \alpha\,(\overline{t} - t)\,ds$$

يتم تعيين التمدد الحلقي الحراري (thermische Ringdehnung) :

$$\varepsilon_{th} = \frac{d\overline{s}}{ds} - 1 = \alpha\,(\overline{t} - t) \qquad (5\text{-}50)$$



شكل 5.42

ومن هـذه المعادلة وبالاستعانـة بالعلاقـة (5,41) يتم تعيين التغير القطري الحراري للحلقــة (thermische Radiusaenderung) :

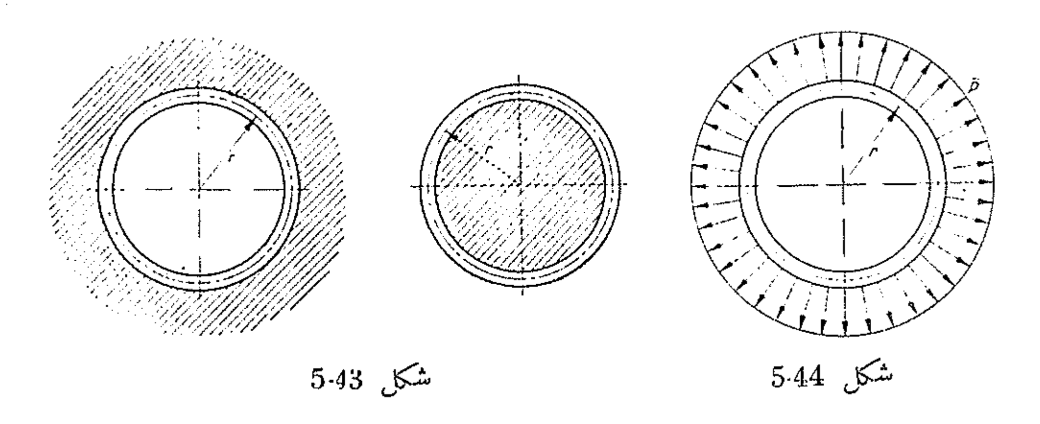
$$\Delta r = r\,\varepsilon_{th} = r\alpha\,(\overline{t} - t) \qquad (5\text{-}51)$$

بارتفاع درجة الحرارة تتسع الحلقة $(\Delta r>0)$ وبانخفاض درجة الحرارة تتقلص الحلقة $(\Delta r<0)$ وبالرغم من ذلك فان الحلقة تبقى خالية من الاجهاد (Spannungsfrei). في حالة إعاقة الحلقة من القــيام بالتمــدد الحــراري وذلك بواسطـة الاستــناد المتنــاظر دورانيــاً

(rotationssymmetrische stützung) (شكل 5-43) عندئذ تتشكل فيها اجهادات حرارية .
لتعيينها سوف تفصل الحلقة عن الاستناد ثم تطبق عليها القوى الخطية $\overline{p}$ ، التي تعتبر في البداية مجهولة ، كردود افعال مساند (شكل 5-44) .

بسبب بقاء قطر الحلقة ثابتاً ، ينبغي ان يتعادل تغير القطر الناتج عن تأثير التغير الحراري :

$$\Delta r = r\,\alpha\,(\overline{t} - t) = r\,\varepsilon_{th}$$



شكل 5-43   شكل 5-44

مع تغير القطر (التغير القطري) الناتج عن تأثير ردود افعال المساند $\overline{p}$. بما ان القوة $\overline{p}$ تؤدي ، حسب العلاقة (5 39) ، الى تشكل القوة الحلقية (قوة الحلقة Ringkraft):

$$\overline{N} = \overline{p}\,r$$

وحسب العلاقة (5-41 b) الى تغير القطر :

$$\frac{\overline{p}\,r^2}{EF} = \frac{\overline{N}\,r}{EF}$$

لذلك ينبغي تحقيق الشرط الهندسي التالي :

$$r\,\varepsilon_{th} + \frac{\overline{N}\,r}{EF} = 0$$

ان الحلقة المدروسة هي بالفرض رقيقة الجدار ولذلك لا يؤثر تطبيق الحمولة الخطية $\overline{p}$ سواء كان على الجدار الخارجي ام على الجدار الداخلي ام على محور الحلقة ، على النتائج .

في حالة اعاقة التمدد الحراري (الانفعال الحراري) عندئذ تتشكل القوة الحلقية التالية :

$$\overline{N} = -\,EF\,\varepsilon_{th} = -\,EF\,\alpha\,(\overline{t} - t) \qquad (5\text{-}52)$$

وكذلك الاجهاد الحراري الآتي :

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{F} = - E \varepsilon_{th} = - E \alpha (\bar{t} - t) \qquad (5\text{-}53)$$

مثال 60 :

وضعت سكة حافلة مصنوعة من الفولاذ ($E=2100,0 \ Mp \ cm^{-2}$, $\alpha = 0,000\,012 \ ^{\circ}C^{-1}$) مقطعها العرضي ثابت $F = 62,48 \ cm^2$ ، تحت تأثير تغير حراري $\bar{t} - t = 40^{\circ}C$.
المطلوب : تعيين القوة الناظمية والاجهاد التي تتشكل في السكة عندما توثق من كلا طرفيها .

الحل :

بواسطة العلاقة (5.47) يتم تعيين القوة الناظمية :

$$\bar{N} = 2\,100,0 \ , \ 62,48 \ . \ 0,000\,012 \ . \ 40 = 62,980 \ Mp$$

وبواسطة العلاقة (5.48) يتم ايجاد اجهادات الشد :

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{F} = - E \varepsilon_{th} = - E \alpha (\bar{t} - t)$$

$$\bar{\sigma} = 2100,0 \ . \ 0,000\,012 \ . \ 40 = 1,008 \ Mp \ cm^{-2}$$

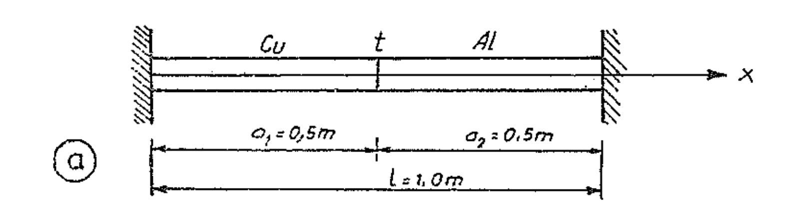
مثال 61 :

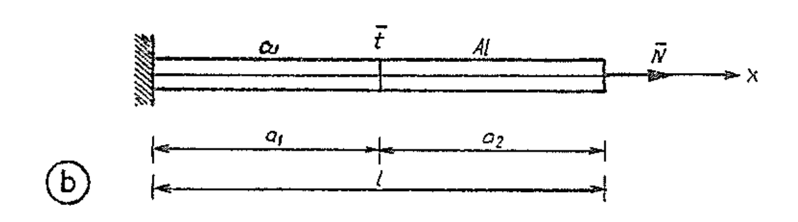
يتألف قضيب مقطعه العرضي ثابت $F=100,0 cm^2$ على طوله (شكل 5-45 a) حتى المسافة a_1 من النحاس ($E_1=720,0 \ Mp \ cm^{-2}$, $\alpha_1=0,000017 \ ^{\circ}C^{-1}$) وحتى المسافة a_2 من الالمنيوم ($E_2=1300,0 \ Mp \ cm^{-2}$, $\alpha_2=0,000024 \ ^{\circ}C^{-1}$) . ترفع درجة حرارة القضيب من $t = 20 \ ^{\circ}C$ حتى $\bar{t} = 80^{\circ}C$.
المطلوب : تعيين القوة الناظمية التي تتشكل في القضيب .

الحل :

يفصل القضيب عن المسند الايمن (شكل 5-45 b) ثم يؤثر عليه رد الفعل $\bar{N}$ الذي ينبغي ان يتم تعينه بالاستعانة بشرط بقاء طول القضيب ثابتاً .

يبلغ انتقال نهاية القضيب، الناتج عن تأثير الحرارة ، القيمة التالية :





شكل 5-45

$$u(l) = \alpha_1 (\bar{t} - t) a_1 + \alpha_2 (\bar{t} - t) a_2 = (\bar{t} - t)(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)$$

أما انتقالها الناتج عن تأثير رد فعل المسند $\bar{N}$ فيبلغ :

$$\bar{u}(l) = \frac{\bar{N} a_1}{E_1 F} + \frac{\bar{N} a_2}{E_2 F} = \frac{\bar{N}}{F}\left(\frac{a_1}{E_1} + \frac{a_2}{E_2}\right)$$

لوجوب انعدام مجموع الانتقالين :

$$u(l) + \bar{u}(l)$$

يتم التوصل للشرط الهندسي التالي :

$$(\bar{t} - t)(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) + \frac{\bar{N}}{F}\left(\frac{a_1}{E_1} + \frac{a_2}{E_2}\right) = 0$$

من هذه العلاقة ينتج :

$$\bar{N} = -F \frac{E_1 E_2}{E_1 a_2 + E_2 a_1} (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)(\bar{t} - t)$$

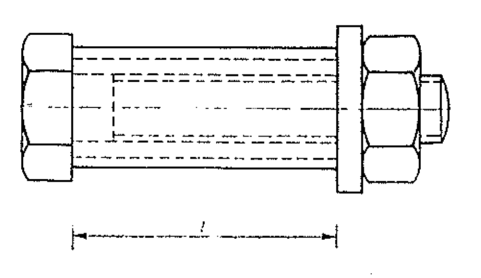
من أجل المعطيات العددية للمسألة ينتج :

$$\bar{N} = -114,0 \text{ Mp}$$

مثال 62 :

يحـاط برغي فولاذي $(E_1 = 2100,0 \text{ Mp cm}^{-2}\ ,\ \alpha_1 = 0{,}000\,012\ {}^{\circ}C^{-1})$ بغلاف نحـاسي $(E_2 = 720,0 \text{ Mp cm}^{-2}\ ,\ \alpha_2 = 0{,}000017\ {}^{\circ}C^{-1})$ (شكل 5.47) . ان كلا الجزئين يكونا عند درجة الحرارة $t = 20\ {}^{\circ}C$ عديما الاجهاد) .

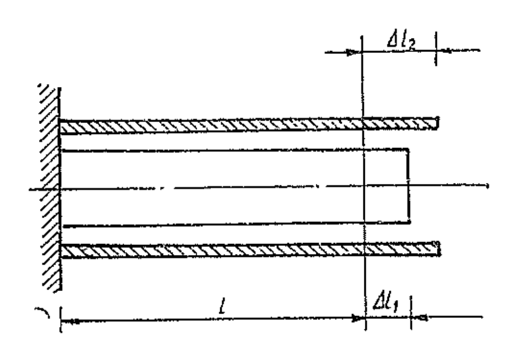
المطلوب : تعيين الاجهادات التي تؤثر في جسم البرغي الفولاذي وكذلك في الحلقة النحـاسية وذلك عندما تسخن المجموعة حتى الدرجة $\bar{t} = 80^{\circ}C$.



شكل 5-47

الحل :

لتعيين الاجهادات المطلوبة سوف يتخيل فك (حل) الصامولة بحيث تستطيع المجمـوعة من الاستطالة بشكل حر . نتيجة للتغير الحراري الذي يبلغ $\bar{t} = t$ فان الغلاف النحاسي سوف يقوم باستطالة اكبر من الاستطالة التي يقوم بها البرغي الفولاذي . بما ان فعل الصامولة يعاكس التمدد الطولي الحر للغلاف لذلك فان الغلاف سوف يحمل على الضغط اما جسم البرغي فانه سوف يحمل على الشد .



شكل 5.48

سوف يرمز للقوة التي تضغط الغلاف والتي تشد البرغي بالحرف X . بذلك فان التغير الطولي لكلا الجزئين (شكل 5.48) يأخذ القيم التالية :

$$\Delta l_1 = \alpha_1 \ (\bar{t} - t) \ l + \frac{X l}{E_1 F_1}$$

$$\Delta l_2 = \alpha_2 \ (\bar{t} - t) \ l - \frac{X l}{E_2 F_2}$$

لوجوب انعدام مجموع الانتقالين ، يتم التوصل من العلاقة التالية :

$$\alpha_1 \ (\bar{t} - t) \ l + \frac{X l}{E_1 F_1} = \alpha_2 \ (\bar{t} - t) \ l - \frac{X l}{E_2 F_2}$$

للقوة المطلوبة :

$$X = (\alpha_2 - \alpha_1) \ (\bar{t} - t) \ \frac{E_1 E_2 F_1 F_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2}$$

وبواسطتها يتم تعيين الاجهادات المطلوبة :

$$\sigma_1 = \frac{X}{F_1} \quad , \quad \sigma_2 = -\frac{X}{F_2}$$

من اجل المعطيات العددية للمسألة ينتج :

$X = 0{,}341$ Mp , $\sigma_1 = 0{,}107$ Mp cm^{-2} , $\sigma_2 = -0{,}179$ Mp cm^{-2}

مثال 63 :

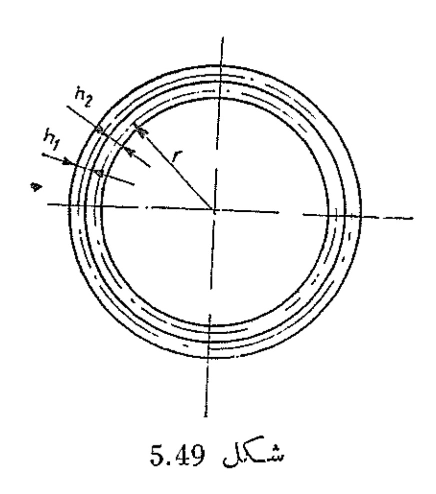
بتسخين حلقة نحاسية (α_1 , E_1) سماكتها h_1 حتى درجة الحرارة τ يستطاع حينئذ بكل حرية زلقها (مع وجود فراغ صغير جداً) على حلقة فولاذية (α_2 , E_2) قطرها r وسماكتها h_2 ودرجة حرارتها t (شكل 5-49) .

ان لكلا الحلقتين نفس العرض وهو b .

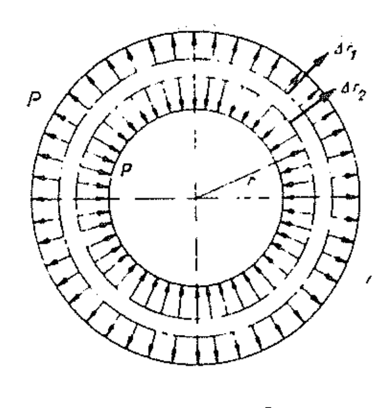
المطلوب : تعيين الاجهادات التي تتشكل في كلا الحلقتين ، عندما تصبح درجة الحرارة في الحلقة النحاسية $\bar{\tau}$ وفي الحلقة الفولاذية $\bar{t}$.

الحل :

بما ان $\alpha_2 < \alpha_1$ فان الحلقتين سوف تنكمش على بعضها اثناء التبريد . لتكن القوة الخطية التي تمدد الحلقة النحاسية وتقلص الحلقة الفولاذية هي $\bar{p}$ (شكل 5.50) .



شكل 5.49



شكل 5-50

بواسطة العلاقة التالية :

$$r + \frac{1}{2}(h_1 + h_2) \approx r$$

يتم الحصول على تغير القطر (التغير القطري) :

$$\Delta r_1 = \alpha_1 (\bar{\tau} - \tau)\, r + \frac{\bar{p}\, r^2}{E_1 b h_1} \;,\quad \Delta r_2 = \alpha_2 (\bar{t} - t)\, r - \frac{\bar{p}\, r^2}{E_2 b h_2}$$

لوجوب بقاء الحلقتين متصلتين مع بعض اثناء التغير الحراري فان الشرط الهندسي يأخذ الشكل التالي :

$$\Delta r_1 = \Delta r_2$$

بتبديل تغيرات الاقطار في العلاقة السابقة ينتج :

$$\alpha_1 (\bar{\tau} - \tau)\, r + \frac{\bar{p}\, r^2}{E_1 b h_1} = \alpha_2 (\bar{t} - t)\, r - \frac{\bar{p}\, r^2}{E_2 b h_2}$$

ومنها يتم تعيين القوة الخطية :

$$\bar{p} = \frac{b h_1 h_2}{r} \left[-\alpha_1 (\bar{\tau} - \tau) + \alpha_2 (\bar{t} - t) \right] \frac{E_1 E_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \qquad (5\text{-}54)$$

تبلغ القوى الطولية ما يلي :

$$N_1 = \bar{p}\, r \;;\; N_2 = -\bar{p}\, r \qquad (5\text{-}55)$$

أما الاجهادات فتبلغ :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{b h_1} = \frac{\overline{p} r}{b h_1} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{b h_2} = - \frac{\overline{p} r}{b h_2} \tag{5-56}$$

من أجل المعطيات العددية للمسألة :

$E_1 = 720{,}0 \text{ Mp cm}^{-2}$; $\alpha_1 = 0{,}000\ 017\ {}^\circ C^{-1}$; $\tau = 50^\circ C$; $\overline{\tau} = 20^\circ C$

$E_2 = 2100{,}0 \text{ Mp cm}^{-2}$; $\alpha_2 = 0{,}000\ 012\ {}^\circ C^{-1}$; $t = 20^\circ C$; $\overline{t} = 20^\circ C$

$r = 4{,}0 \text{cm}$; $h_1 = 0{,}5 \text{ cm}$; $h_2 = 0{,}5 \text{ cm}, b = 5{,}0 \text{cm}$

يتم التوصل للنتائج التالية :

$\overline{p} = 0{,}171 \text{ Mp cm}^{-1}$, $N_1 = 0{,}684 \text{ Mp}$, $N_2 = -0{,}684 \text{ Mp}$

$\sigma_1 = 0{,}273 \text{ Mp cm}^{-2}$, $\sigma_2 = -0{,}273 \text{ Mp cm}^{-2}$

في حالة الحرارة المشتركة للحلقتين $c = \overline{t} = \overline{\tau}$ عندئذ يتم الحصول على القوة الخطية التالية :

$$p^* = \frac{b h_1 h_2}{r} \left[-\alpha_1 (c - \tau) + \alpha_2 (c - t) \right] \frac{E_1 E_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2}$$

عندما تختـار :

$$c = \frac{\alpha_1 \tau - \alpha_2 t}{\alpha_1 - \alpha_2} \tag{5-57}$$

عندئذ تنعدم القوة الخطية p^* وبالامكان في ذلك الحين فك (حل)الحلقتين عن بعض. تبلغ درجة الحرارة ، من أجل المعطيات العددية للمسألة $c = 122\ {}^\circ C$.

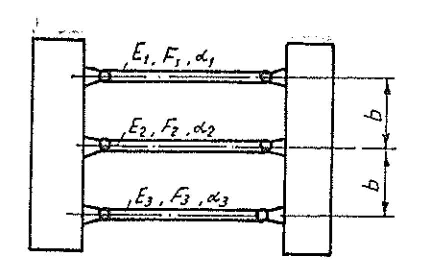
مثال 64 :

عرضت ثلاثة قضبان موثوقة من نهايتها بصفيحتين صلبتين الى تأثير تغير حراري مقداره $\Delta t = \overline{t} - t$ (شكل 5-51) .

المعطى :

(E_1 , F_1 , α_1) ; (E_2 , F_2 , α_2) ; (E_3 , F_3 , α_3) , b , Δt .

المطلوب : تعيين الاجهادات الحرارية التي تتشكل في كل من القضبان .



شكل 5-51

الحل :

بالافتراض أن قوى القطع في القضبان كلها هي قوى شد ، عندئذ يأخـــذ شرط توازن القوى الشـكل التالي :

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0 \tag{5-58}$$

بسبب اختلاف عوامل التمدد الحرارية للقضبان الثلاثة ، لذلك سوف تتشكل فيهـا اجهـــادات حرارية. تبلغ التمددات الكلية للقضبان ، القيم التالية :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1el} + \varepsilon_{1th} = \varepsilon_{1el} + \alpha_1 \Delta t$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{2el} + \varepsilon_{2th} = \varepsilon_{2el} + \alpha_2 \Delta t$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{3el} + \varepsilon_{3th} = \varepsilon_{3el} + \alpha_3 \Delta t$$

حيث أن :

$$\varepsilon_{i\,el} = \frac{P_i}{E_i F_i}$$

تأخذ الشروط الهندسية الشكل التالي :

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3$$

من هذه العلاقة يتم التوصل للمعادلة التي تساعد على تعيين المجاهيل . في حالة كـون $F_1=F_3$ ، $E_1=E_3$ ، $\alpha_1=\alpha_3$ ، عندئذ ينتج :

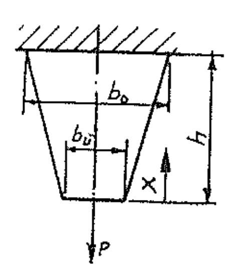
$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\,\Delta t}{\frac{1}{E_1} + \frac{2 F_1}{E_2 F_2}} = \sigma_3$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{F_2} = \frac{-2 P_1}{F_2} = -2 \frac{F_1}{F_2}\, \sigma_1$$

مثال 65 :

المعطى : b_0 , b_u , h والسماكة d=const و P , γ مقاسة بـ kp/cm^3 (شكل 5.52) .

المطلوب : تعيين الاجهاد σ_x وكذلك انتقال نقطة تطبيق القوة .



شكل 5.52

الحل :

مساحة المقطع العرضي للقضيب على ارتفاع x :

$$F(x) = d\left[b_u + \frac{x}{h}(b_0 - b_u)\right]$$

بتطبيق شروط التوازن على العنصر الحجمي ينتج :

$$\sigma(x)\,F(x) = \int_0^x \gamma\,F(\bar{x})\,d\bar{x} + K = \gamma\,dx\left[b_u + \frac{x}{2h}(b_0 - b_u)\right] + K$$

شرط الطرف عند:

$$x = 0 \quad : \quad \sigma(o)\,F(o) = P = K$$

$$\sigma(x) = \frac{\dfrac{P}{d\,b_u} + \gamma\,x\left[1 + \dfrac{x}{2h}\left(\dfrac{b_0}{b_u} - 1\right)\right]}{1 + \dfrac{x}{h}\left(\dfrac{b_0}{b_u} - 1\right)}$$

بدون مكاملة يتم الحصول ، من أجل هذه الحالة البسيطة ، بتطبيق شرط التوازن على الجزء المتبقي من الجسم بعد الاقتطاع على ارتفاع x ، على نفس العلاقة :

$$\sigma(x)\,d\left[b_u + \frac{x}{h}(b_0 - b_u)\right] = P + \gamma\,\frac{x}{2}\left[b_u + b_u + \frac{x}{h}(b_0 - b_u)\right]d$$

الأنتقال :

$$\varepsilon = \frac{d\,V_x}{dx} = \frac{d\,u}{d\,x} = \frac{\sigma\,(x)}{E}$$

$$V_x\,(x) = u\,(x) = \frac{1}{E}\int_0^x \sigma\,(\bar{x})\,d\bar{x} + C = \frac{1}{E}\left\{\frac{\gamma}{4}\,x^2 + \frac{h}{2\,(\frac{b_o}{b_u} - 1)}\right.\cdot$$

$$\left.\cdot\left[x\,\gamma + \frac{\frac{2\,P}{d\,b_u}\,(\frac{b_o}{b_u} - 1) - h\gamma}{(\frac{b_o}{b_u} - 1)}\,ln\,\left[1 + \frac{x}{h}\,(\frac{b_o}{b_u} - 1)\right]\right]\right\} + C$$

شرط الاطراف :

$$V_x\,(x = h) = 0\ :$$

$$C = -\frac{1}{E}\left\{\frac{\gamma}{4}\,h^2 + \frac{h}{2\,(\frac{b_o}{b_u} - 1)}\left[\gamma h + \frac{\frac{2\,P}{d\,bu}\,(\frac{b_o}{b_u} - 1) - h\gamma}{\frac{b_o}{b_u} - 1}\,ln\,\frac{b_o}{b_u}\right]\right\}$$

انتقال نقطة تطبيق القوة :

$$V_x\,(o) = C$$

مثال 66 :

حملت اسطوانتان مفرغتان (Hohlzylinder) ، وضعت احداها داخل الاخرى بحيث أخذتا وضعاً مركزيا وحصرتا بين صفيحة صلبة من جهة ومن الجهة الاخرى بين تربة صلبة ، بحمولةسطحية (شكل 5-53) .

المعطى : $q\,,\,l\,,\,E_1\,,\,E_2\,,\,r_1\,,\,r_2\,,\,h_1\,,\,h_2$.

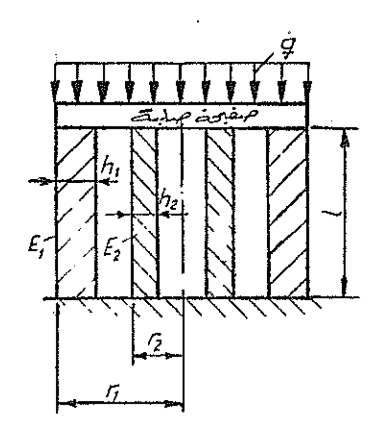
المطلوب :

حساب الاجهادات في الاسطوانتين والتقاصر Δl .

الحل :

الاجهادات :

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{P_2}{F_2}$$



شكل 5-53

حيث أن :

$$F = \pi r_1^2$$

$$F_i = \pi r_i^2 - \pi (r_i - h_i)^2 = \pi h_i (2 r_i - h_i) \quad ; \quad i = 1 \; ; \; 2$$

شرط التوازن :

$$P_1 + P_2 + qF = 0$$

شرط التمدد :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{P_1}{E_1 F_1} = \frac{P_2}{E_2 F_2}$$ (قانون هوك)

وبذلك ينتج :

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1} = -q r_1^2 \frac{E_1}{E_1 h_1 (2 r_1 - h_1) + E_2 h_2 (2 r_2 - h_2)}$$

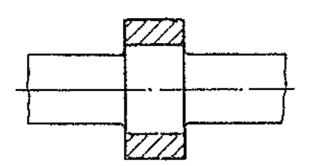
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{F_2} = \sigma_1 \frac{E_2}{E_1}$$

التقاصر :

$$\Delta l = l \varepsilon = l \frac{\sigma_1}{E_1} = l \frac{\sigma_2}{E_2}$$

مثال 67 :

تنطبق حلقة نحاسية (E_1, α_1) ، تبلغ درجة حرارتها $t_1 = 100°C$ ، بدقة على محور فولاذي (Stahlwelle) درجة حرارته $t_2 = 20°C$ (شكل 5-54) .



شكل 5.54

المعطى :

$$\alpha_1 = 16 \cdot 10^{-6} \quad {}^{\circ}C^{-1}$$

$$E_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-6} \quad kp/cm^2$$

$$\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \quad {}^{\circ}C^{-1}$$

$$E_2 = 2{,}1 \cdot 10^{-6} \quad kp/cm^{-2}$$

المطلوب : تعيين

١ ـ الاجهادات التي تتشكل في الحلقة النحاسية وذلك عندما تبرد الحاقة حتى الدرجة $20\,{}^{\circ}C$.

٢ ـ الاجهادات التي تتشكل في الحلقة النحاسية وذلك عندما تبرد المجموعة (الحلقة والمحور) حتى الدرجة $0\,{}^{\circ}C$.

٣ ـ درجة الحرارة المشتركة t_3 التي ينفك عند بلوغها الرباط بين الحلقة والمحور .

الحل :

للتماس الدائم بين الحلقة (1) والمحور (2) لذلك ينبغي أن تكون التمددات في كلا الجزئيين متساوية $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. بالاستعانة بالعلاقة التالية :

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{th}$$

(حيث أن ε_{el} هو التمدد المرن وأن ε_{th} هو التمدد الحراري وأن ε هو التمدد الكلي) . وبعد اهمال التمدد المرن للمحور ($\varepsilon_{2el} \approx 0$) ينتج :

$$\frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta t_1 - \alpha_2 \Delta t_2 = 0$$

١ ـ

$$\Delta t_1 = \bar{t} - t_1 = (20 - 100)^{\circ} \; c \;\; ; \;\; \Delta t_2 = \bar{t} - t_2 = 0$$

$$\sigma_1 \,(20^{\circ}C) = 1408 \; kp/cm^2$$

٢ –

$$\Delta t_1 = \bar{t} - t_1 = (0 - 100)^\circ C \; ; \; \Delta t_2 = \bar{t} - t_2 = (0 - 20)^\circ C = -20^\circ C$$

$$\sigma_1 (0^\circ C) = 1496 \; kp/cm^2$$

٣ – من العلاقة التالية :

$$\sigma_1 (t_3) = 0$$

ينتج :

$$\alpha_1 (t_3 - t_1) = \alpha_1 (t_3 - t_2) \; ; \; t_3 = 340^\circ C$$

الفصل السادس

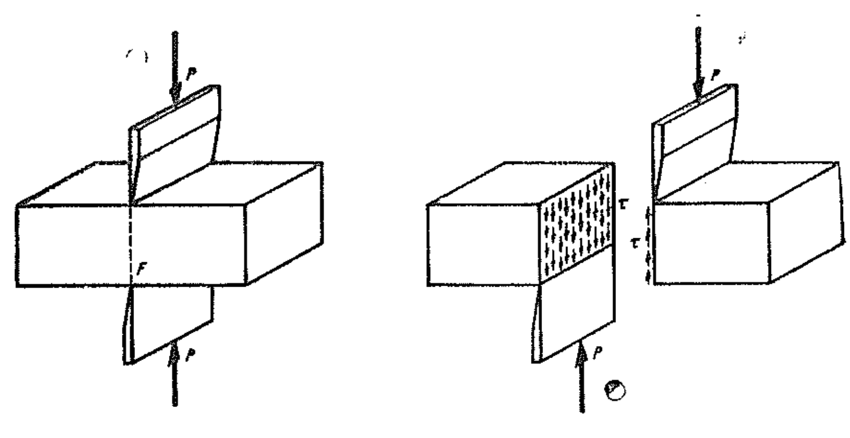
التحميل على القص

SCHUBBEANSPRUCHUNGEN

٦ ـ ١ الاجهادات في حالة التحميل على القص

(Spannungen bei Schubbeanspruchungen)

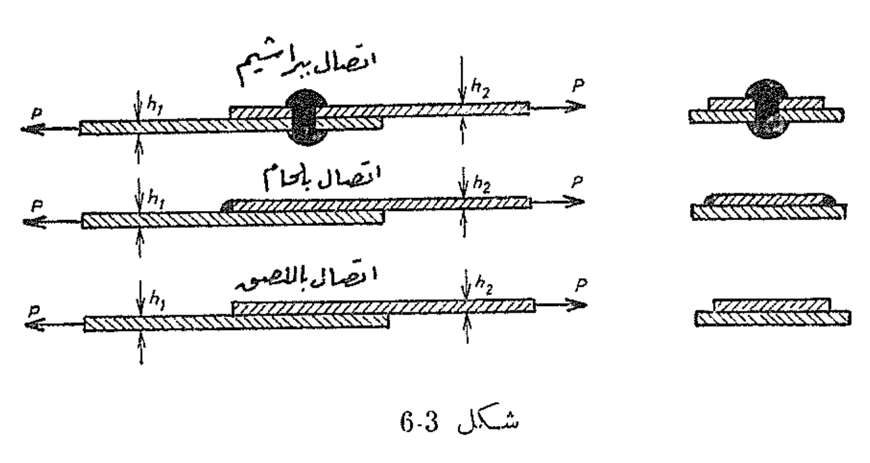
يقال عن المقطع العرضي لقضيب F أنه محملاً على القص ، عندما يؤثر عليه ، على سبيل المثال ، قاطعين (حدين) متقابلين (شكل 6.1) . في ذلك الحين تظهر (تتشكل) على سطوح القطع ، بشكل اساسي ، اجهادات مماسية تقوم محصلتها بتحقيق التوازن مع القوة المؤثرة P (شكل 6.2) . لظهور اجهادات ناظمية في المقطع العرضي تنشأ في القضيب حالة اجهاد فراغية معقدة ، لكن الاجهادات الناظمية المذكورة صغيرة جداً اذا ما قورنت مع الاجهادات المماسية τ ولذلك يمكن اهمالها .



شكل 6-1 شكل 6.2

تظهر في الحياة العملية الهندسية امثال هذه الاجهادات المماسية في الوصلات (الاتصالات) بواسطة البرشمة (البراشيم) وبواسطة اللحم وبواسطة اللصق (شكل 6.3) .

ان كل عنصر سطحي dF ، من السطح F المحمل بواسطة القوة P على القص ، يتحمل القوة τ d F الواقعة فيه (شكل 6.4) ، وبذلك يأخذ شرط توازن القوى باتجاه القوة المؤثرة الشكل التالي :

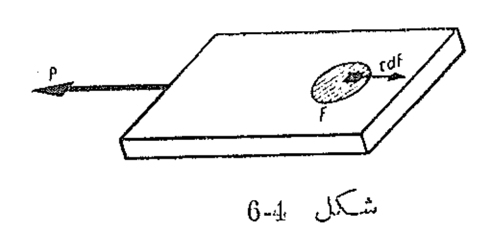


شكل 6-3

$$P - \int_F \tau \, dF = 0$$

لعدم التمكن من اعطاء اية معلومات عن شكل توزيع الاجهاد المماسي τ الموجـود على سطح القص F ، لذلك سوف يفترض ان الاجهادات المماسية تتوز ع على السطح F بشكـل منتظـم وبقيمة تساوي القيمة الوسطية τ_0 وبهذا فان شرط التوازن السابق يأخذ الشكل التالي :

$$P - \tau_0 \int_F dF = 0$$



شكل 6-4

من هذه العلاقة يتم تعيين القيمة الوسطية للاجهاد المماسي :

$$\tau_0 = \frac{P}{F} \qquad (6\cdot1)$$

عندما يكون الاجهاد المماسي المسموح $\text{zul}\ \tau$ معلوما فان الكشف عن الاجهاد يأخذ الشكـل التالي :

$$\frac{P}{F} \leqq \text{zul}\ \tau \qquad (6\cdot2)$$

اما عندما تكون القوة الخارجية P معطاة والاجهاد الماسي المسموح معلوما فان سطح القـص اللازم (erforderliche Scherflaeche)، الذي ينبغي اثناء التصميم عدم تخطيه ، يحسب بواسطة علاقة التصميم التالية :

$$\text{erf } F \geqq \frac{P}{\text{zul } \tau} \qquad (6\text{-}3)$$

اذا كان سطح المقطع العرضي F والاجهاد الماسي المسموح $\text{zul } \tau$ معطيين ، عنـدئـذ يتم ، حسب العلاقة (6-2) ، الحصول على القوة المسموحة $\text{zul } p$ التي يستطيع سطح القص المعطـى تحملها وهي :

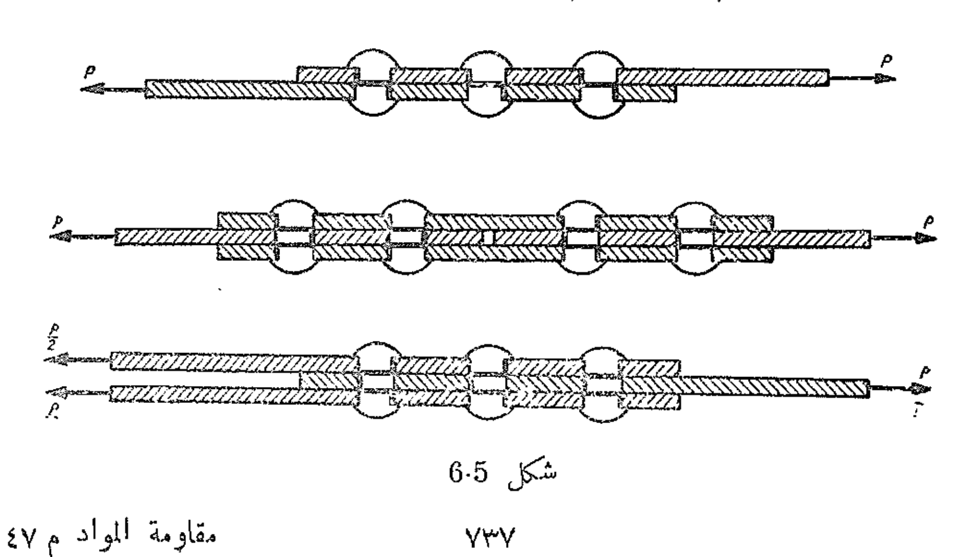
$$\text{zul } P \leqq F \cdot \text{zul } \tau \qquad (6\text{-}4)$$

وبذلك يتم تعيين تحمل الوصلة (Tragfaehigkeit der Verbindung) .

في حالة الوصل (الربط) بواسطة البراشيم (شكل 6-3) تتشكل على سطوح التماس بين جسم البرشيم وبين الصفائح ، علاوة على الاجهادات الماسية ، اجهادات حافـة الثقب . فاذا كان d هو قطر البرشيم وكانت $\min h$ هي أصغر سماكتي الصفيحتين المترابطتين ، فان الكشـف عن اجهادات حافة الثقب يتم حسب العلاقة (5-25) . ومن اجل ذلك تصلح العلاقة التالية :

$$\frac{P}{d \cdot \min h} \leqq \text{zul } \sigma_L \qquad (6\text{-}5)$$

تجرى (تؤخذ) الوصلات بالبراشيم إما بقطع واحـــد (einschnittig) (شكل 6-5 a) أو بقطعين (zweischnittig) (شكل 6 5 b,c)أو بعدة قطوع . ولقد تم رسم سطوح القص وسطوح حافة الثقب بخطوط غامقة (شكل 6-5) .



شكل 6-5

في الحساب تعوض مساحة القص للوصلات بالبراشيم بقطع واحد كما يلي :

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \qquad (6\ 6)$$

أما مساحة القص للوصلات بالبراشيم بقطعين فتعوض كالتالي :

$$F = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \qquad (6\text{-}7)$$

اذا احتوت الوصلة (الاتصال) بالبراشيم على n برشيماً عندئذ يفترض ان القوة P تتوزع على البراشيم بانتظام وبذلك تبلغ مساحة سطح القص من اجل الوصلة بقطع واحد ، القيمة التالية :

$$F = n \frac{\pi d^2}{4} \qquad (6.8)$$

ومن اجل الوصلة بقطعين فانها تبلغ :

$$F = n \cdot 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \qquad (6\text{-}9)$$

اما من أجل الكشف عن اجهادات خافة الثقب فان السطح:

$$n\ d\ .\ \min h$$

هو المقياس .

٦ ـ ٢ أمثلة

مثـال 68 :

يراد اجراء ثقب قطره $d = 2{,}0$ cm في صفيحة سماكتها $h = 0{,}5$ cm (شكل 6-6) .
المطلوب : تعيين قيمة القوة P التي ينبغي تطبيقها على المثقب وذلك عندما يبلغ

$$\tau_B = 4.0 \text{ Mp cm}^{-2}$$

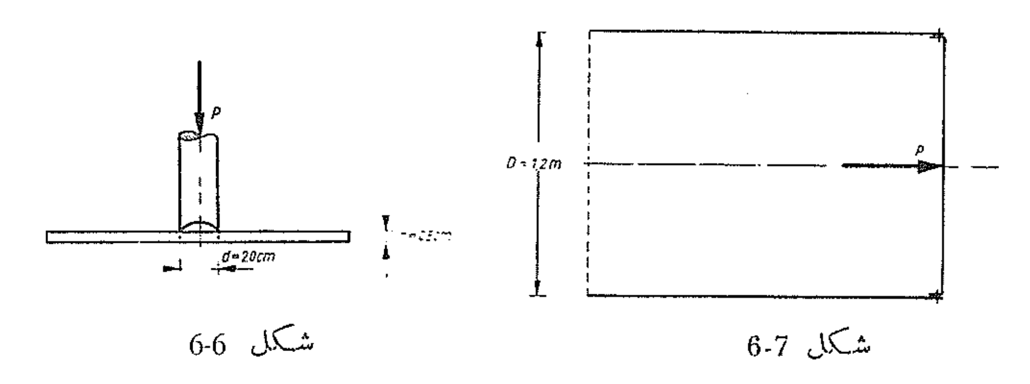
الحـل :

بالاستعانة بمساحة السطح الذي ينبغي قصه :

$$F = dh\pi = 2{,}0 \cdot 0{,}5 \cdot \pi = 3{,}14 \text{ cm}^2$$

وبواسطة اجهاد الكسر τ_B ، يتم تعيين القوة المطلوبة :

$$P \geqq F \cdot \tau_B = 3{,}14 \cdot 4{,}0 = 12\,57 \text{ Mp}$$



شكل 6-6

شكل 6-7

مثـال 69 :

يثبت قعر مرجل مبرشم قطره D=1,20 m بمئة برشيم (n=100) بقطع واحد (d=1,6 cm) .
يسيطر على المرجل ضغط اضافي مقداره $q=10{,}0 \text{ kp/cm}^2$ (شكل 6.7) .

المطلوب : حساب الاجهادات المماسية في البراشيم وحساب اجهاد حافـة الثقب الاعظمي وذلك عندما تكون اصغر سماكة للصفائح في المجموعة الموصولة h=1,0 cm .

الحـل :

تبلغ القوة المؤثرة على قعر المرجل القيمة التالية :

$$P = \frac{\pi D^2}{4} q = \pi \frac{120{,}0^2 \cdot 10{,}0}{4 \; 10^3} = 113{,}1 \text{ Mp}$$

اما مساحة السطح الذي سيتم فيه القص فتساوي :

$$F = n \frac{\pi d^2}{4} = 100 \; \pi \; \frac{1.6^2}{4} = 201{,}1 \text{ cm}^2$$

بواسطة العلاقة (6-1) يتم حساب الاجهاد المماسي :

$$\tau_0 = \frac{113{,}1}{201{,}1} = 0{,}562 \text{ Mp cm}^{-2}$$

بالاستعانة بالمعادلة التالية :

$n\ d\ min\ h = 100 \ . \ 1{,}6 \ . \ 1{,}0 = 160{,}0\ cm$

وباستخدام العلاقة (6-5) يتم تعيين اجهاد حافة الثقب :

$$\sigma_L = \frac{113{,}1}{160{,}0} = 0{,}707 \quad Mp\ cm^{-2}$$

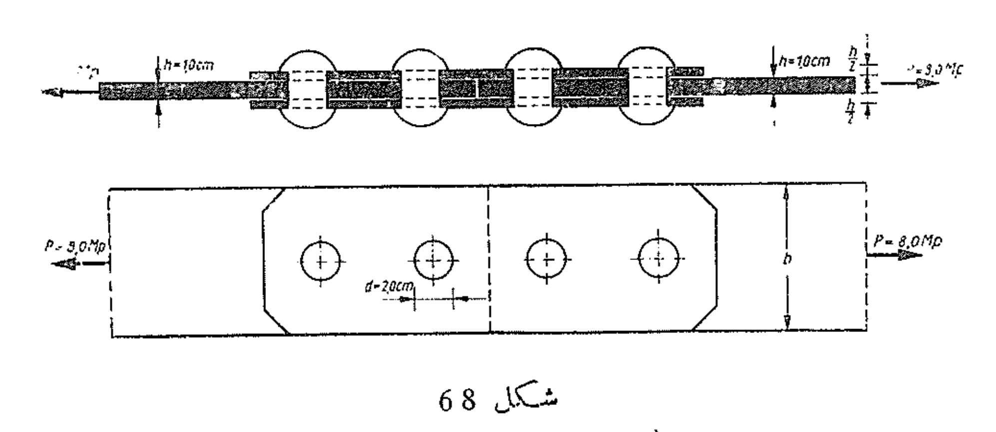
مثـال 70 :

يراد ربط صفيحتين رقيقتين من الفولاذ ، سماكة كل منهما h=1,0 cm بواسطة براشيم قطر كل منها d=2,0 cm (شكل 8-6) .

المعطى :

$$zul\ \sigma_L = 2{,}0\ Mp\ cm^{-2}\ ,\ zul\ \tau_0 = 1{,}4\ Mp\ cm^{-2},\ zul\ \sigma = 1{,}4\ Mp\ cm^{-2}$$

المطلوب : تعيين عرض الصفيحة الفولاذية الواجب اختياره وكذلك تعيين عـدد البراشيم اللازم وذلك عندما تكون القوة التي يلزم نقلها هي P=8,0 Mp .



شكل 68

الحـل :

بواسطة العلاقة (5.10) يتم تعيين مساحة المقطع العرضي للصفيحة الرقيقة المشدودة :

$$erf\ F \geqq \frac{8{,}0}{1{,}4} = 5{,}71\ cm^2$$

ومنها يتم التوصل للعرض الكلي للصفائح الفولاذية :

$$erf\ b \geqq \frac{5{,}71}{1{,}0} + 2{,}0 = 7{,}71\ cm$$

تبلغ مساحة القص للبراشيم ، التي يبلغ عددها n برشيماً بقطعين ، القيمة التالية :

$$F = n2 \frac{\pi d^2}{4} = n \pi \frac{2 . 2,0^2}{4} = n . 6,28 \text{ cm}^2$$

كما تبلغ المساحة الموجودة لسطح حافة الثقوب القيمة الآتية :

$$F = n d . \min h = n . 2,0 . 1,0 = n . 2,0 \text{ cm}^2$$

بالاستعانة بالقيم السابقة يتم من التصميم على القص الحصول على النتيجة التالية :

$$\text{erf } n \geqq \frac{8,0}{1,4 . 6,28} = 0,91$$

ومن التصميم من اجل حافة الثقب (Lochleibung) يتم الحصول على القيمة التالية :

$$\text{erf } n \geqq \frac{8,0}{2,0 . 2,0} = 2,0$$

بما ان عدد البراشيم الناتج عن اجهادات حافة الثقب هو الاكبر لذلك فهو المقياس وبذلك يلزم ترتيب برشيمين على كل طرف .

الفصل التاسع

الفتل الصافي

REINE TORSION

٧ـ١ مقدمة

يقال عن القضيب انه محمل على الفتل عندما يخضع لتأثير عزمين متعاكسين في الاتجاه ويقعان في مستويين متوازيين ويدوران حول محور القضيب (ينطبق شعاع كل منهما على المحور الاوسط للقضيب) .

إذا لم تؤثر على القضيب أية قوى او عزوم علاوة على العزمين المذكورين فتسمى هذه الحالة **بالفتل الصافي** (reine Torsion) (شكل 7.1) .

بقطع قضيب ، محمل على الفتل الصافي ، في أي مكان منه ، فان قيمة القطع الوحيدة الموجودة هناك هي عزم الفتل M_t فقط . فالفتل الصافي هو ذلك النوع من التحميل بحيث تظهر في المقاطع العرضية للقضيب عزوم فتل فقط اما بقية قيم القطع (عزوم الانعطاف ، القوى الناظمية والعرضية) فتساوي الصفر . وينتج عن حادثة الفتل اجهادات مماسية τ محصلتها في المقطع العرضي الواحد من القضيب تساوي عزم الفتل الذي يؤثر هناك (شكل 7.1) .

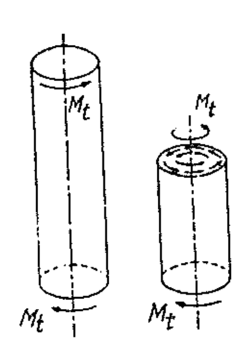
٧ ـ ٢ انواع الفتل :

يمكن تقسيم الفتل الى نوعين هما :

آ ـ **الفتل الاقسري** (فتل ده سانت فينانت) .

(zwangsfreie — oder ST. VENANT sche Torsion)

في هذه الحالة يتم تطبيق عزمي الفتل على نهايتي القضيب حيث لا يمنع ولا يعاق أي مقطع عرضي من القضيب من ممارسة التغير الناتج عن تأثير هذا النوع من التحميل ، وخاصة الانتقال الطولي الذي تقوم به محاور القضيب (والتي تسمى في بعض المراجع آلياف القضيب) الموازية للمحور الاوسط (يسمح إذاً للمقاطع العرضية في أية نقطة من القضيب من القيام بالتشوه) . اما توزيع الاجهاد المماسي τ في كافة المقاطع العرضية للقضيب فهو نفسه كما ان الاجهادات الناظمية في كافة المقاطع العرضية معدومة (المقاطع العرضية لا تحتوي اذاً الا على



شكل 7.1

اجهاد مماسي فقط) . ان التشوه الذي يطرأ على المقاطع العرضية لا علاقة له في هـذا النوع من الفتل بالاحداثي الطولي الذي ينطبق على المحور الاوسط للقضيب (المحور x).

ب ـ **الفتل القسري** (فتل قوة التشوه) (zwaengungs—oder Woelbkrafttorsion)

في هذا النوع من الفتل اما ان يتم تطبيق عزمي الفتل M_t على نهايتي القضيب ؛ تماما كالحالة السابقة ، باختلاف واحد وهو ان الانتقال الطولي الذي تقوم به محاور القضيب الموازية للمحور الاوسط سوف يعاق وذلك بواسطة اقراص صلبة توضع على كل من نهايتيالقضيب مثلا او سوف يمنع بواسطةتصميمات انشائية (يمنع التشوه على سبيل المثال بواسطة الوثاقة؛ فالمقطع العرضي الموثوق غير قادر على التشوه) او ان يتم تطبيق عزمي الفتل في أية مقاطـــع عرضية من القضيب لا تنطبق على نهايتيه (وهنا تتم اعـاقة تشوه المقاطع العرضية . تتم اعاقة تشوه المقاطع العرضية الواقعة عند نقاط تطبيق عزوم فتـل وحيدة وذلك لان الانفتالات (Verwindung) على طرفي نقطة تطبيق العزم الوحيد مختلفة ونتيجة لها فـان التشوهات هناك مختلفة ايضاً) . في حـالة الفتل القسري يختلف توزيع الاجهاد المماسي بين المقاطع العرضية للقضيب كما تتولد فيهـا (في المقاطع العرضية) اجهـادات ناظمية (اذاً يحتوي المقطع العرضي الواحـد في نفس الوقت على اجهاد ناظمي σ واجهاد مماسي τ) كما وان تشوه المقاطع العرضية هو تابع للاحداثي x ايضاً (الاحداثي الذي ينطبق على المحور الاوسط للقضيب) . تؤدي اعاقة او منعالتشوه في المقاطع العرضية الرقيقة (رقيقة الجدران) وخاصة في المقاطع العرضية رقيقة الجدران المفتوحة الىزيادة مقاومة المقطع العرضي للفتل زيادة كبيرة .

٧ ـ ٣ انواع المقاطع العرضية من وجهة نظر الفتل

تقسم المقاطع العرضية من وجهة نظر الفتل الى نوعين وهما :

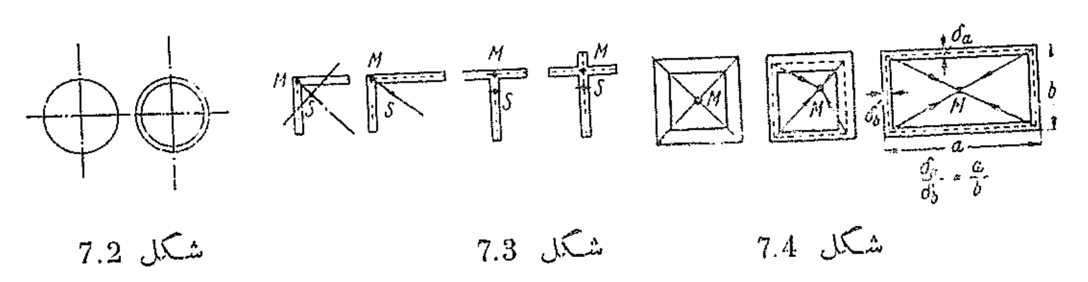
أ ـ المقاطع العرضية عديمة التشوه (Woelbfreie Querschnitte) :

وهي المقاطع العرضية التي تبقى بعد الفتل مستوية ،اي انها تدور ككل وكقرص صلب وهي تضم مجموعة المقاطع العرضية التالية :

آ ـ ١ الدائرة المليئة والحلقة الدائرية (شكل 7.2) .

آ ـ ٢ المقاطع العرضية المفتوحة ، التي تتألف (تتركب) من مستطيلين رقيقين والتي تتلاقى خطوطها الوسطية في نقطة واحدة (شكل 7 3) .

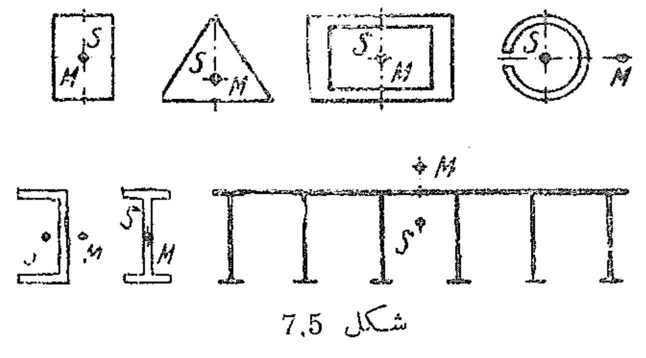
آ ـ ٣ المقاطع العرضية المفرغة رقيقة الجدران التي تتألف (تتركب) جوانبها من مستطيلات رقيقة وذلك عندما تتلاقى المحصلات ، الناتجة عن تمثيل عرض المستطيلات كقوى ، في نقطة واحدة (شكل 7.4) .



شكل 7.2 شكل 7.3 شكل 7.4

ب ـ المقاطع العرضية المتشوهة (Nicht Woelbfreie Querschnitte)

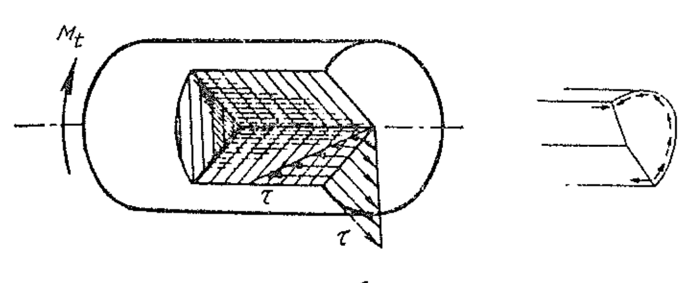
تضم هذه المجموعة كافة المقاطع العرضية التي لم يرد لها ذكر في الحالات السابقة (شكل 7.5)



شكل 7.5

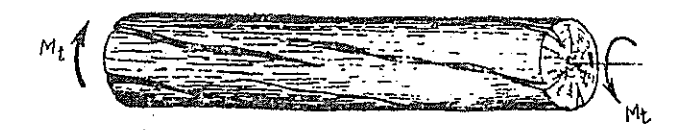
ستقصر الدراسة في هذا الكتاب على فتل القضبان الموشورية (هذا يعني القضبان المستقيمة التي لا يتغير مقطعها العرضي على طول القضيب اما شكل المقطع العرضي فيمكن ان يكون كيفياً كأن يكون مستطيلا او مربعاً او دائرة والخ) كما ستقتصر الدراسة على الفتل اللاقسري،حيث يسمح للمقاطع العرضية بالتشوه بحرية كاملة (فتل صافي). ينبغي ان تتألف الحمولة المؤثرة على

نهايتي القضيب من عزمين متعاكسين M_t فقط . بما ان السطح المغلف (Mantelflaeche) للقضيب هو بالفرض دائماً خال من الاجهادات وبسبب ازدواج الاجهادات المماسية (على سبيل المثال $\tau_{zx} = \tau_{xz}$) لذلك ينبغي ان تكون الاجهادات المماسية الموجودة على حافة المقطع العرضي (بالقرب من المحيط) مماسية على المنحني المغلف . من شرط الازدواج ينتج ايضا ان اجهادات مماثلة تظهر في المقاطع الطولية للقضيب (شكل 7.6) .



شكل 7.6

يكشف اختبار النماذج الخشبية على الفتل عن وجود هذه الاجهادات ، وهي تصبح خطرة عندما تكون متانة الانزلاق (مقاومة الانزلاق) للمادة بالاتجاه الطولي أضعف منها بالاتجاه العرضي كما هو الحال في الخشب وهي السبب هناك في حادثة الانكسار (للمقارنة انظر حالة الاجهاد المستوية وحالة التشوه المستوية) . فكما يعلم ان للخشب من ناحية المرونة والمتانة صفات متباينة باتجاه الالياف الخشبية او عمودياً عليها . كما انه ضعيف المتانة (المقاومة) على الانزلاق باتجاه الالياف الخشبية (على طول الالياف الخشبية) لهذا فان تحطم النموذج الخشبي في حالة فتله يبدأ بتشكل الشقوق الطولية (شكل 7.7)



شكل 7.7

تتطلب دراسة القضيب المحمل على الفتل حل المسألتين الاساسيتين التاليتين :

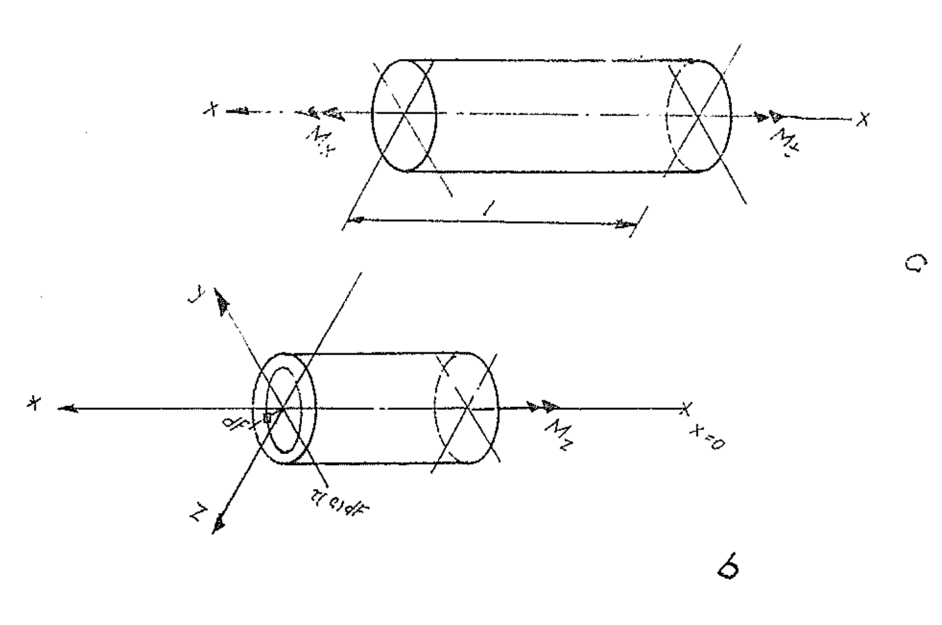
١ ـ تعيين الاجهادات التي تظهر في القضيب .

٢ ـ تعيين التغيرات الزاوية .

تحل هاتان المسألتان بصورة مختلفة وذلك حسبما يكون شكل المقطع العرضي . ان ابسط حل يكون في حالة المقطع العرضي الدائري والقضبان رقيقة الجدران .

٧ ـ ٤ فتل القضبان الاسطوانية الدائرية (Torsion kreiszylindrischer staebe)

ليكن المقطع العرضي للقضيب الموشوري المدروس هو دائرة او حلقـة دائرية . وليكن القضيب المذكور محملاً عند نهايتيه بعزمي الفتل M_x (شكل 7.8a) . يتألف التشوه (Deformation) في امثال هذا القضيب من دوران المقاطع العرضية . x=const أما إنتقال محور القضيب فهـو معدوم (اي ان المقاطع العرضية تدور وكأنها قرص صلب) . ان الهدف من الدراسة التالية هو تعيين الاجهادات ودورانات المقاطع العرضية المتشكلة نتيجة تأثير عزوم الفتل M_x . للقيام بدراسه سلوك القضبان في الفتل سوف يفصل القضيب عند النقطة x الى جزئين (شكل 7.8 b). يعدل اضطراب التوازن الناتج عن القطع عندما تكون محصـلة الاجهادات الموجودة في المقطـع العرضي معدومة وعندما يشكل العزم المحصل الناتج عنهـا مع عزم الفتل M_x حالة التوازن (يتساوى العزم المحصل للاجهادات المماسية مع عزم الفتل عند نقطة القطع) .

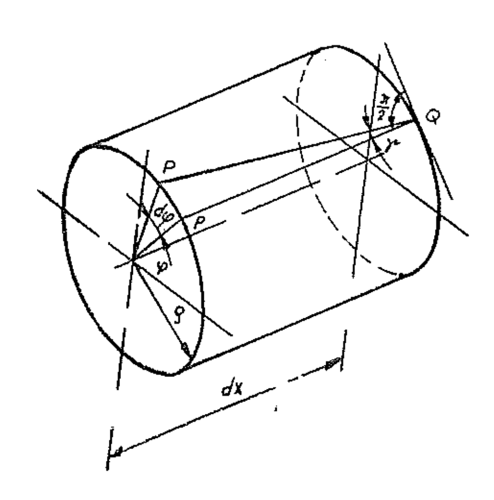


شكل 7.8 a   شكل 7.8 b

سوف يفترض بأن كل مقطع عرضي .x=const ، يحتوي فقط على اجهـادات مماسية τ (فتل صافي) . تتعلق هذه الاجهادات فقـط من البعد ρ للعنصر السطحي dF عن محـور القضيب وعلاوة على ذلك فهي تتجه مماسية على الدائرة .ρ=const . لانعدام الاجهادات الناظمية فان شروط توازن القوى بالاتجاهات x , y , z وكذلك شروط توازن العزوم بالنسبة للمحور (حول المحور) y , z هي محققة من البداية . اما شرط توازن العزوم بالنسبة للمحور x فهو :

$$M_x - \int_F \rho \, \tau(\rho) \, dF = 0 \qquad (7\text{-}1)$$

لاتكفي شروط التوازن المذكورة وحدها لتعيين توزيع الاجهاد المماسي $\tau = \tau(\rho)$ بشكل معين (eindeutig) ولذلك فان هذه المشكلة هي مشكلة غير مقررة ستاتيكياً . للتمكن من حلها ينبغي ، كما في حالة الشد / الضغط ، اللجوء للخبرة . تؤكد التجارب بان المقطع العرضي الدائري والحلقي الدائري يبقى اثناء تحميل القضيب المستقيم على الفتل مستويا (اي انه يدور كقطعة واحدة وكأنه قرصاً صلباً) . بذلك فان كل النقاط التي كانت قبل التغير موجودة على المستقيم $\varphi = const$ ، تتواجد ، في حالة التغير على المستقيم $\varphi + d\varphi = const$ وان النقطة P من الدائرة $\rho = const$ تتحول الى النقطة P′ في نفس الدائرة (شكل 7.10) . يتحول المحور QP الموجود على عنصر قضيبي مقتطع طولياً من القضيب ، بعد التغير الى QP′ .



شكل 7-10

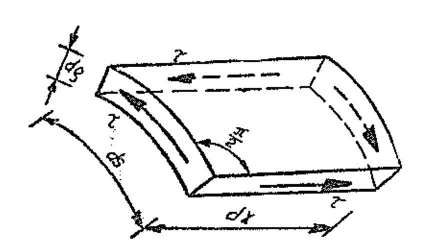
تدور المقاطع العرضية التي تبعد عن بعضها مسافة dx نسبياً بالزاوية $d\varphi$.

لقد كان أول من استعمل فرضية بقاء المقاطع العرضية ، في الاسطوانات الدائرية المحملة على الفتل ، مستوية بعد الفتل هو العالم كولومب (COULOMB) . ولقد حذا العالم نافيير (NAVIER) حذوه بتطبيق هذه الفرضية على قضبان ذات مقاطععرضية كيفية . لكن التجارب والابحاث التي تمت فيما بعد أثبتت عدم صحة ذلك وأكدت ان فرضية كولومب (التي تسمى في كثير من المراجع بفرضية نافيير) لاتصلح إلا من أجل المقاطع العرضية الدائرية والحلقية الدائرية (المقاطع العرضية عديمة التشوه) فقط . لهذا السبب تعتبر مشاكل الفتل في القضبان ذات المقطع العرضي الدائري والحلقي الدائري هي ابسط دراسات الفتل . فيما بعد سوف تتم معالجة ذلك وبحثه بالتفصيل .

تؤثر ، حسب الفرض ، على السطوح الجانبية للعنصر القشري غير المتغير قائم الزوايا ، ذو

الابعاد dx , ds , $d\rho$ الاجهادات المماسية τ (شكل 7.11) . تقوم هذه الاجهادات بتشويه العنصر ، بحيث تعاني الزاوية القائمة تغيراً زاويا مقداره γ ولصغر التغيرات يمكن الكتابة :

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$$



شكل 7-11

من الشكل (7-10) يستطاع ، بعد الاستعانة بالعلاقة السابقة ، قراءة العلاقة التالية :

$$\overline{PP'} = \rho \, d\varphi = \gamma \, dx$$

التي تمثل طول القوس $\overline{PP'}$. من العلاقة السابقة يمكن التوصل للعلاقة التالية :

$$\gamma = \rho \, \frac{d\varphi}{dx} \qquad (7\text{-}2)$$

حيث ان γ هي التشوه (Verzerrung) (زاوية الانزلاق أو زاوية القص) وان $d\varphi$ هي زاوية الفتل (Torsionswinkel) . كما يمكن من العلاقة السابقه التوصل للعلاقة التالية :

$$d\varphi = \gamma \, \frac{dx}{\rho} \qquad (7\text{-}3)$$

يسمى الاختصار

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} \qquad (7\text{-}4)$$

بالانفتال النوعي او زاوية الفتل النسبية

(Spezifische Verdrehung, bezogener Drillwinkel)

يعطي قانون هوك للاجهادات المماسية :

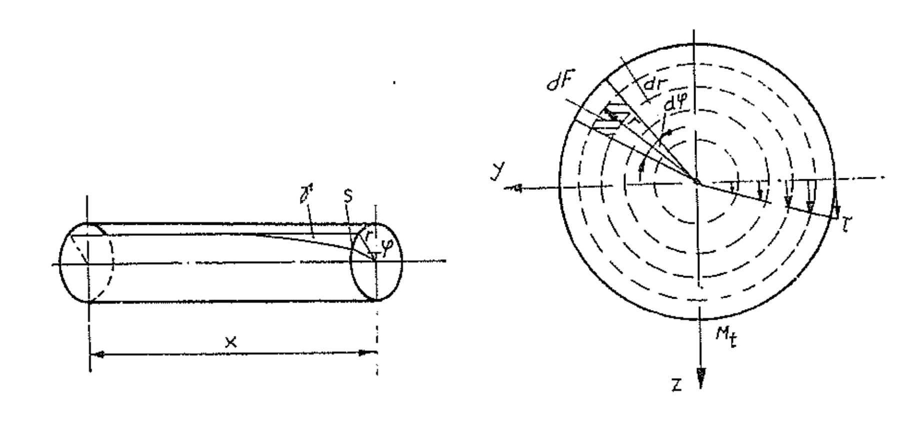
$$\tau = G \cdot \gamma \qquad (7\text{-}5)$$

العلاقة التي تربط بين زاوية الانزلاق γ وبين الاجهاد المماسي τ . حيث ان G هو عامل القص او عامل الانزلاق (Gleit—oder Schubmodul) .

بالاستعانة بالعلاقات (7.2) , (7.4) , (7.5) يتم الحصول على الاجهاد المماسي :

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dx} = \vartheta \ G \rho \qquad (7\text{-}6)$$

بما ان حاصل القسمة التفاضلي dφ/dx من اجل اي مقطع عرضي x=const ، هو ثابت لذلك فان الاجهادات المماسية تتعلق (تتبع) من ρ خطياً (تتوزع الاجهادات المماسية على طول نصف القطر r خطياً) كما ان خطوط الاجهادات المماسية (Schubspannungslinien) (الخطوط التي تعطي في كل نقطة من المقطع العرضي اتجاه الاجهاد المماسي الموجود هناك) هي عبارة عـــن دوائر مركزية (شكل 7.12) .



شكل 7.12

بتبديل العلاقة (7.6) في شرط التوازن (7.1) يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$M_x = \int_F \rho \ \tau(\rho) \, dF = G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 \, dF = G \vartheta \int_F \rho^2 dF \qquad (7\text{-}7)$$

اما التكامل السطحي الذي يظهر في العلاقة السابقة فيمثل عزم العطالة القطبي بالنسبـة المحور المركزي (المحور المار من مركز الثقل) :

$$I_p = \int_F \rho^2 dF$$

وهو يبلغ من اجل الدائرة :

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

ومن اجل الحلقة الدائريه :

$$I_p = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2}$$

وبذلك يمكن الحصول من العلاقة (7.7) على عزم الفتل :

$$M_x = G I_p \frac{d\varphi}{dx} = G\ I_p\ \vartheta \qquad (7\text{-}8)$$

او ايضاً على الانفتال (Verwindung) :

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{G I_p} \qquad (7\text{-}9)$$

حيث ان $G\,I_p$ هي صلابة الفتل (Torsionssteifigkeit). ينبغي التنويه الى ان صلابة الفتل بشكل عام هي $G\,I_t$ حيث ان I_t هو عزم عطالة الفتل والذي يساوي في المقاطع العرضيـة الدائرية والحلقية الدائرية فقط لعزم العطالة القطبي . وعلى العموم فان :

$$I_t \leqq I_p \qquad (7\text{-}10)$$

أما عزم عطالة الفتل لمقطع عرضي فلا يمكن حسابه بالوسائل الاولية بل يتم الحصول عليه بحل المعادلة التفاضلية لتابع الاجهاد التي سيتم التنـوية عنهـــا اثناء دراسة فتل القضبان ذات المقطـع العرضي الكيفي .

بمكاملة العلاقة (7.9) يتم تعيين زاوية الانفتال (Verdrehungswinkel) :

$$\varphi(x) = \frac{M_x}{G I_p}\, x + c \qquad (7\text{-}10b)$$

كتابع للاحداثي x . فيما بعد سوف يتم تعيين ثابت التكامل c .

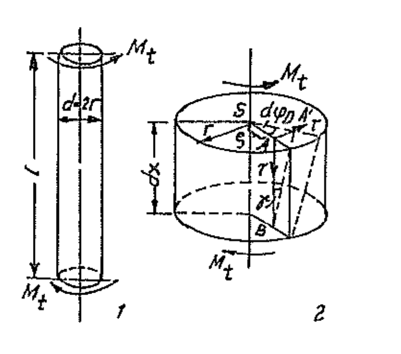
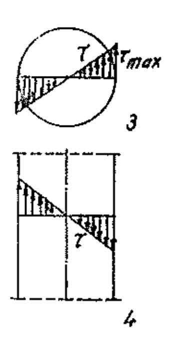
من اجل التوزيع الخطي للاجهاد المماسي الممثل في العلاقـة (7-6) ، الذي كان العالم يونـــغ (YOUNG) هو اول من برهن عليه ، يتم الحصول ، بعداعتبار العلاقة (7.9) على ما يلي :

$$\tau(\rho) = \frac{M_x}{I_p}\, \rho \qquad (7\text{-}11)$$

(حيث ان $\tau(\rho)$ هو الاجهاد المماسي الموجود على بعد ρ عن محور الدوران) .

يبلغ الاجهاد المماسي قيمته العظمى عند الحافة الخارجية للمقطع العرضي ρ=R (شكل 7.12 c) .
فهـو يساوي في الدائرة ، بعد تبديل عزم العطالة القطبي بقيمته ، القيمة التالية :

$$\max \tau = \frac{M_x}{\frac{\pi R^4}{2}} R = \frac{M_x}{\frac{\pi R^3}{2}} \qquad (7\text{-}12)$$

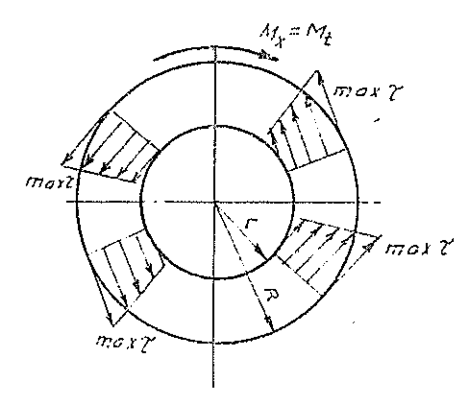



شكل 7.12 c

وفي الحلقة الدائرية فانه يأخذ ، بعد تبديل عزم العطالة بقيمته ، القيمة التالية :

$$\max \tau = \frac{M_x}{\frac{\pi (R^4 - r^4)}{2}} R = \frac{M_x}{\frac{\pi (R^4 - r^4)}{2R}} \qquad (7.13)$$

يوضح الشكل (7.13) توزيع الاجهاد المماسي في حلقة دائرية .



شكل 7.13

يتم الكشف عن الاجهاد (Spannungsnachweis) في الحلقة الدائرية بواسطة العلاقة الآتية :

$$\frac{M_x}{\frac{\pi (R^4 - r^4)}{2R}} \leqq \text{zul } \tau \qquad (7\text{-}14)$$

وفي الدائرة ، حيث $r=0$ ، فهو يتم حسب العلاقة التالية :

$$\frac{M_x}{\frac{\pi R^3}{2}} \leqq \text{zul } \tau \qquad (7.15)$$

إذا كان عزم الفتل M_x والاجهاد المسموح $\text{zul } \tau$ معلومين ، عندئذ يستطاع حساب الابعاد اللازمة للمقطع العرضي . فمن أجل مقطع عرضي دائري يتم التوصل لعلاقة التصميم التالية :

$$\text{erf } R \geqq \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \quad \frac{M_x}{\text{zul } \tau}} \qquad (7.16)$$

أما إذا كان المقطع العرضي والاجهاد المسموح معلومين عندئذ يستطاع تعيين عزم الفتل المسموح $\text{zul } M_x$. فمن أجل الحلقة الدائرية ينتج :

$$\text{zul } M_x \leqq \frac{\pi (R^4 - r^4)}{2 R} \text{ zul } \tau \qquad (7.17)$$

ومن اجل المقطع العرضي الدائري يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\text{zul } M_x \leqq \frac{\pi R^3}{2} \text{ zul } \tau$$

بهذه العلاقات يتم تعيين قدرة تحمل (قابلية تحمل Tragfaehigkeit) القضبان الاسطوانية الدائرية المحملة على الفتل .

من العلاقة (7-10b) ومن اجل قضيب يدور مقطعة العرضي الواقع عند البداية $x=a$ (Anfangsquerschnitt) بالزاوية $\varphi(a)$ (شكل 7.14) يتم تعيين الثابت c :

$$\varphi(a) = \frac{M_x}{GI_p} a + c$$

ومنها ينتج :

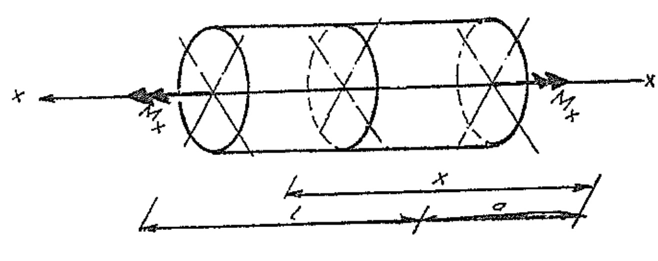
$$c = \varphi(a) - \frac{M_x}{GI_p} a$$

وبهذا يتم تعيين الدوران التبادل (gegenseitige Verdrehung) للمقاطع العرضية عند x, a:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \frac{M_x}{G I_p} (x - a) \qquad (7\text{-}17b)$$

حسب هذه العلاقة فان المقاطع العرضية لنهايتي القضيب الذي يبلغ طوله l تقوم بالدوران المتبادل:

$$\varphi(l+a)-\varphi(a)=\Delta\varphi=\frac{M_x l}{G\ I_p} \qquad (7\text{-}17c)$$

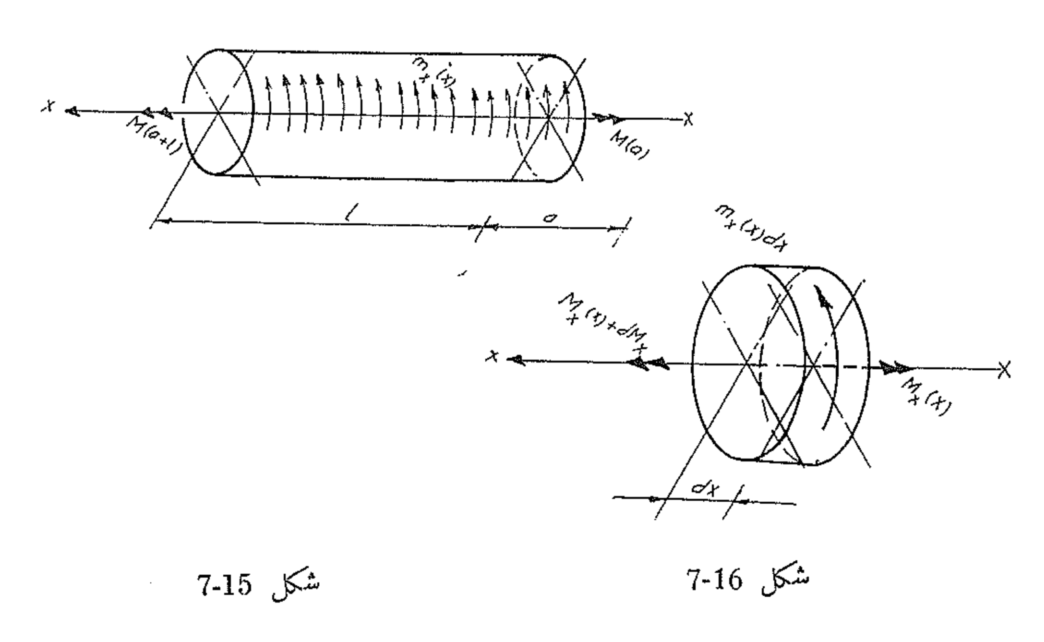


شكل 7.14

اذا أثر على طول القضيب عزم الفتل $M_x(x)$ المنسوب على واحدة الطول (عزم الفتل الموزع) والذي يتغير بتغير x بشكل طفيف (شكل 7.15) عندئذ تتشكل في العنصر المقتطع من القضيب والذي يبلغ طوله dx وهو صغير قدر الامكان ، عزوم الفتل $M_x(x)$, $M_x(x+dx)\approx M_x(x)+dM_x(x)$ التي تحقق مع العزم الخارجي $m_x(x)\,dx$ حالة التوازن ، بحيث ينتج :

$$M_x(x)+d\,M_x(x)-M_x(x)+m_x(x)\,dx=0$$

من هذه العلاقة يتم التوصل المعادلة التفاضلية :



شكل 7-15

شكل 7-16

$$\frac{dM_x(x)}{dx} = - m_x (x) \qquad (7\text{-}18)$$

وبالمكاملة ينتج :

$$M_x(x) = - \int m_x (x) \, dx + k \qquad (7\text{-}19)$$

في الحالة المقررة ستاتيكياً يستطاع ، بواسطة شروط الاطراف العائدة لعزم الفتل M_x ، تعيين ثابت التكامل k بشكل معين .

بواسطة عزم الفتل M_x (x) الذي اصبح من الآن فصاعد معلوماً يتم تعيين الاجهاد المماسي تبعاً للعلاقة (7-11) وذلك بواسطة العلاقة التالية :

$$\tau (x , \rho) = \frac{M_x(x)}{I_p} \rho \qquad (7\text{-}20)$$

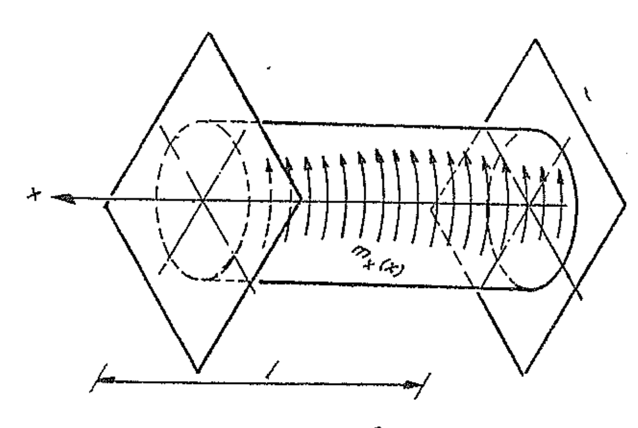
والدورانات تبعاً للعلاقة (7-9) من خلال المعادلة الآتية :

$$\varphi(x) = \int \frac{M_x(x)}{G I_p} dx + c \qquad (7\text{-}21)$$

وذلك بشكل تقريبي .

لتعيين الدورانات φ(x) في حالة الاستناد غير المقررستاتيكياً للقضيب (شكل 7-17) سوف يلجأ لاشتقاق العلاقة (7-9) وبذلك يتم الحصول ، في حالة كون M_x متغيراً على ما يلي :

$$\frac{d^2\varphi (x)}{dx^2} = \frac{1}{GI_p} \frac{dM_x (x)}{d x}$$



شكل 7-17

وبتبديل العلاقة (7-18) فيها يتم التوصل للمعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{m_x(x)}{G I_p} \qquad (7\text{-}22)$$

بالمكاملة المتكررة ينتج :

$$G I_p \frac{d\varphi(x)}{dx} = -\int m_x(x)\,dx + c_1$$

$$G I_p\, \varphi(x) = -\int dx \int m_x(x)\,dx + c_1 x + c_2 \qquad (7\text{-}23)$$

من شروط الوثاقة :

$$\varphi(x=0) = 0 \quad ; \quad \varphi(x=l) = 0$$

يستطاع تعيين ثابتي التكامل c_1 , c_2 . وبهذا يتم تعيـــين الدوران $\varphi(x)$ وكذلك أيضاً عزم الفتل :

$$M_x(x) = G I_p \frac{d\varphi(x)}{dx} \qquad (7\text{-}24)$$

بشكل معين .

مثـال 71 :

تؤثر على النهاية الحرة لقضيب اسطواني دائري الشكل وموثوق من طرف واحد ، عـبر قرص قطره a ، مزدوجة قوى (شكل 7.18) .

المطلوب : تعيين الاجهاد المماسي الاعظمي $\max \tau$ ودوران القرص $\Delta\varphi$.

الحـل :

يبلغ عزم الفتل الثابت القيمة التالية :

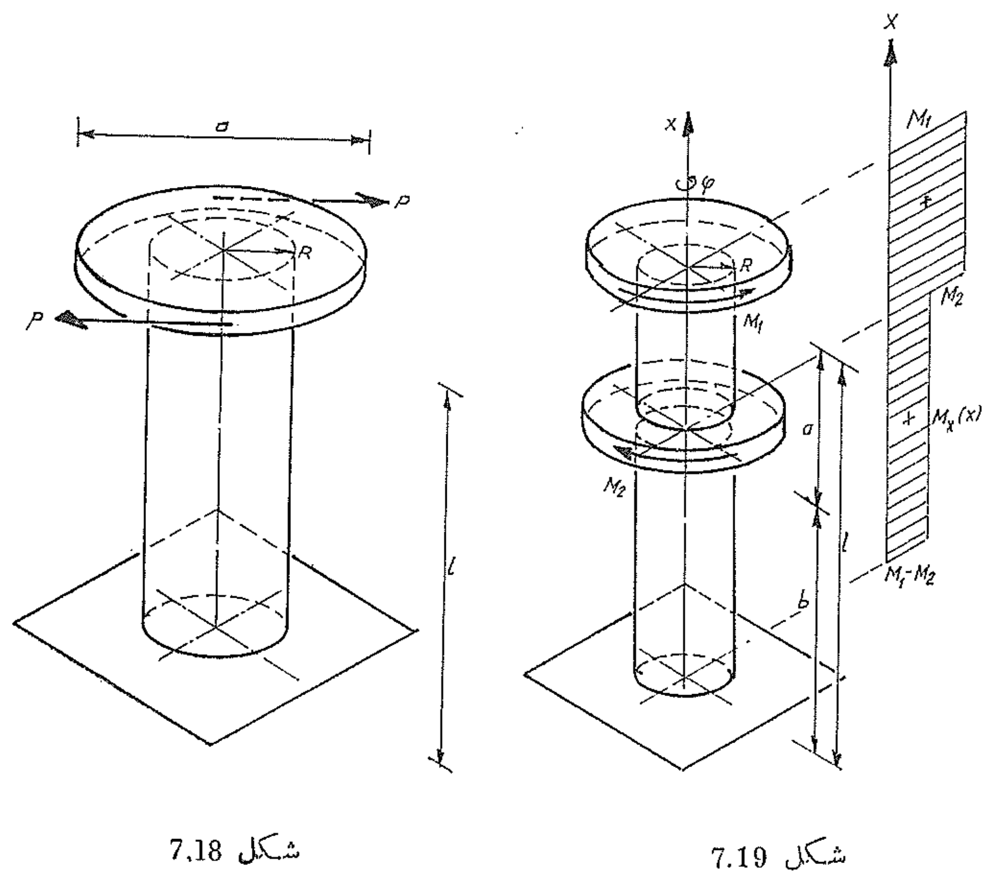
$$M_x = Pa$$

بتعويض $r=0$ يتم من العلاقة (7-12) تعيين الاجهاد المماسي الاعظمي :

$$\max \tau = \frac{M_x}{\frac{\pi R^3}{2}} = \frac{2a}{\pi R^3} P$$

ومن العلاقة (7.17c) يتم تعيين دوران القرص :

$$\Delta\varphi = \frac{M_x\, l}{G\, I_p} = \frac{2\, a\, l}{G\, \pi\, R^4}\, P$$



شكل 7,18

شكل 7.19

مثال 72 :

حمل قضيب اسطواني دائري الشكل وموثوق من طرف واحد ، حسب الشكل (7.39) ، بعزمين M_1 و M_2 .

المطلوب : حساب الاجهادات الماسية الاعظمية في القطوع الجزئية a و b من القضيب وكذلك دورانات الاقراص .

الحـــل :

لقد تم في الشكل (7.19) تمثيل توزيع عزوم الفتل . بذلك يأخذ الاجهاد الماسي الاعظمي عند المقطع a القيمة التالية :

$$\max \tau = \frac{2 M_1}{\pi R^3}$$

وعند القطع b :

$$\max \tau = \frac{2 (M_1 - M_2)}{\pi R^3}$$

أما زوايا الدوران (زوايا الانفتال Drehwinkel) فتبلغ :

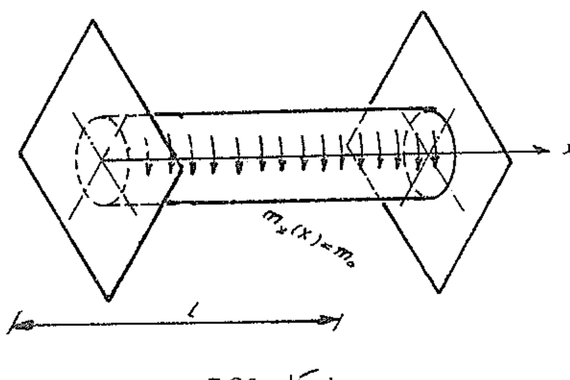
$$\varphi (l) = \frac{(M_1 - M_2) b}{G \frac{\pi R^4}{2}} + \frac{M_1 a}{G \frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2}{G \pi R^4} (M_1 l - M_2 b)$$

$$\varphi (b) = \frac{(M_1 - M_2) b}{G \frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2 b}{G \pi R^4} (M_1 - M_2)$$

مثـــال 73 :

حمل المحور الاسطواني الدائري الشكل والموثوق من كلا طرفيه ، على طوله البالغ l بعزم فتل ثابت $m_x (x) = m_0$ (شكل 7.20) .

المطلوب : حساب الدوران (الانفتال) $\varphi (x)$ وعزم الفتل $M_x(x)$.



شكل 7.20

الحـــل :

بمكاملة العلاقة التالية :

$$\frac{d^2 \varphi (x)}{dx^2} = - \frac{m_0}{G I_p}$$

ينتج :

$$GI_p \frac{d\varphi(x)}{dx} = - m_0 x + c_1 = M_x(x)$$

$$GI_p \varphi(x) = - \frac{m_0 x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

بواسطة شروط الاطراف :

$$G I_p \varphi(o) = 0 = c_2$$

$$G I_p \varphi(l) = 0 = - \frac{m_0 l^2}{2} + c_1 l + c_2$$

يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$c_1 = \frac{m_0 l}{2} \text{ ، } c_2 = 0$$

بحيث يتم ، بعد تبديلها في العلاقات السابقة ، الحصول على الدوران المطلوب :

$$\varphi(x) = \frac{m_0 l^2}{2GI_p} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

و

$$M_x(x) = \frac{m_0 l}{2} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)$$

تبلغ عزوم الوثاقة القيم التالية :

$$M_x(o) = \frac{m_0 l}{2} \text{ . } M_x(l) = - \frac{m_0 l}{2}$$

يتشكل الدوران الاعظمي :

$$\max \varphi = \frac{m_0 l}{8 \, GI_p}$$

في منتصف القضيب .

٧ ـ ٥ فتل القضبان ذات المقطع العرضي القطع ناقصي (على شكل قطع ناقص)

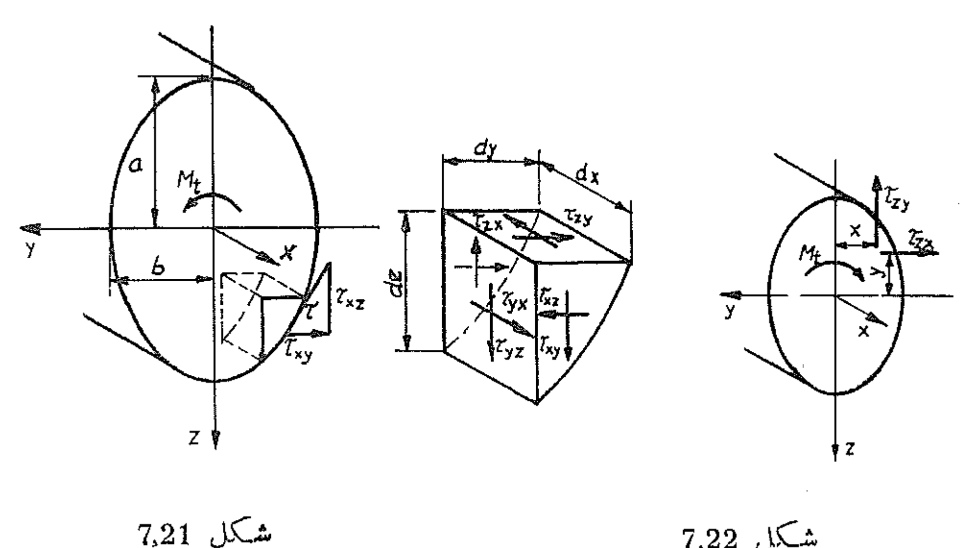
(Torsion elliptischer Querschnitte)

لقد لوحظ في الدائرة أن خطوط الاجهادات المماسية هي عبارة عن دوائر . ان محصلة الاجهاد

المماسي في أية نقطة من حافة القطع الناقص (محيط القطع الناقص) تأخذ اتجاه منحني الحافة (أي انها مماسية على منحني الحافة) . ان الافتراض الذي يقول ان خطوط الاجهاد المماسي ليست فقط على الحافة بل كذلك داخل المقطع العرضي هي عبارة عن قطوع ناقصة متمركزة (konvokale Ellipsen) هو الاقرب للواقع .

سيبتدأ بتحقيق الاجهادات المماسية المرسومة في الشكل (7.2) لشرط توازن القوى باتجاه المحور x . تظهر في العنصر المقتطع من حافة القضيب ، اجهادات على سطوح القطوع فقط ، اما السطح المغلف فهو خال من الاجهادات ، وبذلك ينتج :

$$\Sigma K_x = 0 : \tau_{yx}\ dx\ dz - \tau_{zx}\ dx\ dy = 0$$



شكل 7,21

شكل 7.22

او كذلك

$$\frac{\tau_{zx}}{\tau_{yx}} = \frac{dz}{dx} \qquad (7.25)$$

ان شرط توازن القوى على الحافة (على المحيط المغلف) هو في نفس الوقت شرط النهاية (شرط من شروط الاطراف) . تشير المعادلة (7.25) الى العلاقة الموجودة بين نسبة الاجهادات المماسية وبين زاوية التماس على القطع الناقص . بذلك ينبغي ان تكون محصلة الاجهاد المماسي مماسية على الحافة (اي ان تمس محصلة الاجهاد المماسي حافة المقطع العرضي) . من معادلة القطع الناقص :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \qquad (7.26)$$

يتم الحصول على زاوية التماس :

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{z} \qquad (7.27)$$

بتبديل المعادلة (7.27) في شرط الطرف (7.22) ينتج :

$$\frac{\tau_{zx}}{\tau_{yx}} = - \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{z} \qquad (7\text{-}28)$$

وبذلك يستطاع ، بالاعتماد على الفرض الذي يقول ان خطوط الاجهاد المماسي هي قطوع ناقصة متمركزة ، كتابة ما يلي :

$$\tau_{zx} = Ca^2 y \; ; \; \tau_{yx} = - Cb^2 z \qquad (7.29)$$

بالاستعانة بشرط توازن العزوم بالنسبة للمحور x (بالنسبة لمركز ثقل المقطع العرضي) يمكن تعيين الثابت C (شكل 7.22) :

$$M_x = \iint_F (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) \, dx \, dy \qquad (7.30)$$

بتعويض الاجهادات المماسية ، حسب العلاقة (7.29) في المعادلة (7.30) ينتج :

$$M_x = C \iint_F (a^2 y^2 + b^2 z^2) \, dF$$

وبالاستعانة بالتكاملات التالية :

$$I_{zz} = \int_F y^2 \, dF = \frac{\pi \, ab^3}{4} \quad , \quad I_{yy} = \int z^2 \, dF = \frac{\pi \, a^3 b}{4}$$

التي تمثل عزوم عطالة القطع الناقص فان العلاقات السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$M_x = C (a^2 I_{zz} + b^2 I_{yy}) \qquad (7\text{-}31)$$

$$M_x = Ca^3 b^3 \frac{\pi}{2} \qquad (7\text{-}32)$$

منهـا ينتج :

$$C = \frac{2\,M_x}{\pi\, a^3\, b^3} \tag{7.33}$$

وبذلك يتم من أجل الاجهادات المماسية ، الحصول على العلاقات التالية :

$$\tau_{zx} = \frac{2\,M_x}{\pi\, b^3\, a}\, y \quad , \quad \tau_{yx} = \frac{2\,M_x}{\pi\, b\, a^3}\, z \tag{7-34}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{2\,M_x}{\pi\, a^3\, b^3} \sqrt{b^4\, z^2 + a^4\, y^2}$$

تماما كما في الدائرة فان الاجهادات الاعظمية تظهر هنا ايضاً على حافة القطع الناقص . يتوقع ان تظهر الاجهادات المماسية الاعظمية اما على اعرض حافة او على اضيق حافة من المقطع العرضي. للتأكد من ذلك سوف يصار لحساب الاجهادات المماسية هناك :

$$\tau\,(y = 0\ ,\ z = a) = \frac{2\,M_x}{\pi\, b\, a^2} = \tau_1$$

$$\tau\,(y = b\ ,\ z = o) = \frac{2\,M_x}{\pi\, b^2\, a} = \tau_2 \tag{7.35}$$

بما ان $a>b$ لذلك فان $\tau_2 > \tau_1$ وهذا يعني ان :

$$\max \tau = \tau_2 = \frac{2\,M_x}{\pi\, b^2\, a} \tag{7.36}$$

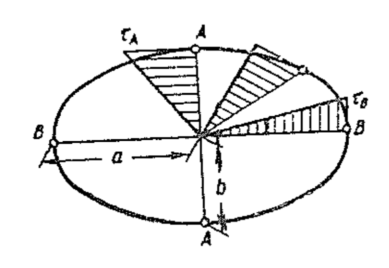
وبذلك فان الاجهاد المماسي الاعظمي يظهر في المكان $(y=b\ ,\ z=0)$ اي في اضيق منطقة من المقطع العرضي (شكل 7-23). في الفقرات التالية سوف يصار لشرح هذه الحقيقية الهامة . بمقارنة العمل الخارجي (عمل القوى الخارجية) مع العمل الداخلي (عمل القوى الداخلية) الذي يقوم به العزم M_x عند تطبيقه على القضيب ببطىء ؛ يتم تعيين زاوية الدوران (زاوية الانفتال) φ .

عمل القوى الخارجية (شكل 7.24):

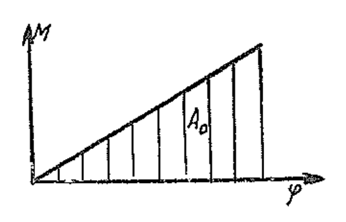
$$A_a = \frac{1}{2}\, M_x \cdot \varphi \tag{7.37}$$

عمل تغير الشكل النوعي (النسبي) الذي يقوم به التحميل على القص :

$$A_\tau = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G} \tag{7.38}$$



شكل 7.23



شكل 7-24

بتكاملة العلاقة السابقة على حجم القضيب يتم تعيين عمل تغير الشكل (Formaenderungsarbeit)

$$A_i = \int_F \frac{\tau^2}{2G}\, dV \tag{7.39}$$

بتبديل العلاقة (7.34) في المعادلة الاخيرة ينتج :

$$A_i = \frac{1}{2G}\,\frac{4M_x^2}{\pi^2 a^6 b^6}\int_F (b^4 z^2 + a^4 y^2)\, dF$$

$$= \frac{1}{2G}\,\frac{4M_x^2}{\pi^2 a^6 b^6}(b^4 I_{yy} + a^4 I_{zz}) \tag{7-40}$$

لتساوي عمل القوى الخارجية (العمل الخارجي) وعمل القوى الداخلية (العمل الداخـلي ، طاقة تغير الشكل) $A_i = A_a$ وبالاستعانة بالعلاقتـين (7.40) و (7.32) يتم الحصول على زاوية الدوران النوعية (زاوية الانفتال النوعية) ϑ :

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l} = \frac{a^2+b^2}{\pi a^3 b^3}\,\frac{M_x}{G} \tag{7-41}$$

بمقارنة هذه النتيجة مع التعريف :

$$\vartheta = \frac{M_x}{G\, I_t}$$

يتم تعيين عزم عطالة الفتل :

$$I_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

وبالمناسبة فان عزم العطالة القطبي للقطع الناقص هو :

$$I_p = \frac{\pi}{4} a b (a^2 + b^2)$$

بمقارنة العزمين يرى ان عزم العطالة القطبي اكبر من عزم عطالة الفتل . لقد تم الحصـول على هذه النتيجة بعد الافتراض ان خطوط الاجهاد المماسي هي عبارة عن قطوع ناقصة متمركزة ، وهي تساوي نفس النتيجة التي يمكن الحصول عليها من نظرية سانت فينانت الـــتي سوف يتم التنويه عنها في الفقرة التالية . وهذا يؤكد صحة الفرضيات التي تم استخدامها .

٧ ـ ٦ فتل القضبان ذات المقطع العرضي الكيفي

(Torsion von staeben mit beliebigem Querschnitt)

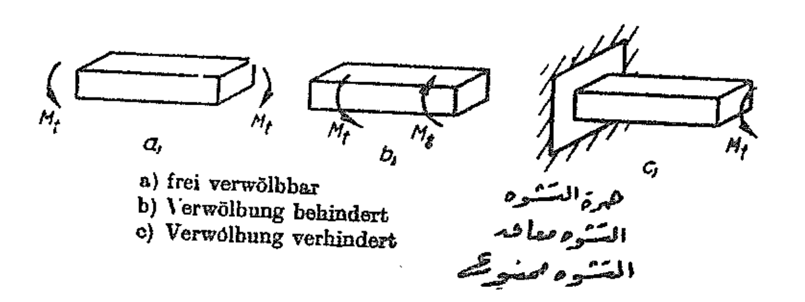
٧ ـ ٦ ـ ١ فتل سانت فينانت (سان فينان) (الفتل اللاقسري)

(SAINT VENANT sche oder Zwangsfrei Torsion)

لقد كانت اول نظرية عامة للفتل هي التي اوجدها العالم نافيير (NAVIER) والتي اعتمـد فيها على فرضية بقاء المقاطع العرضية مستوية ، التي إستعملت لحل مشكلة فتل القضبـان ذات المقطع العرضي الدائري . لكن هذه النظرية لم تقف على قدميها طويلاً وذلك لانهـا تشـير الى تناقض مع الحياة العملية والتجارب الخبرية . فبينما تشير تجـارب الفتل إلى ان الانكسار يظهر فعلا في أضيق منطقة من المقطع العرضي فان نظرية نافيير تحتم ان تكون النقطة التي لها اكبر بعد عن مركز الثقل هي المكان الذي تظهر فيه الاجهادات المماسية الاعظميـة . فعلى سبيـل المثال تشير التجارب الجراة على المقطع العرضي مستطيل الشـكل الى ان الانكسار يظهر مبتـدأ من منتصف الاضلاع وخاصة من نقاط السطح المغلف (محيط المقطع العرضي) التي لها اقرب بعد عن محور القضيب . اما نتائج نظرية نافيير فتشير الى ان الاجهادات المماسية الاعظميـــة تظهر ، عكس ذلك ، في النقاط التي لها اكبر بعد عن محور القضيب ، اي ان الانكسـار حسب ذلك ينبغي ان يبتدأ من زوايا المستطيل وهذا غير صحيح .

لقد اكتشف العالم سانت فينانت الذي تتلمذ على يد إستاذه نافيير ان السبب في هـذا التناقض

يعود لاستخدام فرضية بقاء المقــاطع العرضية ، ايضاً غير الدائرية والحلقية الدائرية ، مستوية بعد التغير وهذا غــير صحيــح . ولقد قام الاخــير (سانت فينانت) بعد اكتشافـــه للسبب بتأسيس نظريـــة فتل القضبان ذات المقطع العرضي الكيفي حيـث افترض فيهــا ان التشوه (Verwölbung) يتم بحرية كاملة (دون قسر، اي انه فتل لاقسري) (شكل 7,25) .



شكل 25-7

a) حرة التشوه (frei verwoelbbar) .

b) التشوه معاق (Verwoelbung behindert) .

c) التشوه ممنوع (Verwoelbung verhindert) .

وفيما يلي سوف يتم بشكل مختصر شرح هذه النظرية .

بسبب فرضية تشكل التشوه بحرية كاملة (فتل لاقسري) فان الاجهادات المتشكلــة في المقطع العرضي تقتصر على الاجهادات الماسية فقط (لاتظهر اجهادات ناظمية) . باستخــدام تــابع الفتل (Torsionsfunktion) $\Phi=\Phi(y,z)$ يتم التوصل من شروط التوازن ومن معـــادلات التشوه (Deformationsgleichungen) ومن قانون هوك للمادة للمعادلة التالية :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi = 1 \tag{7-42}$$

حيث ان

$$\tau_{yx} = -2\,G\,\vartheta\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad , \quad \tau_{zx} = +2\,G\,\vartheta\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{7-43}$$

تمثل العلاقة (7,42) معادلة بواسون التفاضلية (POISSONsche Differentialgleichung) . تعطي حقيقة كون الاجهادات الماسية على حافة المقطع العرضي ذات اتجاه مماسي على الحــافـة شرط الطرف التالي :

$$\Phi_c = \text{const.} \tag{7.44}$$

هذا يعني ان تابع الفتل Φ على حافة المقطع العرضي هو ثابت . يعاد حل مشكلة الفتـل الى ايجاد الفتل Φ الذي يحقق داخل المقطع العرضي معادلة بواسون التفاضلية ومن ثم يحقق شرط كونه على الحافة ثابتاً .

٧ ـ ٦ ـ ٢ مطابقة الاغشية ومطابقة الجريان في السوائل

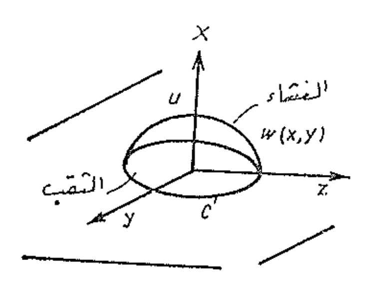
(Membrangleichnis und hydrostatisches Gleichnis)

لقد لاحظ العلماء ان هناك تطابق رياضي كامل بين نظارية سانت فينانت (سان فينان) للقضبان المفتولة (القضبان المحملة على الفتل) وبين حالتين أخريتين من حالات الميكانيك أولهما الشكل الذي يأخذه الغشاء المرن والمحمل تحميلا منتظماً والذي يحتجز تحته الفراغ الناتـج عن تغطيـته لمنحني مستوي مغلق وثانيهما الجريان في السوائل .

مطابقة الاغشية (Membrangleichnis) أو **مطابقة فقاعة الصابون** (Seifenhautgleichnis) :
يحقق الغشاء المشدود (المنصوب ، الممدود ، الذي يغطي) على الفتحـة ذات المنحني C (على سبيل المثال فقاعة الصابون التي تغطي الفتحة المذكورة) المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{p}{S} = \text{const.} \tag{7.45}$$

حيث أن (y,z) u هو ترتيب سطح الغشاء و p هـو الضغط الاضافي الذي يؤثر على الغشاء و S هي قوة الوثق الثابتة (die konstante Spannkraft) (شكل 7.26).



شكل 7.26

ان المعادلة (7-45) هي معادلة بواسون التفاضلية . يحقق التابع u (y,z) شرط الطرف التالي:

$$u\ (y\ ,\ z) = C \qquad (7.46)$$

بالاستعانة بما يلي :

$$u \ \widehat{=}\ -\ \frac{p}{S}\,\Phi \qquad (7.47)$$

يتم التطابق بين مشكلة الفتل (7.42) و (7.44) وبين معـادلة الاغشية (2-45) و (7.46) وذلك عندما يتطابق منحني حافة الغشاء C مع منحني حافة القطع العرضي المحمل على الفتلC . عندئذ يتم الحصول من اجل الاجهادات المماسية على العلاقات التالية :

$$\tau_{yx} = \frac{2\,G\,\vartheta\,S}{p}\ \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \quad \tau_{zx} = \frac{2\,G\,\vartheta\,S}{p}\ \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (7.48)$$

من هذه العلاقات يرى ان الاجهادات المماسية تتناسب مع ميل قبة الغشاء (Membranhügel) أما صلابة الفتل (Torsionssteifigkeit) فتبلغ القيمة التالية :

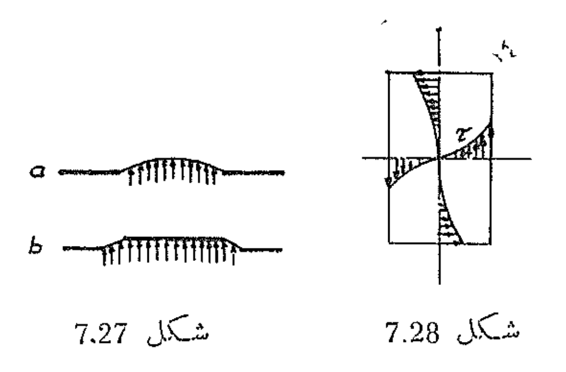
$$G\,I_t = \frac{4\,G\,S}{p}\,V \qquad (7.49)$$

حيث أن V هو الحجم المحتجز داخل القبة الغشائيـة .

عملياً يصنع في صفيحة مستوية ثقب له نفس شكل المقطـع العرضي المفتول ثم يغطى هـذا الثقب بغشاء رقيق ومرن ، على سبيل المثال بفقاعة من الصابون (شكل 7.27) بعد ذلك يشـــكل على احدى جهتي الصفيحة ضغطاً بسيطاً بحيث ينتفخ الغشـــاء أخذاً شـكل قبـة مسطحة (flache Membranhügel) .

بعد القيام بتلك العمليات يلاحظ ان خطوط طبقات الارتفاع (Höhenschichtlinien) للقبـــة الغشائيه تتطابق مع خطوط الاجهادات المماسية . كما يتطابق الميل على القبـة (ميل القبة) ، اي كثافة خطوط طبقات الارتفاع ، في مكان ما مع قيمة الاجهاد المماسي هناك . وأخيراً فان الحجم المحجوز بين القبة الغشائية وبين مستوي المقطع العرضي يتناسب مع مقاومة المقطع العرضي للفتل I_t . تسمح هذه المطابقة أيضاً بايجاد توزيع الاجهاد المماسي تجريبياً . وهي تعـود للعالم براندل (PRANDTEL) .

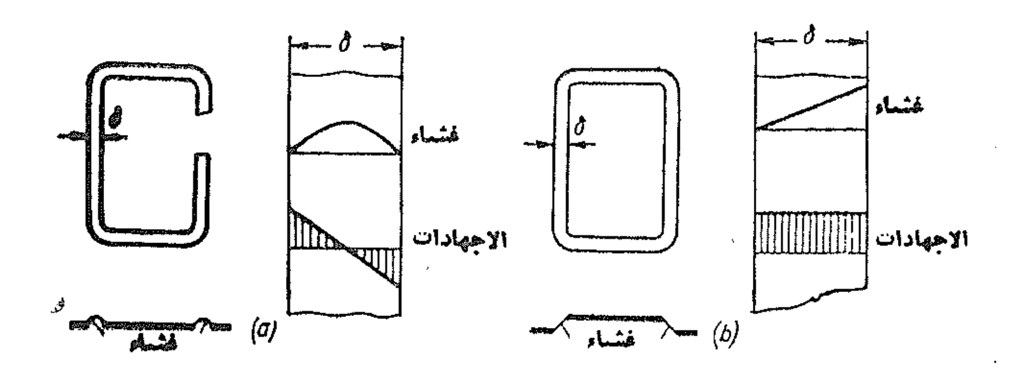
من ناحية أخرى تستعمل كلا المطابقتين للحصول على بعض نقاط الارتكاز بشأن توزيع الاجهاد المماسي بصورة سريعة . وبذلك يتم دون صعوبه الحصول على المعلومات اللازمة عن شكل توزيع



شكل 7.27 شكل 7.28

الاجهادات المماسية في المقاطع العرضية . فعلى سبيل المثـال ينبغي ان يكون توزيـع الاجهـاد المماسي في المستطيل كما هو ممثل في الشكل (7.28) .

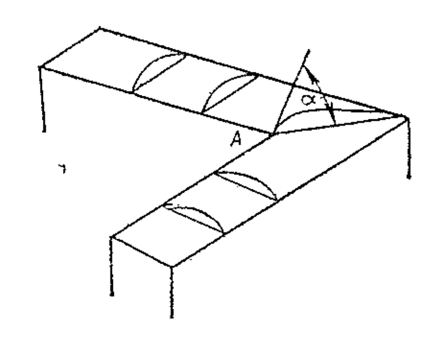
من اجل المقاطع العرضية المفرغة (Hohlquerschnitte) كما هو الحـــال في الانابيب والمقاطع العرضية الصندوقية ينبغي تعديل مطابقة الاغشية قليلاً وذلك بأن يجعل الجزء الذي يمثل الثقب في الصفيحة اعلى بقليل من الحافة الخارجية للمقطع العرضي (شكل 7.27 b) . يتبـين في المقاطع العرضية المفتوحة ان الميل الاعظمي للقبة الغشائية يتشكل عنـــد حافتي المقطع العرضي الداخلية والخارجية (شكل 7.29 a) . يغير ميل القبة الغشائية اتجاهه (وبالاحرى اشارته) عند منتصف سماكة الجدار . وبدرجة متناهية في الدقة يمكن الافتراض ان توزيـع الاجهـاد المماسي على سماكة الجدار هو خطي (وبمعنى آخر ان تغير ميل المماس على القبـة هو خطي) (شكل 7.29 a) .

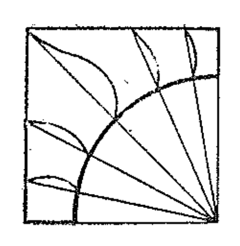


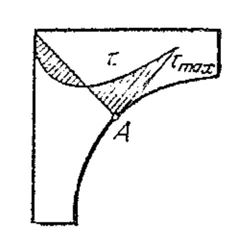
شكل 7.29

اما في المقاطع العرضية المغلقة فان ميل القبة (ميل المماس على القبة الغشائيـــة) على سماكة الجدار لايغير اتجاهه (الميل ثابت) وهذا يعني ان توزيع الاجهاد المماسي على سماكة الجـدار

ثانياً (شكل 7.29 b). تشير الاشكال (7.30a,b,c) الى شكل الغشاء والى توزيع الاجهاد المماسي لبعض المقاطع العرضية .







شكل 7.30

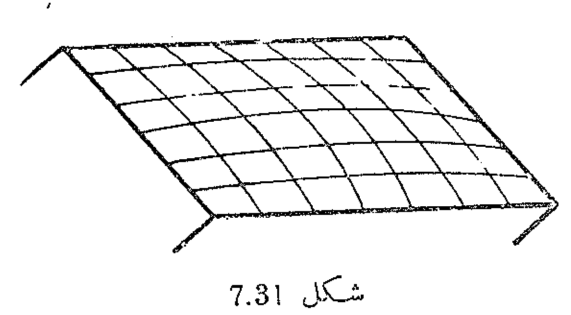
مطابقة الجريان في السوائل (Hydrodynamische Gleichnis) :

للتطابق الموجود بين مشكلة الفتل وبين جريان السوائل ايضاً فلقــــد تم تأسيس مايسمى بمطابقة جريان السوائل . تشير هذه المطابقـــة الى ان خطـوط الاجهادات المماسيـــة (Schubspannungslinien) تتطابق مع خطوط الجريان (Stromlinien) في الســوائل المستقرة (الموضعية) (stationaeren Flüssigkeitsstroemung) ذات الكمية الثابتة التي تدور في اناء له شكل المقطع العرضي للقضيب المفتول .

لتعيين مكان تشكل الاجهادات المماسية الاعظمية يستطاع اللجوء لاحدى المطابقتـين المذكورتين ويتم ايضاح ذلك بكل سهولة :

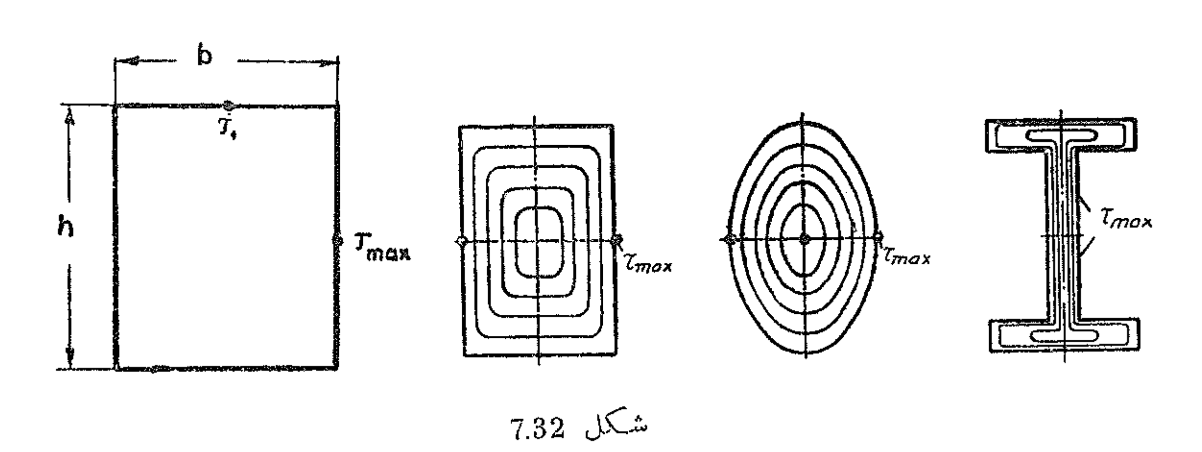
ان الحافة الموجودة في أضيق مكان من المقطع العرضي هي مكان الاجهادات المماسية الاعظمية .

فحسب مطابقة الاغشية ينبغي ان يكون ميل قبة الغشاء (ميل المماس على القبة الغشائيـــة) عند ضلع المستطيل الضيق (عرض المستطيل) اكبر من الميل عند الضلع العريض (طول المستطيل) (شكل 7.31) .



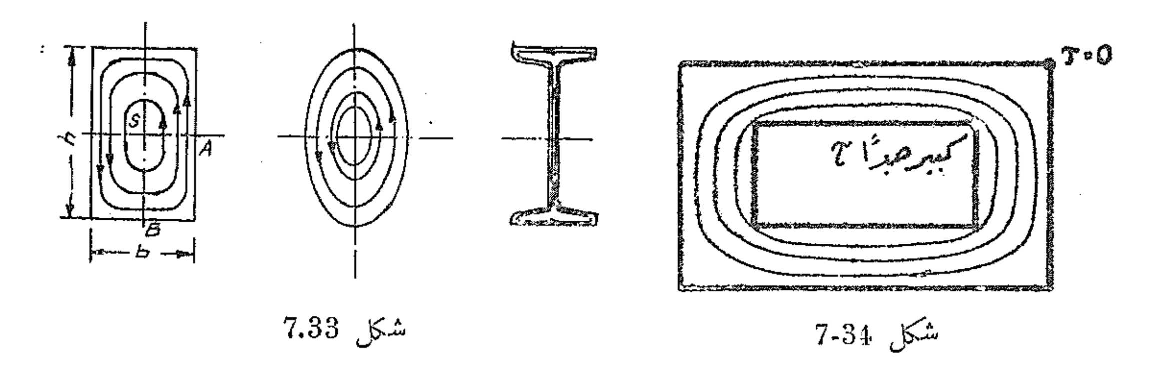
شكل 7.31

وحسب مطابقة جريان السوائل (المطابقة الحركية للسوائل) فان سرعـة الجريان (سرعـة السائل) عند الاضلاع الطولية اكبر منها عند الاضلاع العرضيـة وذلك لان المقطـع العرضي الذي يجري فيـه السائل عنـد الاضلاع الطولية اصغر من المقطع العرضي عنـد الاضلاع العرضية (7 32) .



شكل 7.32

فسرعة السائل الكبيـرة يقابلها اجهـاد مماسي كبير . يظهر الشكل (7.32) مواضـع الاجهـادات المماسية الاعظميـة . تقابل الخطوط المرسومة فيه خطوط الارتفـاع للغشـاء (مطابقة الاغشية) او كذلك خطوط الجريان للسوائل (مطابقة الجريان) وهي تتناسب مـع خطوط الاجهاد المماسي . فكلما كان البعد بين هذه الخطوط صغيراً كلما كان الاجهـاد المماسي كبيراً . عملياً يسمح لسائل عديم الاحتكاك وغير قابل للانضغاط (inkompressible) وذو دوامة ثابتة (konstanten Wirbel) بالدوران في أثناء اسطواني له نفس شكل المقطـع العرضي للقضيب المحمل على الفتل . عندئذ يلاحظ ، بشكل جلي ، التطابق بين خطوط الجريان وبين خـطوط الاجهادات المماسية في المقطع العرضي للقضيب المفتول كما يلاحظ أيضاً ان سرعة الجريان في مكان ما تتناسب مع الاجهادات المماسية في نفس المكان من المقطع العرضي للقضيب المفتـول . يشير الشكل (7.33) الى خطوط الاجهادات المماسية في مقاطع عرضية مختلفة مستعاناً بمطابقة الجريان. بما ان الجريان (Stroemung) مستقر (موضعي) (stationaer) لذلك يجب ان تكون صورة الجـريـان العامـة (stroemungsbild) غـير متغـيرة زمنيـاً . وبما أن السائل هو عديم الانضغاط لذلك ينبغي أن يكون تدفق السائل (كمية السائـل أو حجم السائل في واحدة الزمن) في أي مقطع عرضي من مقاطع جريان السائل ثابتاً (غير متغير). من ذلك ينتج ، على سبيل المثال في المستطيل ، ان سرعة الجريان الوسطية في المقطـع الاصغر SA هي أكبر منها في المقطع الاكبر SB . ونتيجـة لذلك ينبغي أن تكون الاجهادات المماسيـة



شكل 7.33

شكل 7-34

الفعلية على طول ضلع المستطيل الطويل اكبر منها على طول ضلع المستطيل القصير . وبنفس الفكرة يتم ايضاح صورة الاجهادات المماسية في المقطع العرضي القطع ناقصي (على شكل قطع ناقص) (شكل 7.33) .

تشير هذه المطابقة أيضاً الى ان الاجهادات المماسية في الزوايا البارزة (على سبيل المثال زوايا المستطيل) تساوي الصفر وفي الزوايا الداخلة لانهائية (عملياً كبيرة جداً ولكنها تقتصر على مجال صغير) (شكل 34-7) لذلك ينبغي على المصمم تدوير امثال هذه الزوايا بشكل جيد .

٧ ـ ٧ ـ فتل القضبان ذات المقطع العرضي مستطيل الشكل

تحسب الاجهادات المماسية بصورة عملية في القضبان ذات المقطع العرضي مستطيل الشكل في حالة التحميل على الفتل بواسطة العلاقات التقريبية التي سيتم ذكرها فيما يلي :

ليكن b هو أقصر بعد في المستطيل (عرض المستطيل) وليكن d هو اطول بعد في المستطيل (طول المستطيل) بذلك فان الاجهاد الماسي الاعظمي $\max\tau$ يظهر ، كما قد تم ذكره سابقاً ، في منتصف اطول بعد للمستطيل وتعطى قيمتة ، اذا كان M_t هو عزم الفتل في المقطع العرضي بواسطة العلاقة التالية :

$$\tau_A = \max\tau = \frac{M_t}{\alpha b^2 d} = \frac{M_t}{W_t} \qquad (7\text{-}50)$$

حيث أن α هو عامل يتعلق بنسبة الضلعين d/b وقيمته موجودة في الجدول (7.1). لحساب زاوية الدوران النوعية (زاوية الفتل النوعية) تستخدم العلاقة التالية :

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_t}{G\beta b^3 d} = \frac{M_t}{GI_t} \qquad (7\text{-}51)$$

حيث أن G هو عامل القص (Schubmodul) و β هو أيضا عامل يتعلق بنسبة الضلعين d/b وقيمته موجودة في الجدول (7-1) .

من العلاقتين (7-50) و (7-51) يرى ان عزم مقاومة الفتل W_t وعزم عطالة الفتل I_t في المستطيل هما كالتالي :

$$W_t = \alpha\, b^2 d \qquad I_t = \beta\, b^3 d \qquad (7\text{-}52)$$

جدول 7.1

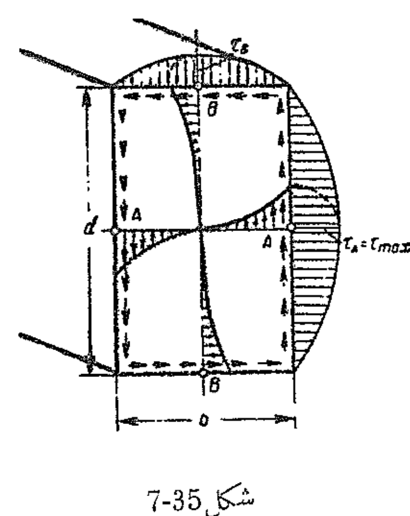
d/b	1	I,5	I,75	2	2,5	3	4	6	8	I0	∞
α	0,208	0,23I	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,3I3	0,333
β	0,I4I	0,I96	0,2I4	0,229	0,249	0,263	0,28I	0,299	0,307	0,3I3	0,333
η	I,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

حيث ان b هو عرض المستطيل و d هو طول المستطيل . اما الاجهاد المماسي في منتصف الضلع الاصغر (في منتصف عرض المستطيل) فيتم حسابه بواسطة العلاقة التالية :

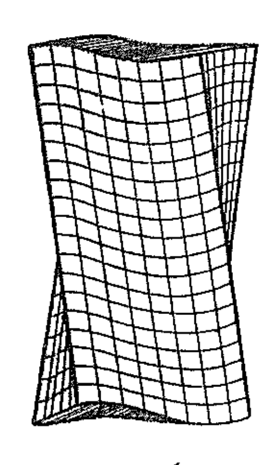
$$\tau_B = \eta \max \tau = \eta\, \tau_A \qquad (7\text{-}53)$$

لقد تم في الشكل (7-35) تمثيل توزيع الاجهادات المماسية في المستطيل .

يمثل الشكل (7-36) قضيباً موشوريا مقطعه العرضي مستطيل الشكل ويحمل على الفتل وفيه يظهر بوضوح عدم بقاء المقطع العرضي مستويا ، كما يشير للتغيرات الناتجة عن الفتل .



شكل 7-35

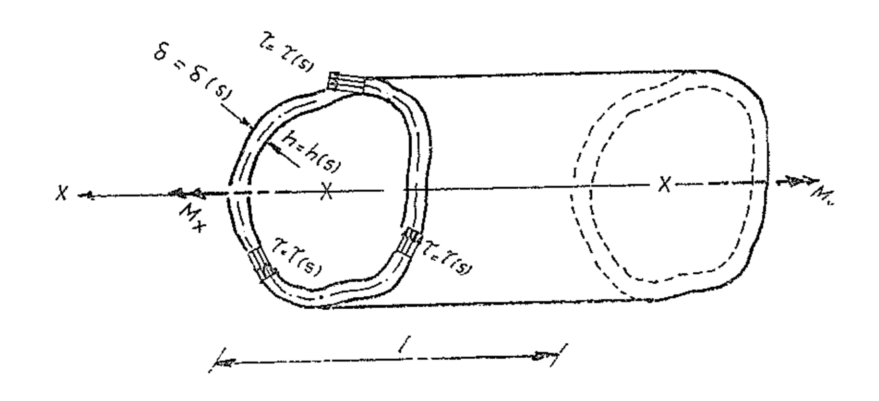


شكل 7.36

٧ ـ ٨ فتل القضبان رقيقة الجدران ذات المقاطع العرضية المغلقة

(Torsion dünnwandiger Stäbe mit geschloβcnem Querschnitt)

فيما يلي سوف تتم دراسة القضبان المحملة على الفتل ذات المقاطع العرضية المفرغـة المغلقة رقيقـة الجدران . سوف يرمز لقوس من الخط الاوسط للمقطع العرضي الذي يبتدأ بنقطـة ثابتـــة ، بالحرف s (وهو الاحداثي المنحني الذي ينطبق على الخط الاوسط للمقطع العرضـي) . لتكن سماكة جدار المقطع العرضي δ (s) صغيرة وتتغير بالنسبة للاحداثي المنحني s بشـكل طفيـف (خفيف) (شـكل 7-37) ولتكن نهايتي القضيب المدروس حرتين ، وبذلك فليس له شروط هندسية . ليفترض أن الاجهادات الماسية τ المتشكلة في المقاطع العرضية تتوزع على سماكـة الجدار δ (s) بانتظام وانها توازي الخط الاوسط (مماسية على الخط الاوسط) . يزداد تحقيق هذا الفرض كلما إزداد جدار المقطع العرضي رقة .



شكل 7-37

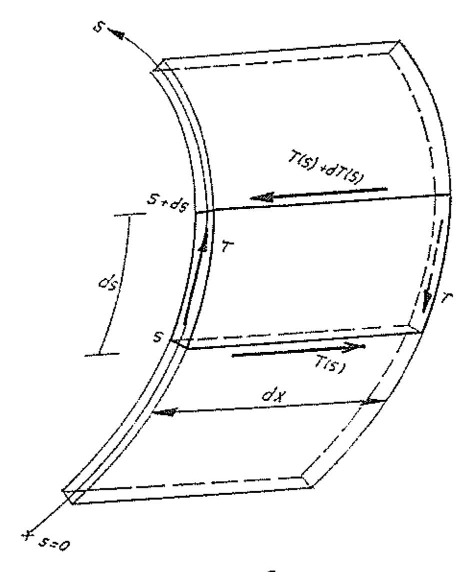
للتوصل إلى توزيع الاجهاد الماسي بالاتجاه s سوف تتم دراسة عنصر قضيبي أبعاده هي ds , dx (شكل 7.38) .

تبلغ قيمة القوى الخطية التي تعتبر محصلات للاجهادات الماسية والتي تؤثر على سطوح القطوع s+ds=const , s=const مايلي :

$$T(s) = \tau(s)\ \delta(s)$$

و

$$T(s+ds) = T(s) + dT(s) = \tau(s)\ \delta(s) + d(\tau(s)\ \delta(s))$$



شكل 7.38

يعطي تطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه x ، العلاقة التالية :

$$-T(s) + T(s) + dT(s) = 0$$

ومنها يتم التوصل للعلاقة التفاضلية الآتية :

$$dT(s) = 0 \qquad (7\text{-}54)$$

وبمكاملتها يتم التوصل لما يلي :

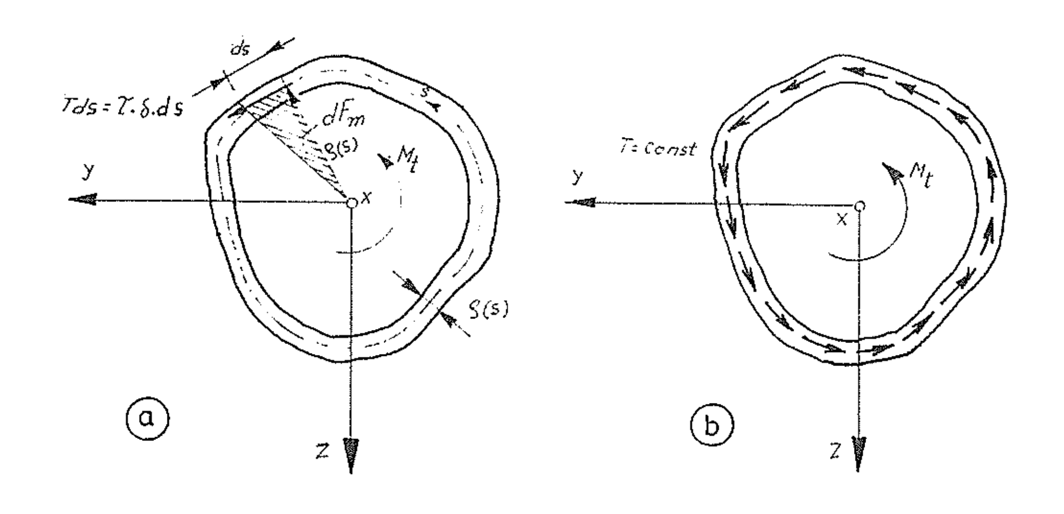
$$T = \tau(s)\,\delta(s) = \text{const.} \qquad (7\text{-}55)$$

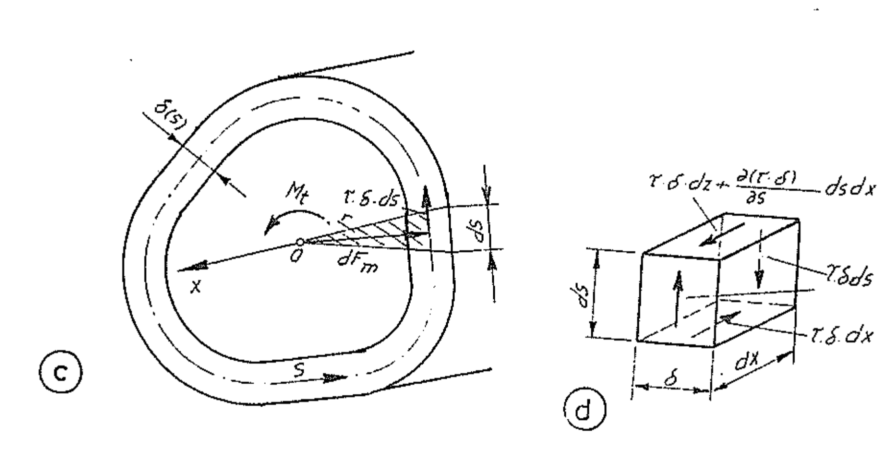
تسمى القوة الخطية :

$$T = \tau(s)\,\delta(s)$$

التي هي محصلة للاجهادات المماسية على سماكة الجدار $\delta(s)$ **بسيالة القص** (Schubfluβ) وهي حسب العلاقة (7.55) مستقلة عن الاحداثي s (شكل 7.39 a) . بواسطة العلاقات (7.38) و (7.39) يتحقق شرطي توازن القوى بالاتجاهين z , y بشكل دائم (حسب الشكل 7.37) .

يعطي تطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة للمحور x (المحور الطولي) (شكل 7.39 b) العلاقة التالية :





شكل 7.39

$$M_x = (\int_s) \, T \, \rho \, (s) \, ds$$

بالاستعانة بمساحة العنصر السطحي :

$$dF = \frac{\rho \, ds}{2}$$

العائدة للسطح F_m المحدد بواسطة الخط الاوسط للمقطع العرضي فان علاقة العزم M_x تأخذ الشكل التالي :

$$M_x = 2\,T \int_{F_m} dF = 2\,T\,F_m \qquad (7.56)$$

منها يتم الحصول ، من اجل سيالة القص ، على العلاقة التالية :

$$T = \frac{M_x}{2 F_m}$$

التي تسمى **بعلاقة بردت الاولى** (1. BREDTsche Formel) . ومن اجل توزيع الاجهادالماسي على طول الخط الاوسط يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\tau(s) = \frac{T}{\delta(s)} = \frac{M_x}{2F_m\,\delta(s)} \qquad (7\cdot57)$$

حيث ان F_m هي المساحة التي تغلقها سيالة القص داخلها (أو كذلك المساحة التي يغلقها الخط الاوسط للمقطع العرضي) والتي رسمت في الشكل (7.39 c,d) مهشرة .

و δ هي سماكة الجدار في النقطة التي يطالب حساب الاجهاد الماسي فيها .

تظهر الاجهادات الماسية الاعظمية ، حسب هـذه العلاقـة ، في المواضع الضيقـة من المقطـع العرضي . فاذا كانت δ ثابتة في المقطع العرضي الواحد فان τ تكون ايضاً ثابتة .

تظهر اثناء فتل القضبان رقيقة الجدران ذات المقطع العرضي المفرغ ، كما تشير التجارب ، علاوة على الدوران الصلب $\varphi(x)$ الذي تقوم به المقاطع العرضية عند النقاط x=const ،الانتقالات V_1 باتجاه المحور الأوسط للقضيب ، لذلك فان المقاطع العرضيـة لا تبقى مستوية وإنمـا تتشوه (verwoelbt) . من اجل حالة الفتل الصافي ، المدروس في هذا الفصل ، فان الانتقالات (على عكس فتل قوة التشوه (Woelbkraftorsion) هي توابع للمتغير s ، أي :

$$V_1 = V_1(s)$$

إذاً فهي ليست متغيرة على طول المحور الاوسط للقضيب . للتمكن من حساب الدوران المتبادل (gegenseitige Verdrehung) $\Delta\varphi$ الذي يقوم به المقطعان العرضيان الموجودان في نهايتي القضيب سوف يعين عمل تغير الشكل A للقصيب المفتول وذلك بدراسة عنصر قضيبي طوله ds وسماكته $\delta(s)$ (شكل 7-42) وتؤثر على سطوحه الجانبية $h(s)\,ds$ و $h(s)\,dx$ القـوى Tds و Tdx . ان التشوه (Deformation) γ الذي ينتج عـن ذلك يؤدي للتشوه (Verwoelbung) $dV_1(s)/ds$ والانتقال الماسي $(\gamma(s) - dV_1(s)/ds)$ (شكل 7·43) لهـذا السبب ينبغي اخذ العمل الذي تقوم به القوى Tdx , Tds وهو التالي :

$$dA = \frac{Tds(\gamma - \frac{dV_t}{ds})\ dx + Tdx\ \frac{dV_t}{ds}\ dx}{2} = \frac{T\ ds\ \gamma\ dx}{2}$$

بعين الاعتبار . وبالمكاملة على كامل المقطع العرضي وطول القضيب l ينتج :

$$A = (\int_s)\ ds \int_0^l \frac{T\gamma}{2} dx$$

بواسطة العلاقة التالية :

$$T = \frac{M_x}{2F_m}$$

والعلاقة الآتية :

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{G\delta(s)} = \frac{M_x}{2\,GF_m\delta(s)}$$

يتم منها الحصول على عمل تغير الشكل للقضبان رقيقة الجدران :

$$\left.\begin{aligned} A = (\int_s)\ ds \int_0^l \frac{M_x^2}{8GF_m^2\delta(s)}\ ds = (\int_s) \frac{M_x^2 l}{8GF_m^2\delta(s)}\ ds \\ = \frac{M_x^2 l}{8GF_m^2} (\int) \frac{ds}{\delta(s)} = \frac{M_x^2 l}{2GI_t} \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}58)$$

حيث ان :

$$I_T = \frac{4\ F_m^2}{(\int_s) \frac{ds}{\delta(s)}}$$

هو عزم عطالة الفتل . واخيراً وبمقارنة العمل الذي تقوم به العزوم الخارجية M_x :

$$A_a = \frac{M_x\ \Delta\varphi}{2}$$

مع العلاقة (7-58) (مبدأ تساوي عمل القوى الخارجية A_a وعمل القوى الداخليـة A_i)
يتم الحصول على المعادلة الآتية :

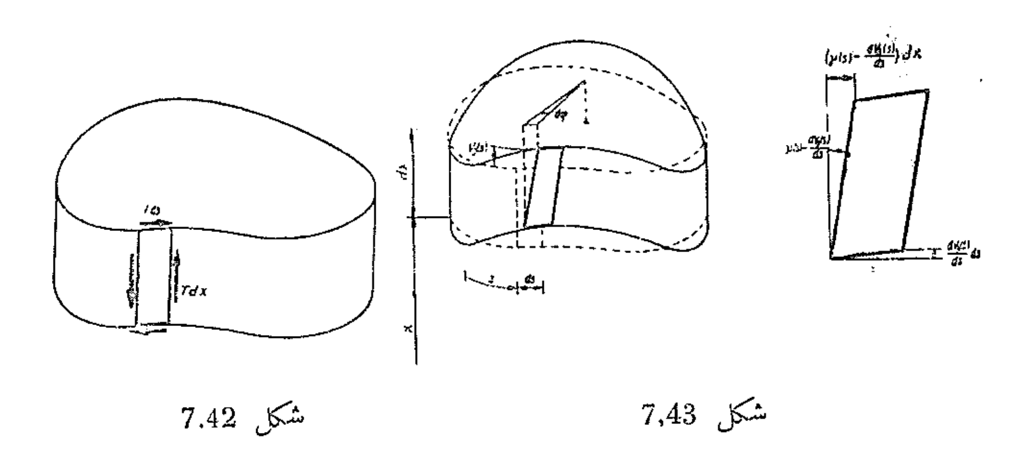
$$\Delta\varphi = \vartheta = \frac{M_x l}{GI_T}\ ,\ I_T = \frac{4F_m^2}{(\int) \frac{ds}{\delta(s)}} \qquad (7\text{-}59)$$

والتي تسمى بعلاقة بردت الثانية (2. BREDT sche Formel) .

حالة خاصة :

اذا كانت سماكة جدار المقطع العرضي δ ثابتة عندئذ يتم التوصل ، بالاستعانة بمحيط المقطع العرضي :

$$U = \left(\int_s\right) ds$$



شكل 7.42 شكل 7,43

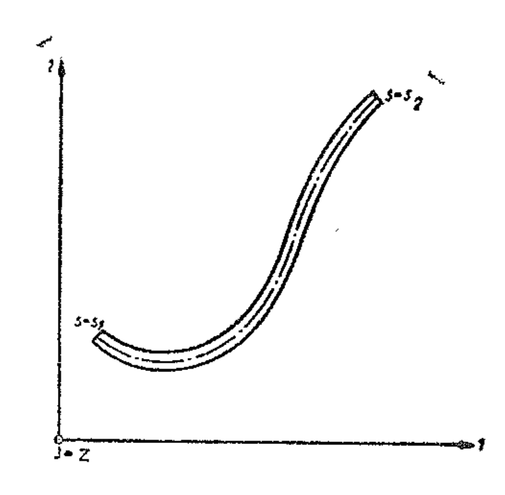
إلى الدوران المتبادل ممثلاً بالشكل التالي :

$$\Delta\varphi = \vartheta\, l = \frac{M_x l}{G I_T} \quad ; \quad I_T = \frac{4 F_m^2 \delta}{U} \qquad (7\text{-}60)$$

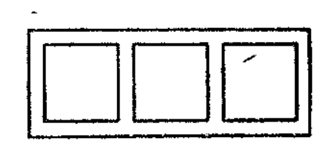
من اجل انبوب رقيق الجدار قطره D وسماكة جداره δ ثابتة ، تنتج العلاقات التالية :

$$\tau = \frac{2 M_x}{\pi D^2 \delta} \quad ; \quad \Delta\varphi = \vartheta\, l = \frac{M_x l}{G I_T} \quad , \quad I_T = \frac{\pi D^3 h}{3} \qquad (7\text{-}61)$$

ان العلاقات المشتقة في هذه الفقرة تصلح فقط من اجل المقاطع العرضية الرقيقة ذات الاغلاق الوحيد (بخلية واحدة) اي انها لا تصلح من اجل المقاطع العرضيسة متعددة الاغلاق (بعدة خلايا) (شكل 7.44). فمن اجل هذه المقاطع تنتج معادلات مترابطة (gekoppelte Gleichungen) بالنسبة لسيالات القص في كل خلية (انابيب الفتل (Torsionsroehren) وسيعتذر في هـــذا الكتاب عن معالجتها .



شكل 7.45



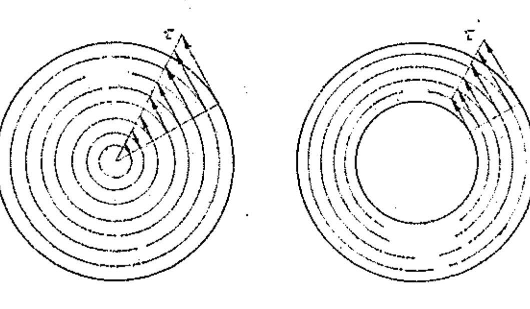
شكل 7.44

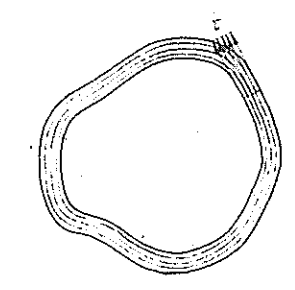
٧ ـ ٩ فتل القضبان رقيقة الجدار ذات المقطع العرضي المفتوح

(Torsion duennwandiger staebe mit offenem Querschnitt)

قبل أن يصار لحساب الاجهادات الماسية والانفتال (الدوران) المتبادل لقطعين عرضيين من قضيب رقيق الجدار وذو مقطع عرضي مفتوح (شكل 7.45) سوف يلجأ لايضاح بعض الملاحظات الهامة .

لقد تم في الشكل (7.46) رسم مسارات الاجهادات الماسية (Schubspannugstrajektorien) او ماتسمى بخطوط الاجهادات الماسية (Schubspannungslinien) من اجل مقطع عرضي دائري ومقطع عرضي آخر حلقي دائري الشكل ومقطع عرضي ثالث مغلق ورقيق الجدار . من خلال هذه الصورة للاجهادات يعطى القارىء فكرة واضحة عن توزيع الاجهاد الماسي فيالمقطع العرضي المغلق ، كما يتضح منها أن الاجهادات الماسية التي تؤثر باتجاه كل من خطوط الاجهادات الماسية المغلقة تؤدي لنصيب معين من عزم الفتل .





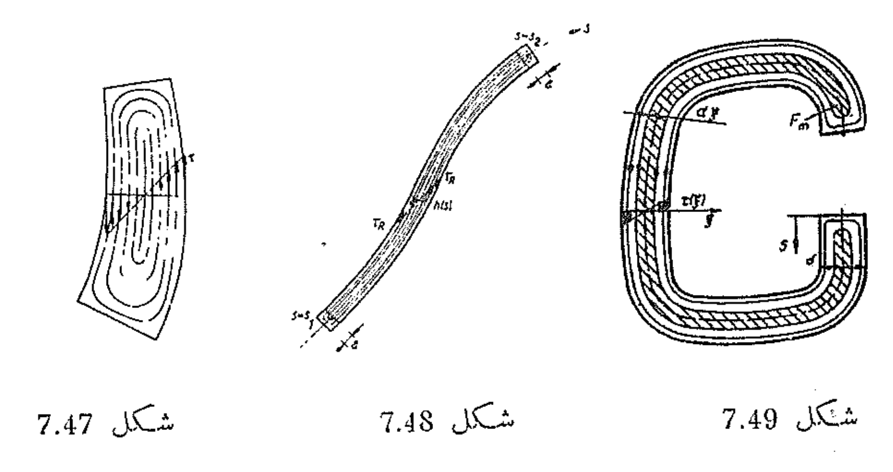
شكل 7.46

في حالة دراسة فتل القضبان ذات المقاطع العرضيـــة الممثلة في الشكل (7,47) فان الاجهادات المماسية التي تنطبق على اتجاه خطوط الاجهادات المماسية تعطي أيضاً نصيباً معيناً من عزم الفتل .

في المقاطع العرضية رقيقة الجدار (شكل 7.48) يقتصر التفاف خطوط الاجهادات المماسية في الاضلاع الضيقة على مجال صغير قد اشير له في الشكل المذكور بواسطة ع حيث يمكن في الحسابات المقبلة اعتبار ذلك مساوياً للصفر . تشير التجارب والدراسات النظرية الى ان توزيع الاجهادات المماسية على السماكة δ (s) هي عملياً خطية وبذلك يصلح :

$$\tau(s,x) = 2\,\tau_B(s)\,x \quad , \quad -\frac{1}{2} \leqq x = \frac{\varepsilon}{\delta} \leqq \frac{1}{2} \qquad (7\text{-}62)$$

(للتأكد من هذه النتيجة يرجع الى مطابقة جريان السوائل . فبتصور سائل يدور دوراناً ثابتاً في المقطع العرضي المدروس (شكل 7.49) يستنتج انه يجري تقريباً في كل المقطع العرضي بموازاة الحافة وهذا يشير ايضاً الى ان خطوط الاجهادات المماسية في كل المقطع العرضي تقريباً تسير بموازاة الحافة وبذلك يمكن الافتراض ان توزيع الاجهادات المماسية هو خطي) .



شكل 7.47 شكل 7.48 شكل 7.49

يعطي تطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه x على عنصر طوله ds وتحدده خطوط الاجهادات المماسية $x\,\delta(s)$ و $\delta(s)\,(x'+dx)$ (شكل 7.58) العلاقة التالية :

$$\tau(s+ds)\,\delta(s+ds)\,x - \tau(s)\,\delta(s)\,d\,x = 0$$

باهمال الحدود من المرتبة الثانية والحدود من المرتبات الاعلى في المعادلة التالية :

$$[\tau(s,x) + d\,\tau(s,x)][\delta(s) + d\,\delta(s)]\,d\,x - \tau(s,x)\,\delta(s)\,d\,x = 0$$

يتضح من العلاقة الآتية :

$$\frac{d}{ds}\left(\tau(s,x)\,\delta(s)\,dx\right) = 0 \tag{7-63}$$

ثبات سيالة القص :

$$dT(x) = \tau(s,x)\,\delta(s)\,d\,x = 2\,\tau_R(s)\,\delta(s)\,x\,dx = \text{const.}$$

على طول حلقة مغلقة يحدها خطان من خطوط الاجهادات المماسية . لتعيين عزم الفتـل الجزئي dM_x سوف يستعان بالمعادلة (7 57) وبذلك ينتج :

$$dT(x) = 2\,\tau_R(s)\,\delta(s)\,x\,dx = \frac{d\,M_x}{2\,F_m(x)} \tag{7-64}$$

بما أن المناطق (الحدود) الطرفية ذات الطول ε صغيره ويمكن إهمالها فبالامكان الافتراض ان الاجهادات المماسية الموازية للاضلاع الضيقة التي تؤثر داخلها تتوزع ايضاً خطياً . بذلك يأخـذ البعد الطرفي ، القيمة التالية : $\varepsilon\,(1-2x)$ (شكل 58 7) .

اما مساحة السطح الذي يغلقه خط الاجهاد المماسي x (s) δ داخله فتبلغ القيمة التالية :

$$F_m = 2\left[\int_{s1}^{s2} \delta(s)\,x\,ds - 2\int_{0}^{\varepsilon(1-2x)} \delta(s)\,x\,ds\right]$$

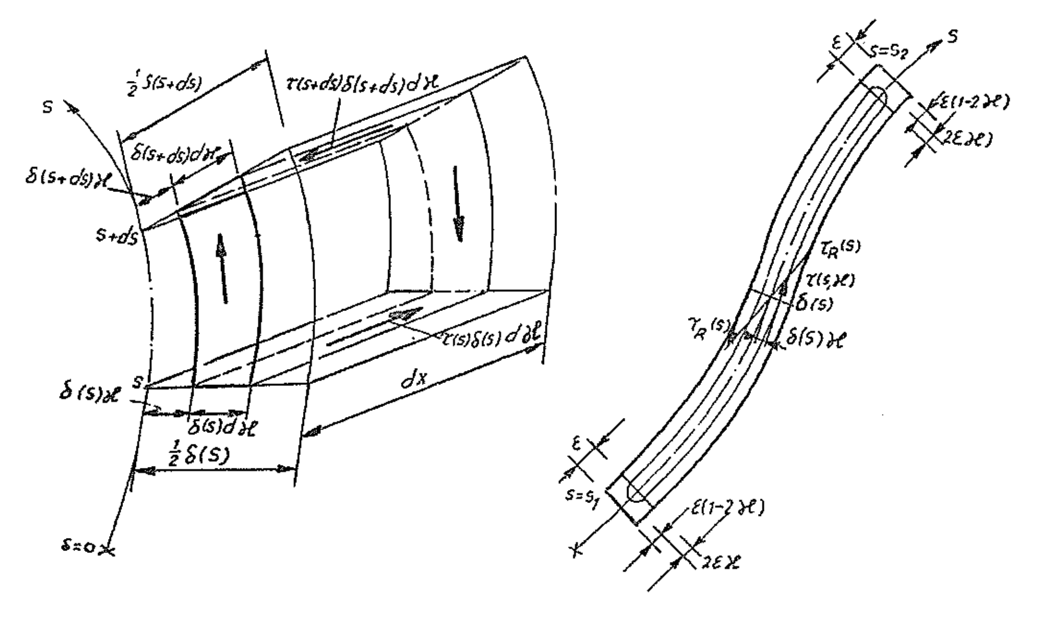
بالاستعانة بمساحة المقطع العرضي :

$$F = \int_{s1}^{s2} \delta(s)\,ds$$

ينتج :

$$F_m = 2\,x\left[F - 2\int_{0}^{\varepsilon(1-2x)} \delta(s)\,ds\right]$$

من العلاقة (7.64) يتم ، في البداية ، الحصول على تفاضل عزم الفتل (عزم الفتل الجزئي) :



شكل 7-57 شكل 7-58

$$dM_x = \lim_{\varepsilon \to 0} 8\,\tau_R(s)\,\delta(s)\,\varkappa^2 \left[F - 2\int_0^{\varepsilon(1-2\varkappa)} \delta(s)\,ds\right] d\varkappa$$

وبعد اخذ القيمة الحدية (العبور الحدي Grenzubergang) ينتج :

$$dM_x = 8\,\tau_R(s)\,\delta(s)\,F\,\varkappa^2\,d\varkappa$$

تعطي مكاملتها العلاقة التالية :

$$M_x = 8\,\tau_R(s)\,\delta(s)\,F\int_0^{1/2} \varkappa^2\,d\varkappa = \tau_R(s)\,\frac{\delta(s)\,F}{3} \tag{7-65}$$

من هذه العلاقة وفي حالة كون عزم الفتل M_x معلوماً يتم الحصول على الاجهادات الطرفية :

$$\tau_R(s) = \frac{M_x}{\frac{\delta(s)\,F}{3}} \tag{7,66}$$

اذا تألف المقطع العرضي ، كما هو الحال في الحياة العمليةالهندسية ، من n سطح جزئي اطوالها S_ν . حيث ان $\nu=1,2,\cdots,n$ وسماكة كل منها ثابتة δ_ν $(\nu=1,2,\cdots n)$ عندئذ يتم التوصل ، بالاستعانة بالعلاقة التالية :

$$F = \sum_{\nu} s_\nu \delta_\nu$$

لعلاقة الاجهـاد :

$$\tau_{R\nu} = \frac{M_x}{\frac{\delta_\nu \sum_{\mu} s_\mu \delta_\mu}{3}} ; \mu , \nu = 1,2, \cdots , n \qquad (7.67)$$

تتحول هذه العلاقة عندما تكون سماكة المقاطع العرضية الجزئية ثابتة :

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 = \cdots$$

وبعد الاستعانة بالاختصار :

$$s = \sum_{\mu} s_\mu$$

الى العلاقة التالية :

$$\tau_R = \frac{M_x}{\frac{s\,\delta^2}{3}} \qquad (7.68)$$

للتمكن من حساب زاوية الدوران لقطعين عرضيين يقعان على بعـد l ، سوف يدرس العنصر ذو الابعاد dx , ds , $\delta(s)\, d\chi$ (شكل 7-59) . تؤثر على السطوح الجانبـية $\delta(s)\, d\chi\, ds$ القوى $dT(\chi)\, ds$. يؤدي التغير الزاوي γ الناتج عن التحميل القصي الى الانتقال $\gamma(s)\, dx$. ليتم تشكل ذلك ينبغي ان تقوم القوى :

$$dT(\chi)\, ds = \tau(s, \chi)\, \delta(s)\, d\chi\, ds$$

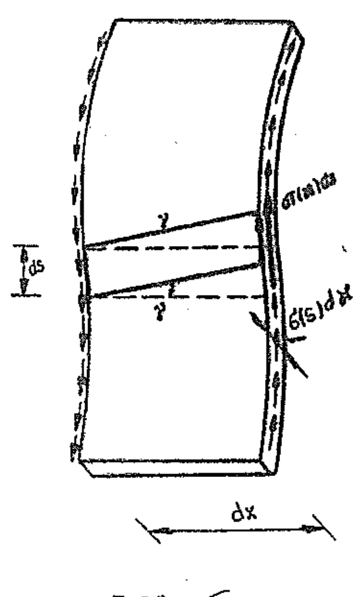
بالعمل

$$\frac{\tau(s, \chi)\, \delta(s)\, d\chi\, ds\, \gamma(s)\, dx}{2}$$

بالمكاملة على كامل المقطع العرضي وعلى طول القضيب l يتم تعيين العمل الكلي :

$$A_i = \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{0}^{l} \frac{\tau(s, \chi)\, \delta(s)\, \gamma(s)}{2}\, d\chi\, ds\, dx$$

من هذه المعادلة وحسب العلاقة (7-63) وبواسطة :



شكل 7.93

$$\gamma(s, x) = \frac{\tau(s, x)}{G}$$

و

$$\frac{d}{ds}\left(\tau(s, x)\,\delta(s)\right) = 0$$

يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$A_i = \frac{\delta^2(s)}{2G}\int_{-1/2}^{+1/2}[\tau(s, x)]^2\,dx\int_{s1}^{s2}\frac{ds}{\delta(s)}\int_0^l dx$$

وبالاستعانة بالمعادلة :

$$\tau(s, x) = 2\,\tau_R(s)\,x$$

والعلاقة (7.66) ينتج اخيراً :

$$A_i = \frac{[\tau_R(s)]^2[\delta(s)]^2\,l}{6G}\int_{s1}^{s2}\frac{ds}{\delta(s)} = \frac{3M_x^2\,l}{2GF^2}\int_{s1}^{s2}\frac{ds}{\delta(s)}$$

يبلغ العمل الذي تنجزه عزوم الفتل الخارجية (عمل القوى الخارجية) القيمة التالية :

$$A_a = \frac{M_x \Delta\varphi}{2}$$

بمقارنة كلا العملين (شرط نساوي عمل القوى الداخلية وعمل القوى الخارجية) يتم التوصل لزاوية الدوران :

$$\Delta\varphi = \frac{M_x\, l}{G\, I_T} \; , \; I_T = \frac{F^2}{3\int_{s1}^{s2} \frac{ds}{\delta\,(s)}} \qquad (7.69)$$

حالات خاصة :

١ ـ من اجل مقطع عرضي سماكة جداره متغيرة خطياً (شكل 7-60) ينتج :

$$\Delta\varphi = \vartheta\, l = \frac{M_x\, l}{G\, I_T} \; , \; F = \frac{H+h}{2}\, b \, , \, I_T = \frac{b}{3}\left(\frac{H+h}{2}\right)^2 \frac{H-h}{ln\,(H/h)} \quad (7.70)$$

بالامكان ، من اجل التابع $ln\,(H/h)$ ، استعمال المنشورة التالية :

$$ln\, \frac{H}{h} = 2\, \frac{\frac{H}{h} - 1}{\frac{H}{h} + 1}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{H}{h} - 1}{\frac{H}{h} + 1}\right)^2 + \cdots \right]$$

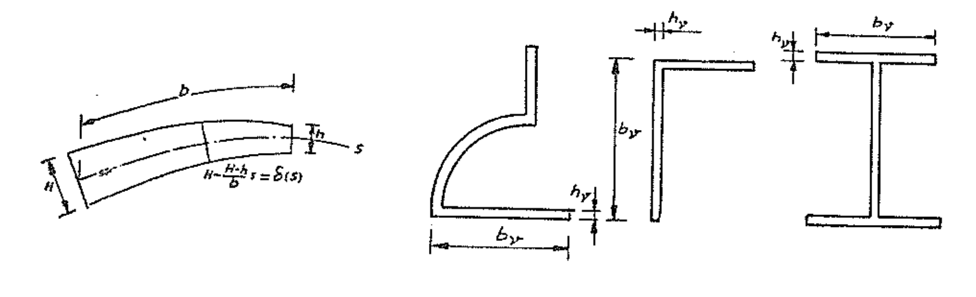
حيث يكفي ، بسبب كون الحد $H-h$ صغيراً ، اعتبار الحدين الاوليين فقط . عندئذ تأخذ العلاقات السابقة الشكل التالي :

$$\Delta\varphi = \vartheta\, l = \frac{M_x l}{G I_T} \; , \; I_T = \frac{b\,[\,(H+h)/2]^2}{3}\; \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{H-h}{H+h}\right)^2} \quad (7.71)$$

٢ ـ من اجل مقطع عرضي سماكة جداره ثابتة $\delta = H = h$ فان العلاقات السابقة تصبح كما يلي :

$$\Delta\varphi = \vartheta\, l = \frac{M_x\, l}{G\, I_T} \; , \; I_T = \frac{b\,\delta^3}{3} \qquad (7.72)$$

٣ ـ ستتم الآن معالجة المقاطع العرضية العامة هندسياً والتي تتركب من اجـزاء رقيقة ذات سماكة ثابتة δ_ν حيث ان $\nu = 1, 2, \cdots, n$ (الاطول $\nu = 1, 2, \cdots, n$) (شكل 7 61).



شكل 7.60 شكل 7.61

من اجل عزم عطالة الفتل حسب العلاقة (7.60) يتم الحصـول بالاستعانة بـ $F\nu = b\nu \cdot \delta\nu$ على النتيجة التالية :

$$I_T = \frac{1}{3} \frac{\left(\sum_\nu F_\nu\right)^2}{\sum_\nu \frac{S\nu}{\delta\nu}} \qquad (7\ 73)$$

لقد اعطيت في المراجع الهندسية عزوم عطالة الفتل من اجل المقاطع العرضية الممثلة في الشكل (7 61) بشكل آخر ، هو التالي :

$$I_T = \frac{1}{3} \sum_\nu b\nu\, \delta\nu^3 \qquad (7.74)$$

لتعليل ذلك الفارق سوف تتم ، على سبيل المثال ، دراسة مقطع عرضي يتألف من جزئـين . يبلغ عزم عطالة فتل المقطع العرضي المذكور ، القيمة التالية:

$$I_T = \frac{1}{3} \frac{(F_1 + F_2)^2}{\frac{b_1}{\delta_1} + \frac{b_2}{\delta_2}}$$

ويمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$I_T = \frac{b_1\, \delta_1{}^3}{3} + \frac{b_2\, \delta_2{}^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 - 2}{\frac{1}{F_2\, \delta_1{}^2} + \frac{1}{F_1\, \delta_2{}^2}}$$

ان الحد الاضافي الذي يظهر زيادة عن حدود العلاقة (7.74) هو ، من اجل المقاطع رقيقة الجدار ، صغيراً بحيث يمكن اهماله .

مقارنة بين الاجهادات الماسية في كل من المقاطع العرضية المغلقة والمقاطع العرضية المفتوحة :

تشير العلاقة (7.68) الى ان الاجهادات الماسية الاعظمية الناتجة عن عزم الفتل M_x هي في المقاطع العرضية المفتوحة اكبر بكثير منها في المقاطع العرضبة المغلقة . فمثلاً تبلغ الاجهادات الماسية الاعظمية τ_1 في حلقة دائرية مغلقة والاجهادات الماسية الاعظمية τ_2 في حلقة دائرية مفتوحة ، القيم التالية :

$$\tau_1 = \frac{M_x}{2\pi\, r^2\, \delta} \quad : \quad \tau_2 = \frac{3\, M_x}{2\pi\, r\, \delta^2}$$

بالافتراض ، على سبيل المثال ان $r = 10\,\delta$ ، فان نسبة تلك الاجهادات تبلغ ما يلي :

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{3\, r}{\delta} = 30$$

تظهر هذه النتيجة ضرورة حمل عزوم الفتل بواسطة مقاطع عرضية مغلقة فقط .

٧ ـ ١٠ أمثلة

مثـال 74 :

حمل جائز صندوقي (شكل 7.62) بعزم الفتل M_t .

المعطى : M_t . b , d , δ_2 , δ_1 , δ_3 , δ_4 ; d , $b >> \delta$ وعامل القص(عامل الانزلاق) G .

المطلوب : إيجـاد

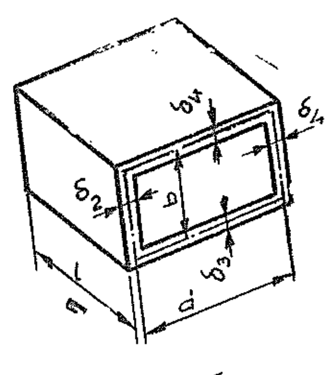
١ ـ توزيع الاجهاد الماسي .

٢ ـ زاوية الفتل النوعية ϑ .

الحـــل :

يتم تعيين سيالة القص بواسطة علاقة بردت الاولى (العلاقة 7.56 b):

$$T = \tau\delta = \frac{M_t}{2\, F_m}$$



شكل 7.62

تبلغ المساحة التي يغلقها الخط الاوسط ، القيمة التالية :

$$F_m = b \cdot d$$

بالاستعانة بكلا العلاقتين يتم التوصل لقيم الاجهادات الماسية التالية :

$$\tau_1 = \frac{M_t}{2\,b\,d}\,\frac{1}{\delta_1}$$

$$\tau_2 = \frac{M_t}{2\,b\,d}\,\frac{1}{\delta_2}$$

$$\tau_3 = \frac{M_t}{2\,b\,d}\,\frac{1}{\delta_3}$$

$$\tau_4 = \frac{M_t}{2\,b\,d}\,\frac{1}{\delta_4}$$

يحسب الانفتال (زاوية الفتل النوعية) ϑ بواسطة علاقة بردت الثانية (العلاقة 7.59) :

$$\vartheta = \frac{M_t}{4\,G\,F_m^2}\,\oint \frac{ds}{\delta}$$

ان السماكة δ هي في كل مجال ثابتة وبذلك يأخذ التكامل الذي تتضمنه العلاقة السابقة القيمة التالية :

$$\oint \frac{ds}{\delta} = \frac{b}{\delta_1} + \frac{d}{\delta_2} + \frac{b}{\delta_3} + \frac{d}{\delta_4} = b\left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_3}\right) + d\left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_4}\right)$$

وبذلك تأخذ زاوية الفتل النوعية (النسبية) القيمة الآتية :

$$\vartheta = \frac{M_t}{4 G b^2 d^2} \left[b \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_3} \right) + d \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_4} \right) \right]$$

لقد كان بالامكان التوصل لنفس النتيجة وذلك باستخدام الجدول 7.2 مباشرة وذلك كما يلي :

$$\vartheta = \frac{M_t}{G I_t}$$

$$I_t = \frac{4 b d}{\frac{1}{d\delta_1} + \frac{1}{b\delta_2} + \frac{1}{d\delta_3} + \frac{1}{b\delta_4}} = \frac{4 b d}{\frac{1}{d} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_3} \right) + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_4} \right)}$$

بالتبديل فى العلاقة السابقة يتم التوصل ، بعد توحيد المخارج لنفس العلاقة السابقة وهي :

$$\vartheta = \frac{M_t}{4 G b^2 d^2} \left[b \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_3} \right) + d \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_4} \right) \right]$$

مثال 75 :

حمل جائز صندوقي مفتوح (شكل 7.63) وسماكة جداره $\delta = const$ بعزم الفتل M_t .

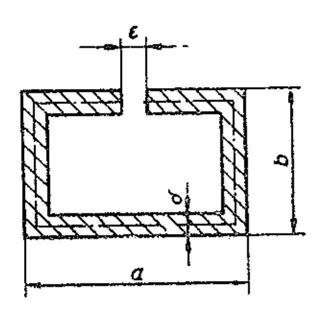
المعطى : $M_t , a , b , \delta , \varepsilon , G ; b , a << \delta , a << \varepsilon$.

المطلوب :

١ ـ تعيين الاجهاد المماسي τ .

٢ ـ تعيين زاوية الفتل النوعية ϑ .

٣ ـ مقارنة النتيجة مع قيم المثال 74 .



شكل 7.63

الحـل :

ان علاقات حساب الاجهادات المماسية (7.62 , 7.68) من اجل المقاطع العرضية المفتوحة هي :

$$\tau = \frac{3\ M_t}{S\ \delta^2}\ \frac{\xi}{\delta/2}\ ,\quad \max \tau = \frac{3\ M_t}{S\ \delta_2}$$

يبلغ طول المحور الاوسط للمقطع العرضي S (عندما يصل عرض الفتحة ع) القيمة التالية :

$$S = 2\,(a + b)$$

وبذلك يأخذ الاجهاد المماسي الاعظمي القيمة التالية :

$$\max\ \tau = \frac{3}{2}\ \frac{M_t}{(a + b)\ \delta^2}$$

أما عزم عطالة الفتل فيبلغ (العلاقة 7.72 والجدول 7.2 أيضاً) :

$$I_t = \frac{S\,\delta^3}{3} = \frac{2}{3}\,(a+b)\,\delta^3$$

بالاستعانة به يتم تعيين الانتقال (زاوية الفتل النوعية) :

$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{3}{2}\ \frac{M_t}{G}\ \frac{1}{(a+b)\,\delta^3}$$

من المثال 74 يتم الحصول من اجل الجائز الصندوقي المغلق وعندما تبدل $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ على الاجهاد المماسي التالي :

$$\tau = \frac{M_t}{2ab\delta}$$

وعلى الانفتال الآتي :

$$\vartheta = \frac{1}{2}\ \frac{M_t}{G}\ \frac{a+b}{a^2 b^2 \delta}$$

مثال 76 :

يثبت على كل من نهايتي محور ، طوله l ،دولاب (طارة) (Rimenscheibe) (شكل 7.64).
ويحمل المحور الموجود بين الدولابين بعزم الفتل $M_x = M_t$.

المعطى :

$M_t = 10\,000$ kp cm , $l = 20$ m , $\frac{d}{D} = 0\ 9$

zul $\tau = 250$ kp / cm², $G = 0{,}81 . 10^6$ kp / cm²

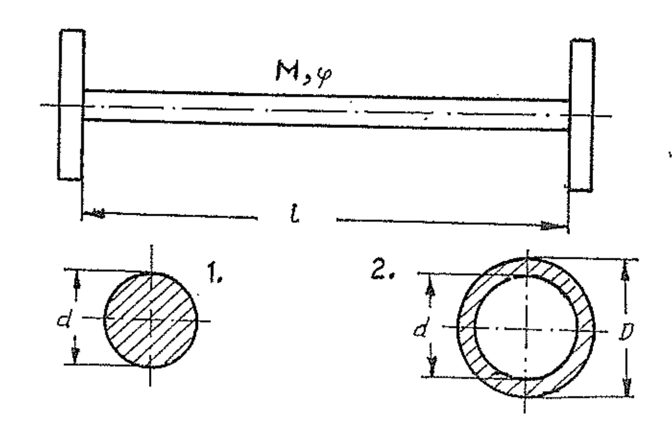
المطلوب :

ا ـ تصميم المحور من أجل zul $\tau = 250$ kp/cm² .

ب ـ حساب زاوية الفتل.

١ ـ وذلك عندما يكون القطع العرضي دائرة مليئة .

٢ ـ وذلك عندما يكون القطع العرضي حلقة دائرية تبلغ فيها $d/D = 0{,}9$.



شكل 7,74

الحل :

آ ـ ١ تصميم القطع العرضي للمحور باعتباره دائرة مليئة .

$$\max \tau = \frac{M_t}{I_t} \max \rho = \frac{M_t}{W_t} \leqq \text{zul } \tau$$

$$W_t = W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$\max \tau = \frac{16 M_t}{\pi d^3} \leqq \text{zul } \tau$$

بحل المعادلة الاخيرة يتم تعيين قطر الدائرة :

$$d \geqq \sqrt[3]{\frac{16\, M_t}{\pi \cdot zul\ \tau}}$$

يبلغ قطر الدائرة عددياً القيمة التالية :

$$d \geqq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10\,000}{\pi \cdot 250}} = 5{,}88\ \mathrm{cm}$$

فعلياً سوف يختار محور قطره d = 6 cm . من اجل هذه الحالة فان الكشف عن الاجهاد يصبح كما يلي :

$$\max\ \tau = \frac{16\, M_t}{\pi\, d^3} = \frac{16.10000}{\pi \cdot 6^3} = 236\ \mathrm{kp/cm^2} < 250\ \mathrm{kp/cm^2}$$

هذا يعني ان المحور قد صمم بشكل كافي .

آ ـ ٢ تصميم المقطع العرضي للمحور باعتباره حلقة دائرية :

عزم المقاومة (ويؤخذ من الجدول 7.2):

$$W_t = \frac{\pi}{16}\ \frac{D^4 - d^4}{D}$$

شرط التصميم :

$$\max\ \tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{16\, D\, M_t}{\pi(D^4 - d^4)} \leqq zul\ \tau$$

$$= \frac{16 M_t}{\pi\ D^3}\ \frac{1}{1 - (\frac{d}{D})^4} \leqq zul\ \tau$$

بحل هذه العلاقة بالنسبة للقيمة D ينتج :

$$D \geqq \sqrt[3]{\frac{16\, M_t}{\pi . zul\ \tau[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4]}}$$

اما القيمة العددية فتبلغ :

$$D \geqq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10\,000}{\pi \cdot 250(1 - 0{,}9^4)}} = 8{,}39\ \mathrm{cm} \approx 8{,}4\ \mathrm{cm}$$

في الحقيقة ينبغي اختيار انبوب تكون مقاييسه موجودة في السوق التجارية . اما الكشف عن الاجهاد فيجري بعد اختيار ابعاد المقطع العرضي .

ب ـ ١ زاوية فتل المحور (Verdreh - oder Torsionswinkel) باعتباره دائرة مليئة .

سوف يفترض ان قطر المحور الاصغري هو d=5,88cm وبذلك تبلغ زاوية الدوران :

$$\varphi = \frac{M_t\, l}{G I_t}$$

يبلغ عزم عطالة الفتل في الدائرة ما يلي :

$$I_t = I_p = \frac{\pi\, d^4}{32}$$

بالتبديل في العلاقة السابقة ينتج :

$$\varphi = \frac{M_t \,.\, l \,.\, 32}{\pi \,.\, d^4 \,.\, G} = \frac{10000 \,.\, 2000 \,.\, 32}{\pi \,.\, 5{,}88^4 \,.\, 0{,}81 \,.\, 10^6} = 0{,}210$$

إن الزاوية التي تم الحصول عليها هي بقياس الاقواس (بالراديان) ويعطي تحويلها الى الدرجات القيمة التالية :

$$\varphi = 12{,}03^\circ$$

ب ـ ٢ زاوية فتل المحور باعتبار مقطعه العرضي حلقة دائرية :

$$\varphi = \frac{M_t\, l}{G\, I_t}$$

يبلغ عزم عطالة الفتل في الحلقة الدائرية ما يلي :

$$I_t = I_p = \frac{\pi\, D^4}{32}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

$$\varphi = \frac{M_t \,.\, l \,.\, 32}{G \,.\, \pi \,.\, D^4} \cdot \frac{1}{1-(d/D)^4}$$

$$\varphi = \frac{10000 \,.\, 2000 \,.\, 32}{0{,}81 \,.\, 10^6 \,.\, \pi \,.\, 8{,}39^4 \,.\, (1-0{,}9^4)} = 0{,}148$$

$$\varphi = 8{,}48^\circ$$

مثـــال 77 :

يلزم تصميم نوابض دورانية (Drehfedern) طولها l بحيث يستطيع عزم فتل معين M_t تدوير المقاطع العرضية الموجودة عند النهايتين بزاوية فتل معينة مقدارها φ .

المعطى :

$M_t = 4000$ kp cm , $\varphi = 15^0$

$l = 80$ cm , $G = 0{,}81 \cdot 10^6$ kp/cm²

$\frac{d}{D} = 0{,}8$, $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$

المطلوب :

ا ـ حساب ابعاد المقطع العرضي من اجل الحالات التالية :

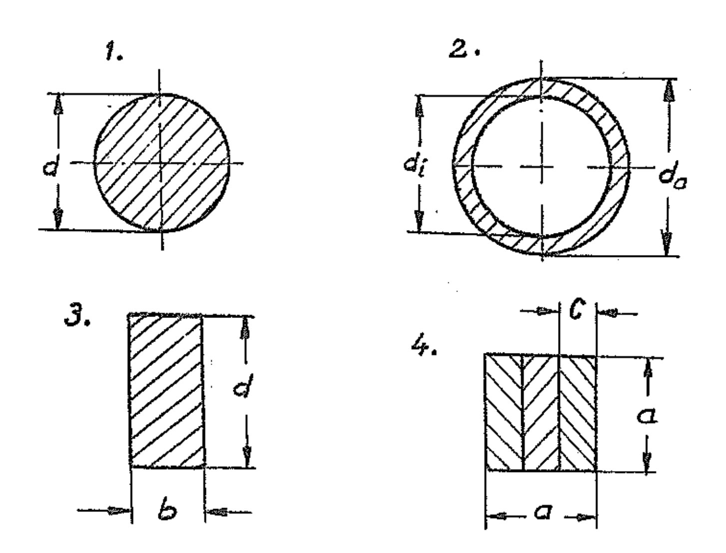
١ ـ دائرة مليئة .

٢ ـ حلقة دائرية .

٣ ـ مستطيل .

٤ ـ ثلاثة نوابض وحيدة ، مقطع كل منها مستطيل الشكل (شكل 7.65).

ب ـ تعيين مادة النابض وذلك بتحديد الاجهـاد الماسي المسموح من اجل الحـالات الاربعـة السابقـــة .



شكل 7.65

الحل :

ا ـ المقطع العرضي دائرة مليئة :

$$\varphi = \frac{M_t\, l}{G\, I_t}$$

عزم عطالة الفتل للدائرة المليئة (الجدول 7.2) :

$$I_t = I_p = \frac{\pi\, d^4}{32}$$

بالتبديل في العلاقة السابقة ينتج :

$$\varphi = \frac{32\, M_t\, l}{G\, \pi\, d^4}$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير d ينتج :

$$d = \sqrt[4]{\frac{32\, M_t\, l}{G\, \pi\, \varphi}}$$

اما الناتج فهو قطر النابض الدوراني اللازم بناءه حتى يستطاع بعزم الفتل M_t التوصل لزاوية الفتل φ . ينبغي في العلاقة السابقة تبديل φ بالراديان (بمقياس الاقواس) :

$$\varphi = \frac{15^{0}\, \pi}{180^{0}} = 0{,}262$$

بالتعويض في العلاقة الاخيرة ، يتم تعيين قطر المقطع العرضي:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32\, .\, 4000\, .\, 80}{\pi\, .\, 0{,}81\, .\, 10^{6}\, .\, 0{,}262}} = 1{,}98\ \text{cm}$$

آ ـ ٢ المقطع العرضي حلقة دائرية :

$$\varphi = \frac{M_t\, l}{G\, I_t}$$

من الجدول 7.2 يتم الحصول على عزم عطالة الفتل :

$$I_t = I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi D^4}{32}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

بالتعويض في العلاقة السابقة ينتج :

$$\varphi = \frac{32\ M_t\ l}{G\pi D^4[1-(d/D)^4]}$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير D يتم التوصل لما يلي :

$$D = \sqrt[4]{\frac{32\ M_t\ l}{\pi G\varphi\ [1-(d/D)^4]}}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{32\ .\ 4000\ .\ 80}{\pi.0{,}81.10^6.0{,}262[1-0{,}8^4]}} = 2{,}26\ \mathrm{cm}$$

$$d = 0{,}8\ D = 1{,}81\ \mathrm{cm}$$

آ ـ ٣ المقطع العرضي مستطيل الشكل :

$$\varphi = \frac{M_t\ l}{G\ I_t}$$

يؤخذ عزم عطالة الفتل للمستطيل من الجدول 7.2 :

$$I_t = \beta\ b^3 d$$

بالتبديل في العلاقة الأخيرة ينتج :

$$\varphi = \frac{M_t\ l}{G\beta b^3 d} = \frac{M_t\ l\ (b/d)}{G\beta\ b^4}$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير b ينتج :

$$b = \sqrt[4]{\frac{M_t\ l\ (b/d)}{G\ .\ \beta\ .\ \varphi}}$$

من الجدول 7-2 ومن أجل $d/b = 2$ يتم تعيين العامل β :

$$\beta = 0{,}229$$

بتبديل هذه القيمة وبقية القيم العددية في العلاقة الاخيرة ينتج :

$$b = \sqrt[4]{\frac{4000 \cdot 80\,(1/2)}{0{,}81 \cdot 10^6 \cdot 0{,}229 \cdot 0{,}262}} \doteq 1{,}35\ \text{cm}$$

$$d = 2\,b = 2{,}70\ \text{cm}$$

آ ـ ٤ يتألف نابض الفتل (Torsionsfeder) من ثلاثة نوابض افرادية ، المقطع العرضي لكل منها هو مستطيل الشكل :

إن زاوية الفتل φ هي بالنسبة للنوابض الثلاثة نفسها وبذلك يتحمل كل من النوابض 1/3 عزم الفتل M_t :

$$\varphi = \frac{\frac{M_t}{3}\, l}{G\, I_t}$$

من الجدول 7.2 يتم الحصول على عزم عطالة الفتل للمستطيل الواحد :

$$I_t = \beta\, c^3 a$$

بالتبديل في العلاقة السابقة ينتج :

$$\varphi = \frac{M_t\, l}{3G\beta\, c^3 a}$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير c يتم التوصل للمطلوب :

$$c = \sqrt{\frac{M_t\,(c/a)\,l}{3G\,\beta\varphi}}$$

عندما تكون $a/c = 3$ عندئذ يبلغ العامل β حسب الجدول 7.2 القيمة التالية :

$$\beta = 0{,}263$$

بتبديل هذه القيمة وبقية القيم العددية في العلاقة السابقة ينتج :

$$c = \sqrt[4]{\frac{4000 \cdot 80 \cdot (1/3)}{3 \cdot 0{,}263 \cdot 0{,}81 \cdot 10^6 \cdot 0{,}262}} = 0{,}89\ \text{cm}$$

$$a = 3\,c = 2{,}68\ \text{cm}$$

ب ـ ١ الاجهاد الماسي المسموح من أجل مادة النابض الدوراني (نابض الفتل) عندمايكون المقطع العرضي هو دائرة مليئة :

$$\max \tau = \frac{M_t}{W_t} \leqq zul\ \tau$$

من الجدول 7.2 تم قراءة العزم المقاوم للفتل للدائرة المليئة :

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16}$$

بتبديل هذه القيمة وبقية القيم العددية في العلاقة السابقة ينتج :

$$\max \tau = \frac{4000 \cdot 16}{\pi \cdot 1{,}98^3} = 2624\ kp/cm^2 \leqq zul\ \tau$$

ب ـ ٢ عندما يكون المقطع العرضي هو حلقة دائرية :

$$\max \tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{16M_t}{\pi D^4} \cdot \frac{1}{[1-(d/D)^4]} \leqq zul\ \tau$$

$$= \frac{16 \cdot 4000}{\pi \cdot 2{,}26^3} \cdot \frac{1}{1-0{,}8^4} = 2989\ kp/cm^2 \leqq zul\ \tau$$

ب ـ ٣ عندما يكون المقطع العرضي هو مستطيل :

$$\max \tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\alpha\, b^2 d} = \frac{M_t}{\alpha b^3 \frac{d}{b}} \leqq zul\ \tau$$

من الجدول 7-2 يتم تعيين العامل α من أجل $d/b = 2$.

$$\max \tau = \frac{4000}{0{,}246 \cdot 1{,}35^3 \cdot 2} = 3304\ kp/cm^2 \leqq zul\ \tau$$

ب ـ ٤ عندما يتكون النابض الدوراني من ثلاثة نوابض بحيث يتحمل كل منها 1/3 عزم الفتل M_t :

$$\max \tau = \frac{M_t/3}{W_t} = \frac{M_t}{3\, \alpha\, c^2 a} = \frac{M_t}{3 \alpha c^3 \frac{a}{c}}$$

من أجل $a/c = 3$ فان العامل α ، حسب الجدول 7.2 ، يبلغ :

$$\alpha = 0{,}267$$

بتبديل هذه القيمة العددية وبقية القيم الاخرى في العلاقة السابقة يتم التوصل المطلوب :

$$\max \tau = \frac{4000}{3 \,.\, 0{,}267 \,.\, 0{,}89^3 \,.\, 3} = 2361 \ \text{kp/cm}^2$$

مثال 78 :

حمل قضيب موشوري طوله l ومقطعه العرضي مربع مفرغ رقيق الجدار (صنـــدوق) بعزم الفتل M_t (شكل 7-66) .

المعطى :

$M_t = 373\,000$ kp cm , zul $\tau = 700$ kp/cm²

$l = 500$ cm , $G = 0{,}81 \,.\, 10^6$ kp/cm²

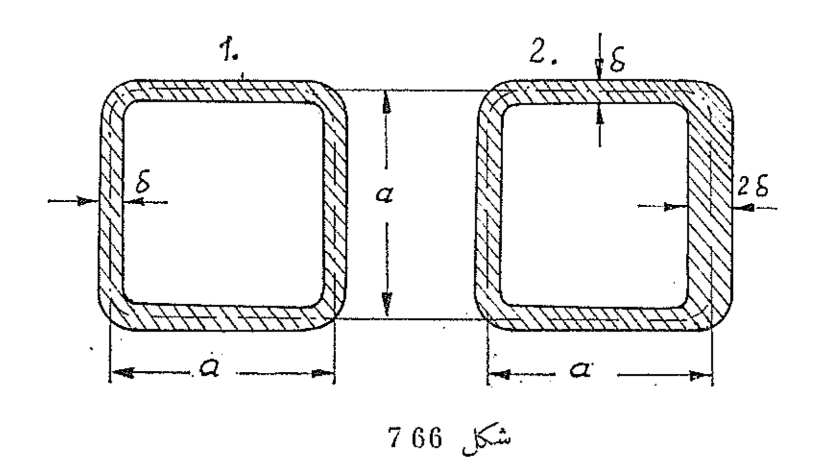
$\frac{\delta}{a} = 1/15$

المطلوب : تصميم المقطع العرضي من أجل الحالات التالية :

١ ـ عندما تكون سماكة الجدران في كافة اضلاع المقطع العرضي متساوية وتبلغ δ .

٢ ـ عندما تكون سماكة جدران الاضلاع الثلاثة هي δ وسماكة الجدار الرابع هي 2δ .

كما ينبغي حساب زاوية الفتل لكلا الحالتين .



شكل 7 66

الحـــل :

آ ـ ١ و ـ ٢ يتساوى الاجهاد الماسي الأعظمي في كلا الحالتين وهو يظهر في الحـالة الأولى

في كل الأضلاع أما في الحالة الثانية فيظهر في الضلع ذو السماكة δ (الضلع ذو السماكة الأصغرية) ويحسب بواسطة العلاقة العامة التالية :

$$\max \tau = \frac{M_t}{W_t}$$

من الجدول 7-2 يتم تعيين عزم مقاومة الفتل للمقطع العرضي الصندوقي :

$$W_t = 2\,F_m \,.\, \min \delta$$

أما المساحة التي يغلقها الخط الاوسط للمقطع العرضي داخله فهي في كلا الحالتين متساوية وتبلغ :

$$F_m = a \,.\, a$$

$$\min \delta = \frac{a}{15}$$

بالتبديل في علاقة الاجهاد الماسي ، وبعد استخدام شرط التصميم ، ينتج :

$$\max \tau = \frac{M_t}{2\,a^2\,(a/15)} = \frac{15\,M_t}{2\,a^3} \leqq \text{zul}\ \tau$$

بحل هذه المتراجحة بالنسبة للمتغير a ينتج :

$$a \geqq \sqrt[3]{\frac{15\ M_t}{2\,.\,\text{zul}\ \tau}} = \sqrt[3]{\frac{15\ 373000}{2.700}} = 15{,}87\ \text{cm}$$

هذه القيمة تتبع كلا الحالتين وهي تشير إلى أن تقوية جدار واحد من الصندوق لا تزيد من تحمله بالنسبة للفتل .

ب ـ ١ زاوية الفتل من أجل القضيب ذو المقطع العرضي بسماكات ثابتة :

$$\varphi = \frac{M_t\,l}{G\,I_t}$$

من الجدول 7-2 يتم التوصل لعزم عطالة الفتل :

$$I_t = \frac{4F_m{}^2\delta}{U}\ ,\ F_m = a^2\ ,\ U = 4a$$

$$I_t = \frac{4a^4 \, (a/15)}{4a} = \frac{a^4}{15}$$

بتبديل هذه القيمة وبقية القيم العددية ، في العلاقة السابقة ينتج :

$$\varphi = \frac{15\, M_t\, l}{G\, a^4} = \frac{15 \,.\, 373000 \,.\, 500}{0{,}81.10^6 \,.\, 14{,}15^4} = 0{,}0862$$

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi}\, 0{,}0862 = 4{,}94^\circ$$

ب ـ ٢ زاويه الفتل من أجل القضيب ذو المقطع العرضي بسماكات مختلفة :

عندما تكون $\delta \neq const$ عندئذ ينبغي حساب عزم عطالة الفتل من العلاقة التالية :

$$I_t = \frac{4F_m^2}{(\int)\, \frac{ds}{\delta}}$$

حيث أن :

$$F_m = a \,.\, a = a^2$$

$$\delta = a/15$$

$$(\int)\, \frac{ds}{\delta} = \frac{a}{\delta} + \frac{a}{\delta} + \frac{a}{\delta} + \frac{a}{2\delta} = \frac{7a}{2\delta}$$

بالتبديل في علاقة عزم عطالة الفتل ينتج :

$$I_t = \frac{4a^4}{7a/2\delta} = \frac{8}{7}\, a^3 \delta = \frac{8}{105}\, a^4$$

بتبديل هذه النتيجة في علاقة حساب زاوية الفتل التالية :

$$\varphi = \frac{M_t\, l}{G\, I_t}$$

ينتج :

$$\varphi = \frac{M_t \,.\, l \,.\, 105}{G \,.\, 8 \,.\, a^4} = \frac{373000 \,.\, 500 \,.\, 105}{0{,}81.10^6.8.14{,}15^4} = 0{,}0754$$

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \,.\, 0{,}0754 = 4{,}32^\circ$$

تشير هذه النتيجة إلى أن زاوية الفتل تصغر بتقوية جدار أحد جوانب المقطع العرضي .

جدول 7.2

جدول عزوم عطالة الفتل I_t وعزوم مقاومة الفتل W_t لبعض المقاطع العرضية الهامة

العلاقات العامة :

الإجهاد المماسي الأعظمي $max\,\tau = \frac{M_t}{W_t}$. زاوية الفتل النوعية $\vartheta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_t}{GI_t}$ ،
M_t عزم الفتل . I_t عزم عطالة الفتل . W_t عزم مقاومة الفتل . φ زاوية الفتل .
l طول القضيب . G عامل القص . • مكان تشكل الإجهاد المماسي الأعظمي .

	المقطع العرضي		عزم عطالة الفتل I_t	العزم المقاوم للفتل W_t	ملاحظات
مقاطع مليئة (صماء)	دائرة		$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	
	حلقة دائرية		$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{16}\,\frac{D^4 - d^4}{D}$	
	قطع ناقص		$\frac{\pi}{16}\,\frac{A^3 \cdot B^3}{A^2 + B^2}$	$\pi\,\frac{A \cdot B^2}{16}$	ينصح في حالة المقاطع العرضية غير المنتظمة استخدام المقطع الناقص المماس كمقطع عرضي بديل
	سداسي منتظم		$0,133\ d^4$	$0,188\ d^3$	
	ثماني منتظم		$0,130\ d^4$	$0,185\ d^3$	
	مستطيل	$d > b$	$\beta\, b^3\, d$	$\alpha\, b^2\, d$	
	مثلث متساوي الأضلاع		$\frac{\sqrt{3}}{80}\, a^4$	$\frac{a^3}{20}$	

d/b	1,00	1,25	1,50	2,00	3,00	4,00	6,00	10,00	∞
α	0,208	0,221	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,313	0,333
β	0,140	0,171	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,313	0,333

		المقطع العرضي	I_t عزم عطالة الفتل	W_t العزم المقاوم للفتل	ملاحظات
مقاطع عرضية رقيقة الجدار	مقطع عرضي مفتوح	s, δ	$\frac{1}{3}\delta^3 s$	$\frac{1}{3}\delta^2 s$	*) لتصميم المقطع العرضي يمكن أن يتم توزيع عزم الفتل على المقاطع العرضية الجزئية بافتراض أن كافة المقاطع الجزئية تعاني نفس الدوران وبذلك يتم التوصل لعزوم الفتل الجزئية التالية : $M_{ti} = M_t \frac{I_{ti}}{\sum I_{ti}}$ حيث أن I_{ti} هو عزم عطالة الفتل للمقطع العرضي الجزئي i
	مقطع عرضي مركب من مستطيلات	S_1, S_2, S_3, S_4, δ_1, δ_2, δ_3, δ_4	$\sim\frac{1}{3}\sum_i^m \delta_i^3 S_i$ الشكل المرسوم جانباً : $\frac{1}{3}(\delta_1^3 S_1+\delta_2^3 S_2+\delta_3^3 S_3+\delta_4^3 S_4)$	$\frac{I_t}{\max\delta}$ *)	
	بروفيلات	δ_1, δ_2, δ_3, S_1, S_2 بروفيلات ذات تدوير جيد عند نقاط التحول	(FÖPPEL) علاقة تقريبية حسب فوبل $\frac{\eta}{3}\sum_i^m \delta_i^3 S_i$ η عامل التصحيح ويتم الحصول عليه من تجارب الفتل	$\frac{I_t}{\max\delta}$	قيم η لبعض البروفيلات L: 0,99 — [: 1,12 — I: 1,12 — I: 1,31 — IP: 1,29
	مقطع عرضي مغلق	U, Fm, δ	$\frac{4F_m^2}{\oint\frac{ds}{\delta}}$ $\oint = \int_U$ من أجل $\delta=const.$ $\frac{4F_m^2\delta}{U}$ **)	$2F_m \min\delta$	**) δ سماكة الجدار . F_m المساحة المحصورة ضمن الخط الأوسط (السطح المهشر) U طول الخط الأوسط (طول محيط المقطع المنصف)
	مقطع عرضي صندوقي	δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, b, d $\delta_1, \delta_3 \ll b$; δ_2 و $\delta_4 \ll d$	$\frac{4bd}{\frac{1}{b\delta_1}+\frac{1}{d\delta_2}+\frac{1}{b\delta_3}+\frac{1}{d\delta_4}}$	$2bd\min\delta$	
	أنبوب (مقطع دائري رقيق)	δ, d $\delta \ll d$	$\frac{\pi}{4}d^3\delta$	$\frac{\pi}{2}d^2\delta$	حيث أن d هو القطر الأوسط δ هي سماكة الجدار

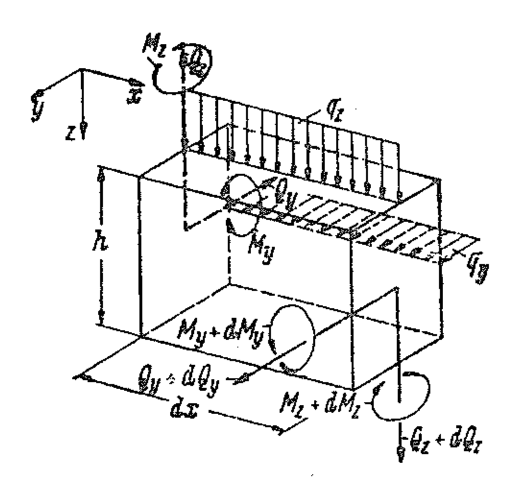
الفصل الثامن

اسس (مبادىء) نظرية الانعطاف التقنية

GRUNDLAGEN DER TECHNISCHEN BIEGELEHRE

٨ ـ ١ مقـدمـة

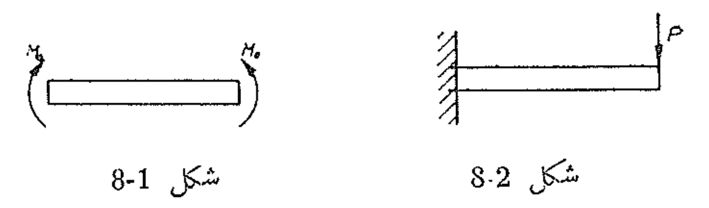
يطلب من القضبان المدروسة أن تكون ابعاد مقاطعها العرضيـة اصغر بكثير من طولها . تحمل هذه القضبان بعزوم تتعامد أشعتها مع المحور المركزي أو بقوى عموديـة على المحـور الاوسط للقضيب (بقوى او مزدوجات قوى تقع في مستوي واحـد ، يسمى **مستوي التحميل** ، ويمر من المحور الاوسط للقضيب) (شكل 8-1a) . ينبغي ان لا تتخطى الاجهادات المتشكلة حد التناسب بحيث تتحقق فيها صلاحية قانون هوك . يمكن ادخال تأثير القوة الناظميـة (القوة الطولية) على الاجهادات بخطوات لاحقة وبالاستفادة من قانون جمع الافعال (قانون التنضد) .



شكل 8-1a

عندما يحمل القضيب بعزم انعطاف ثابت M_0 فقط (شكل 8-1) عندئذ تتشكل فيـه حالة **الانعطاف الصافي** (الانطاف المجرد) وفي هذه الحالة تنعدم القوى العرضيـة . أثناء التغير لا تتشوه المقاطع العرضية بل تبقى مستوية .

اذا كان توزيع عزم الانعطاف على طول المحور للقضيب متغيراً (شكل 8-2) عندئذ تظهر في المقطع العرضي قوى عرضية $(Q = dM/dx \neq 0)$ ايضاً . تسمى هـذه الحالة **بانعطاف القوة**



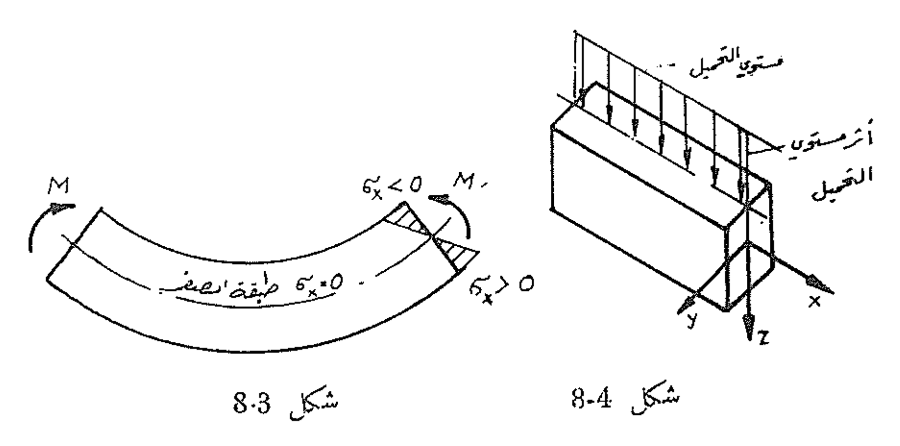
شكل 8-1 شكل 8-2

العرضية . فعلاوة على الاجهادات الناظمية الناتجة عن عزم الانعطاف تتشكل ايضاً في مستوي المقطع العرضي اجهادات مماسية ناتجة عن القوى العرضية . يدرس كل من هذين الحدين ، في مقاومة المواد التقنيه ، منفصلا (على حدة) . أما الخطأ الذي ينجم عن الدراسة المنفصلة لحدي الاجهاد فهو ضئيل وذلك لأن الاجهاد المماسي في القضبان النحيفة (النحيلة ، الهيفاء) صغير بالنسبه للاجهاد الناظمي (يأخذ الاجهاد المماسي أهميه كبيرة في القضبان القصيرة وفي المقاطع البروفيليه الرقيقة فقط) ولذلك تستخدم في حالة انعطاف القـوة العرضية نفس العـلاقات التي تستخدم من اجل الانعطاف الصافي (الانعطاف المجرد) . وتسمى نظرية الانعطاف التي تسمح بذلك **بنظرية الانعطاف التقنية** . سوف يلجأ أثناء معالجة الانعطاف للاستعانة بفرضيـة برنولي (BERNOULLI sche Hypothese) في بقاء المقاطـع العرضية مستوية بعد التغير والتي تنص بالتفصيل على ما يلي :

تبقى المقاطع العرضية الناظمية (العموديـة) على المحور الاوسط للقضيب الـتي كانت مستوية قبل التغير ، مستوية اثناء الانعطاف كما انها تبقى بعد التغير ناظمية على المحور الاوسط للقضيب المنعطف . تبعد هـذه الفرضية تأثير الاجهـادات المماسية على المقطع العرضي وتتحقق بشكل دقيق في الانعطاف الصافي .

تتطابق نتيجة تطبيق فرضية برنولي على القضبان المستقيمة مع نتيجة فرضيـــة التوزيع الخطي للاجهادات (فرضية نافيير) . يؤدي تطبيق فرضية برنولي على القضبان ذات الانحنـاء الكبير الى توزيع لاخطي للاجهاد .

تبعا لاتجاه عزم الانعطاف الذي يؤثر على المقطع العرضي فان بعض مناطق المقطع العرضي (بعض المحاور ، بعض الألياف) تكون مضغوطة ($\sigma<0$) وبعض المناطـق الاخرى تكون مشدودة $\sigma>0$. يسمى السطح الذي ينعدم فيه الاجهاد الناظمي والذي لا يتغير طوله والذي يقع بين مجال الشد وبين مجال الضغط (شكل 8-3) **بطبقة الصفر او الطبقة المحايدة** (الحيادية) كما يسمى الخط الناتج عن تقاطع هذا المستوي مع المقطع العرضي **بالمحور الحيادي او خط الصفر.** يسمى الخط الذي يرسمه مستوي التحميل على المقطع العرضي **بأثر مستوي التحميل** (أوباختصار **أثر التحميل**) (شكل 8-4) .



شكل 8-3 شكل 8-4

علاوة على تقسيم الانعطاف الى انعطاف صافي وانعطاف قوة عرضية وكذلك الى انعطاف القضبان المستقيمة وانعطاف القضبان دات الانحناء الكبير هناك تقسيم اخر للانعطاف هو الانعطاف المستقيم والانعطاف المنحرف .

يقال عن الانعطاف انه انعطاف مستقيم اذا قطع أثر مستوي التحميل (أثر التحميل) ، المقطع العرضي في محور عطالة رئيسي (أي اذا انطبق أثر مستوي التحميل على أحد محاور العطالة الرئيسية المقطع العرضي)(شكل 8-4) وبذلك ينطبق المحور الحيادي (محور الصفر) على أحد المحاور الرئيسية للمقطع العرضي كما ويتعامد مع مستوي التحميل .

ويقال عن الانعطاف انه انعطاف منحرف اذا لم يقطع اثر مستوي التحميل (أثر التحميل) المقطع العرضي في محور عطالة رئيسي .

ان الهدف من هذا الفصل هو ايجاد علاقات تربط بين الاجهادات الداخلية وبين القوى الخارجية المطبقة على الجمل الانشائية .

٨ ـ ٢ إنعطاف القضبان الموشورية (Biegung prismatischer stäbe)

القضبان الموشورية هي قضبان مستقيمة لا يتغير مقطعها العرضي على طول القضيب .

٨ ـ ٢ ـ ١ توزيع الاجهادات في الانعطاف المستقيم (الانعطاف وحيد المحور)

يقال عن المقطع العرضي انه في حالة انعطاف مستقيم عندما ينطبق شعاع عزم الانعطاف على احد محاور عطالته الرئيسية ويسمى الانعطاف مستقيما لان المحور الحيادي ينطبق على احد المحاور الرئيسية للعطالة .

لتكن احداثيات المقطع العرضي المدروس y,z هي محاور عطالة رئيسية مركزية له . وليكن تحميل القضيب مؤلفاً من عزم الانعطاف M_y فقط (شكل 8-6) .

أن قيم القطع M_z , M_y, N_x هي محصلات للاجهاد الناظمي σ_x (أو σ_{xx}) وسيفترض انها توابع معروفة معينة بدلالة القوى الخارجية وردود الافعال .

لمعالجة مشكلة تعيين الاجهاد في أية نقطة من المقطع العرضي للجائز يلزم تطبيق قوانين علم السكون (السناتيك) للاجسام الصلبة وذلك للحصول على علاقة تربط بين القوى الخارجية وبين الاجهادات الداخلية . أما شروط التوازن العامة المستخدمة في علم السكون فهي :

$$\sum_i K_{xi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{zi} = 0$$

$$\sum_i M_{xi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{zi} = 0$$

بما أن الاجهادات الناظمية في مستوي القطع تشير باتجاه المحور x فان شروط التوازن التالية :

$$\sum_i K_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{zi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{xi} = 0$$

تتحقق من البداية . أما تطبيق ما تبقى من شروط التوازن على سطح القطع x = const. فيعطي العلاقات التالية :

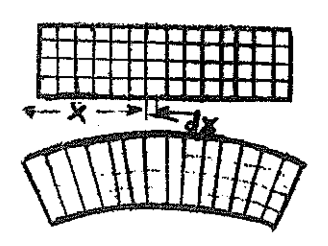
$$\sum K_{xi} = 0 \quad : \quad \int_F \sigma_x \, dF = 0$$

$$\sum M_{zi} = 0 \quad : \quad \int_F \sigma_x \, y \, dF = 0 \qquad (8\text{-}1)$$

$$\sum M_{yi} = 0 \quad : \quad \int_F \sigma_x \, z \, dF = M_y$$

لكن المعادلات الشرطية هذه (العلاقة 8-1) الناتجة عن شروط التوازن لا تكفي وحدها لتحديد توزيع الاجهادات الناظمية بشكل معين . ولذلك فان مشاكل الانعطاف تعتبر مشاكل غير مقررة ستاتيكياً . وحتى يستطاع حلها ينبغي اللجوء لدراسة شروط التغير . لقد ثبت للباحثين على مرور الزمن من خلال نتائج التجارب المجراة على قضبان الانعطاف بأن كل النقاط التي تقع قبل التغير على مستوي عمودي على المحور الاوسط للقضيب ، تقع ايضاً بعد التغير على مستوي واحد وهو عمودي على المحور الاوسط للقضيب المتغير (المنعطف) (شكل 85)

ولقد كان اول من توصل لهذه الحقيقة التجريبية هو العالم برنولي (BERNOULLI) ونسبة له تسمى فرضية بقاء المقاطع العرضية مستوية **بفرضية برنولي** وتسمى نتيجة هذه الفرضية **بشروط التوافق** .



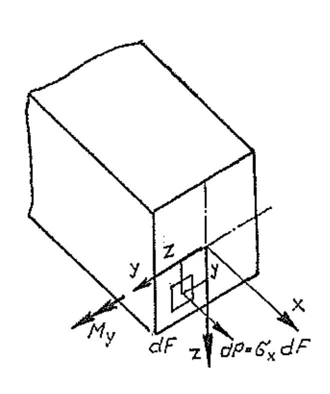
شكل 8-5

حسب فرضية برنولي يمكن إعتبار جميع طبقات المحاور (طبقات الآلياف) كدوائر مركزية تتمركز حول نقطة مركز الانحناء K (شكل 8-7) . انطلاقاً من الطبقة غير المتغيرة في الطول (غير المتمددة) يتم الحصول ، بالاستعانة بنصف قطر الانحناء $\rho = \rho(x)$ ، على التغير النسبي الطولي لطبقة الياف تبعد z عنها :

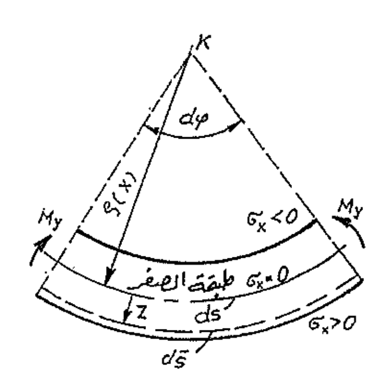
$$\varepsilon = \frac{d\bar{s}-ds}{ds} = \frac{(\rho+z)d\varphi-\rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{z}{\rho(x)} \qquad (8\text{-}2)$$

وبذلك يأخذ قانون هوك للاجهادات الناظمية الشكل التالي :

$$\sigma_x = \varepsilon_x E = E\,\frac{z}{\rho(x)} \qquad (8\text{-}3)$$



شكل 8-6



شكل 8-7

بالاعتماد على العلاقة (8-3) فان شروط التوازن (8-1) تأخذ الشكل التالي :

$$\int_F \sigma_x dF = \frac{E}{\rho(x)} \int_F z\, dF = 0$$

لانعدام العزم الستاتيكي بالنسبة للمحاور المركزية ينبغي اذاً أن يمر محور الصفر (المحور الحيادي) في حالة الانعطاف الصافي (الانعطاف المجرد) من مركز ثقل المقطع العرضي . وبذلك ينطبق المحور x على المحور الاوسط للقضيب .

$$\int_F \sigma_x y\, dF = \frac{E}{\rho(x)} \int_F y z\, dF = \frac{E}{\rho(x)} I_{yz} = 0$$

يتحقق تطابق هذه المعادلة من أجل محاور المطالة الرئيسية ($I_{yz} = 0$) .

$$\int_F \sigma_x z\, dF = \frac{E}{\rho(x)} \int_F z^2\, dF = M_y$$

استناداً الى العلاقة (1-1) فان العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{E}{\rho(x)} = \frac{M_y}{I_{yy}}$$

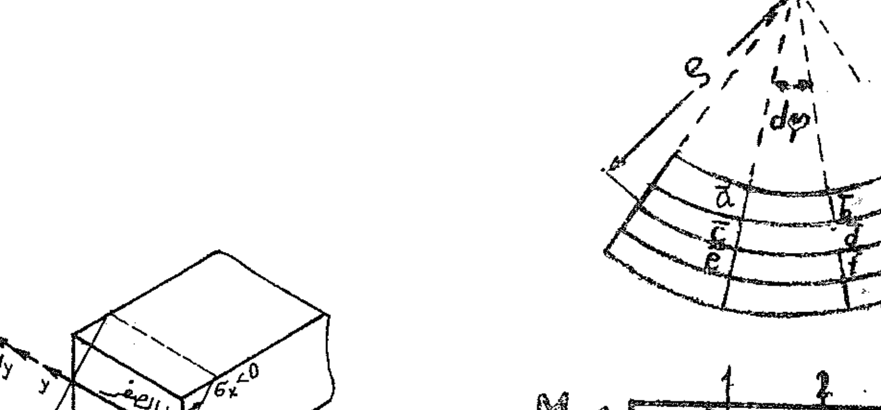
وبمقارنة هذه النتيجة مع العلاقة (8-3) يتم الحصول على علاقة توزيع الاجهاد الناظمي في حالة الانعطاف البسيط (الانعطاف وحيد المحور ، الانعطاف المستقيم) :

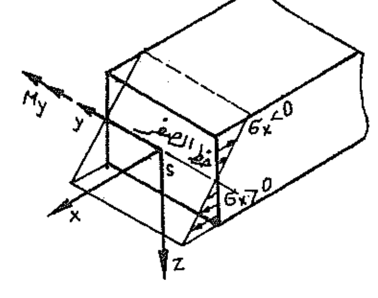
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z \qquad (8\text{-}4)$$

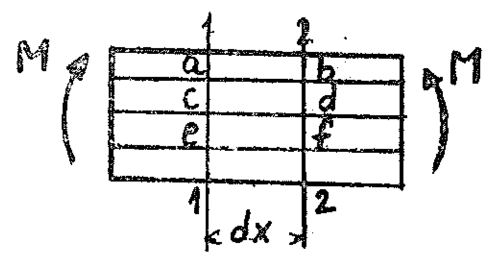
يتحدد خط الصفر (المحور الحيادي) بواسطة المستقيم $z = 0$. تتشكل الاجهادات الناظمية الاعظمية على حواف المقطع العرضي (شكل 8 8) .

بالامكان التوصل لنفس النتيجة السابقة (العلاقة 8-4) وذلك كما يلي :

ليقتطع من الجائز غير المحمل (من الجائز قبل التحميل) عنصراً تفاضلياً طوله dx بعد التحميل ينعطف الجائز (يغير شكله) فيصبح طول العنصر $d\bar{x}$ (ان الشكل a b c d هو شكل العنصر قبل التحميل أما الشكل $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\ \bar{d}$ فهو شكل العنصر بعد التحميل) (شكل 8-9) .







شكل 8-8

شكل 8-9

نتيجة للتحميل تدور المقاطع العرضية للعنصر بالنسبة لبعضها بالزاوية $d\varphi$.

علاقة التغير النسبي (التمدد) :

$$\varepsilon_x = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \frac{\Delta\, dx}{dx} \qquad (8\text{-}5)$$

فرضية برنولي (شرط التوافق) :

$$\varepsilon_x = \bar{a} + \bar{b}y + \bar{c}\,z \qquad (8\text{-}6)$$

حيث أن $\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}$ هي ثوابت المعادلة (أمثال المعادلة) .

قانون هوك للاجهادات الناظمية (وهو يربط بين شروط التوازن وبين شرط التوافق) :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \qquad (8\text{-}7)$$

بتبديل العلاقة (8-6) في (8-7) يتم الحصول على قانون هوك كتابع للاحـــداثيات z , y (احداثيات المقطع العرضي) :

$$\sigma_x = E\bar{a} + E\bar{b}\,y + E\bar{c}\,z$$

باستبدال الثوابت السابقة المضروبة بعوامل المرونة ، بثوابت جديدة ينتج :

$$\sigma_x = a + b\,y + c\,z \qquad (8\text{-}8)$$

بتبديل هذه العلاقة فى المعادلات (8-1) يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\int_F a\, dF + \int_F b\, y\, dF + \int_F c\, z\, dF = 0 \qquad (8\text{-}9)$$

$$\int_F a\, y\, dF + \int_F b\, y^2 dF + \int_F c\, y\, z\, dF = 0 \qquad (8\text{-}10)$$

$$\int_F a\, z\, dF + \int_F b\, y\, z\, dF + \int_F c\, z^2 dF = M_y \qquad (8\text{-}11)$$

بسبب كون المحاور z,y محاور مركزية ، فان العزوم الستاتيكية تساوي الصفر :

$$\int_F y\, dF = 0 \quad ; \quad \int_F z\, dF = 0$$

وبسبب كون المحاور أيضاً محاور عطالة رئيسية ينعدم جداء العطالة :

$$\int_F y\, z\, dF = 0$$

بادخال عزوم العطالة :

$$I_{yy} = \int_F z^2 dF \quad ; \quad I_{zz} = \int_F y^2 dE$$

في المعادلات 8-9 حتى 8-11 بعين الاعتبار ، ينتج :

$$a\, F = 0 \quad ; \quad b\, I_{zz} = 0 \quad ; \quad c\, I_{yy} = M_y$$

بسبب كون $F \neq 0$ و $I_{yy} \neq 0$ فان حل المعادلات السابقة يعطي قيم الثوابت :

$$a = 0 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = \frac{M_y}{I_{yy}} \qquad (8\text{-}12)$$

بتبديل هذه النتيجة في المعادلة (8-8) يتم الحصول على علاقة الاجهاد الناظمي المطلوبة :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}}\, z \qquad (8\text{-}13)$$

بواسطه هذه العلاقة يمكن تعيين الاجهاد الناظمي في نقطة ما من المقطع العرضي للجائز . ومنها

يتم التوصل الى ان الاجهاد الناظمي يتوزع خطياً بالنسبة للاحداثي z (الاحداثي الذي يشير باتجاه ارتفاع المقطع العرضي) كما ولا علاقة للاجهاد الناظمي بالاحداثي y (الاحداثي الذي يشير الى عرض المقطع العرضي) .

ينعدم الاجهاد الناظمي في جميع نقاط المقطع العرضي التي تقع على المستقيم z=0 ويسمى المستقيم المذكور بالمحور الحيادي (خط الصفر) .

يتعامد المحور الحيادي المذكور ، في حالة الانعطاف البسيط (وعندما ينطبق أحد محاور العطالة الرئيسية للمقطع العرضي على أثر مستوي التحميل أو بكلام مماثل عندما ينطبق شعاع العزم على احد محاور العطالة الرئيسية للمقطع العرضي) ، دائماً مع أثر مستوي التحميل .

ليراعى الانتباه الى ان عزم العطالة في المعادلة (8·13) يؤخذ بالنسبة للمحور الحيادي .

٨ - ٢ - ٢ تصميم (تحديد أبعاد) المقاطع العرضية في حالة الانعطاف البسيط

بالاعتماد على العلاقة 8,13 يتم حساب الاجهادات الناظمية الاعظمية بالشكل التالي :

$$\max \sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} \max\ z = \frac{M_y}{W_y}$$

يجب أن يتم تصميم (تحديد ابعاد) قضيب محمل على الانعطاف انطلاقاً من فكرة عدم تخطي الاجهادات الفعلية الموجودة في المقطع العرضي للاجهاد المسموح للمادة (الذي يتعلق بالمادة وبنوع الحمولة) . بما ان الاجهاد الناظمي الأعظمي في المقطع العرضي يتم في المكان الذي يتشكل فيه عزم الانعطاف الأعظمي ، اذاً ينبغي ان تحقق الاجهادات الأعظمية العلاقة التالية :

$$|\max\ \sigma_x| = \frac{|\max\ M_y|}{W_y} \leqq \text{zul}\ \sigma \qquad (8\text{-}14)$$

من هذه العلاقة يتم الحصول على العزم المقاوم اللازم والذي يتبع حالة تحميل واجهاد مسموح معلومين ، بالشكل التالي :

$$\text{erf}\ W_y = \frac{|\max\ M_y|}{\text{zul}\ \sigma} \qquad (8\text{-}15)$$

٨ ـ ٢ ـ ٣ توزيع الاجهادات في الانعطاف المنحرف

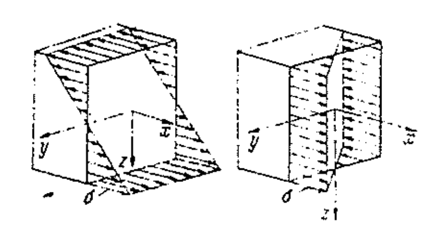
يقال عن المقطع العرضي انه في حالة الانعطاف المنحرف عندما لاينطبق شعاع عزم الانعطاف على أحد محاوره الرئيسيـة بل يأخذ اتجـاهاً ما في مستوي المقطع العرضي (او بكلام اخر مماثل عندما لاينطبق اثر مستوي التحميل على احد محاور العطالة الرئيسية للمقطع العرضي) .

آ ـ استخراج العلاقات بالاعتماد على علاقات الانعطاف البسيط وبتطبيق قانون التنضد

آ ـ α المحاور z , y هي محاور عطالة رئيسية

يمكن اعادة هذه الحالة الى مجموع حالتي انعطاف مستقيم (بسيط). بتحليل شعاع العزم (المؤثر) الى مركبتين باتجاه محاور العطالة الرئيسية (شكل 8-10) ينتج :

$$M_y = M \cos \alpha \quad ; \quad M_z = M \sin \alpha \qquad (8\text{-}16)$$



شكل 8-9 c

بجمع حدود الاجهاد الناتجة عن كل من M_z, M_y (شكل 8-09c) يتم الحصول على اجهاد الانعطاف (الاجهاد الناظمي الناتج عن عزم الانعطاف) التالي :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y \qquad (8\text{-}17)$$

او

$$\sigma_x = M \left(\frac{\cos \alpha}{I_{zz}} z - \frac{\sin \alpha}{I_{zz}} y \right) \qquad (8\text{-}18)$$

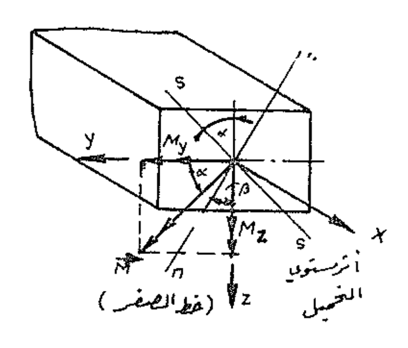
يرسم التوزيع الخطي للاجهاد الناظمي مستو مائل . بتبديل $\sigma_x = 0$ في العلاقة (8-18) يتم الحصول على معادلة خط الصفر (المحور الحيادي) التالية :

$$z = y \operatorname{tg} \alpha \qquad (8\text{-}19)$$

من هذه العلاقة يتبين أن المحور الحيادي في حالة الانعطاف المنحرف هو مستقيم يمر من مركز الثقل ويشكل مع المحور z الزاوية β التي تتعين بالعلاقة التالية :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{z} = \frac{I_{zz}}{I_{yy}} \operatorname{ctg} \alpha \qquad (8\text{-}20)$$

تتشكل الاجهادات الناظمية الاعظمية في نقاط المقطع العرضي التي لها اكبر بعد عن محور الصفر (المحور الحيادي ، المحور السليم) .

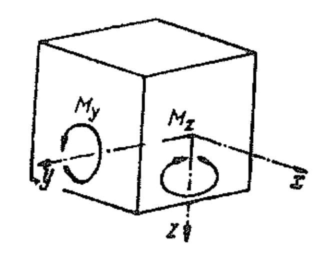


شـــــكل 8-10

ب ـ استخراج العلاقات بواسطة الاشتقاق

ب ـ α المحاور z, y هي محاور رئيسية

ان z,y,x هي مجموعة محاور احداثية مركزية متعامدة ينطبق منهـا المحور x على المحور الاوسط للقضيب أما المحاور z,y فتنطبق على محاور العطالة الرئيسية للمقطع العرضي .
تنعدم القوة العرضية Q والقوة الناظمية (الطولية) N (في الحالات التي لاتنعدم فيها القوة العرضية يهمل تأثيرها على الانعطاف . اما تأثير القوة الناظمية فيدرس ، في خطوات لاحقة ، في بحث الانعطاف المركب). يتعامد شعاع عزم الانعطاف M مع مستوي التحميل . يرمز لمركبة العزم التي ينطبق شعاعها على المحور y بالرمز M_y كما يرمز لمركبة العزم التي يشير شعاعها الى اتجاه المحور z بالرمز M_z (شكل 8-10 c) .



شكل 8.10c

شروط التوازن :

لمعالجة مشكلة تعيين الاجهاد الذي يتشكل في نقطة ما من المقطع العرضي للجائز ينبغي تطبيق شروط التوازن التالية (وذلك للحصول على علاقات تربط بين قيم المقطع M_z, M_y وبين الاجهاد الناظمي $(\sigma_x\ (y,z))$:

$$\Sigma K_{x\,i} = 0 : \int_F \sigma_x dF = 0$$

$$\Sigma M_{y\,i} = 0 : \int_F \sigma_x\ z\, d F = +\ M_y \qquad (8\text{-}21)$$

$$\Sigma M_{z\,i} = 0 : \int_F \sigma_x\ y\ d F = -\ M_z ,$$

حيث ان :

$$M_y = M \cos \alpha \quad ; \; M_z = M \sin \alpha \qquad (8\text{-}22)$$

اما شروط التوازن المتبقية $\Sigma M_{x\,i} = 0$, $\Sigma K_{z\,i}$, $\Sigma K_{y\,i} = 0$ فهي محققة من البداية. لاتكفي المعادلات الناتجة عن شروط التوازن وحدها لمعرفة توزيع الاجهاد في الانعطاف المنحرف ، مما يجعل ايجاده مشكلة غير مقررة ستاتيكياً ، وهذا يلزم التفتيش عن معادلات اخرى تشتق من شروط التغير للجملة .

شروط التوافق :

بالاستعانة بفرضية برنولي ينتج :

$$\varepsilon_x = \bar{a} + \bar{b}\, y + \bar{c}\, z \qquad (8\text{-}23)$$

قانون هوك (للاجهادات الناظمية) :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \tag{8.24}$$

بتبديل شرط التوافق (8-23) في قانون هوك (8.24) فانعلاقة الاجهاد تأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_x = E\bar{a} + E\bar{b}y + E\bar{c}z \tag{8.25}$$

بالاستعاضة عن الثوابت $E\bar{c}, E\bar{b}, E\bar{a}$ بثوابت جديدة ينتج :

$$\sigma_x = a + by + cz \tag{8.26}$$

تشير هذه العلاقة إلى توزيع خطي للاجهاد في حالة الانعطاف المنحرف للقضبان المستقيمة وهي تمثل معادلة مستوي الاجهاد . بتبديل علاقة الاجهاد (8.26) في معادلات التوازن (8-21) ينتج :

$$\int_F a\,dF + \int_F by\,dF + \int_F cz\,dF = a\int_F dF + b\int_F y\,dF + c\int_F z\,dF$$

$$= aF + bS_z + cS_y = 0$$

$$\int_F az\,dF + \int_F byz\,dF + \int_F cz^2\,dF = a\int_F z\,dF + b\int_F yz\,dF + c\int_F z^2\,dF \quad (8\text{-}22)$$

$$= aS_y + bI_{yz} + cI_{yy} = M_y$$

$$\int_F ay\,dF + \int_F by^2\,dF + \int_F cyz\,dF = a\int_F y\,dF + b\int_F y^2\,dF + c\int_F yz\,dF$$

$$= aS_z + bI_{zz} + cI_{yz} = -M_z$$

بسبب كون المحاور z,y محاور مركزية فان العزوم الستاتيكية بالنسبة لها تساوي الصفر :

$$S_y = S_z = 0 \tag{8-23}$$

وبسبب كون المحاور z , y محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي F فان جداء العطالة بالنسبة لها يساوي الصفر :

$$I_{yz} = I_{zy} = 0 \qquad (8\text{-}24)$$

بأخذ ما ذكر من الصفات (العلاقتين (8-24) و (8-23)) في العلاقة (8.22) بعين الاعتبار ينتج :

$$aF = 0$$

$$cI_{yy} = M_y \qquad (8\text{-}25)$$

$$bI_{zz} = -M_z$$

بحل مجموعة المعادلات (8-25) يتم الحصول على قيم الثوابت (حيث ان $F \neq 0$, $I_{yy} \neq 0$, $I_{zz} \neq 0$):

$$a = 0 \;,\; b = -\frac{M_z}{I_{zz}} \;,\; c = \frac{M_y}{I_{yy}}$$

بتعويض هذه القيم في المعادلة ،(8-26) يتم الحصول على علاقة توزيع الاجهاد التالية :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y \qquad (8\text{-}26)$$

أو

$$\sigma_x = M \left(\frac{\cos\alpha}{I_{yy}} z - \frac{\sin\alpha}{I_{zz}} y\right) \qquad (8.27)$$

بواسطة هاتين العلاقتين يتم تعيين توزيع الاجهاد الناظمي في حالة الانعطاف المنحرف . تبدل الزاوية α ، المتشكلة بين شعاع العزم ومحور y الموجب ، باشارة موجبة حسب المفهوم الموجب الرياضي .

ب ـ β المحاور z,y هي أية محاور مركزية (ليست محاور عطالة رئيسية)

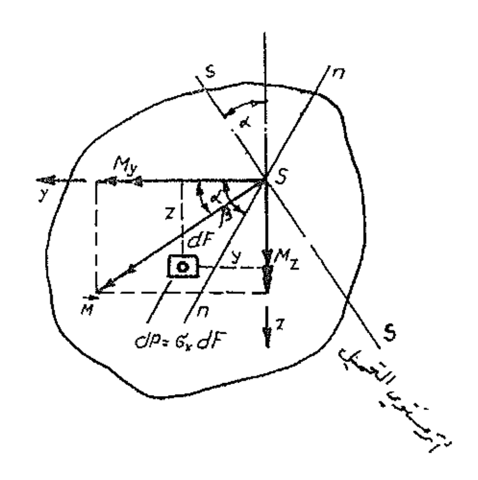
تمثل هذه الحالة ، الحالة العامة للانعطاف المنحرف للقضبان الموشورية وهي تحتوي على كل الحالات الخاصة السابقة (شكل 8-11) .

يعطي تطبيق شروط التوازن ، العلاقات التالية :

$$\Sigma K_{xi} = 0 \;:\; \int_F \sigma_x \, dF = 0$$

$$\Sigma M_{yi} = 0 \;:\; \int_F \sigma_x z \, dF = M_y \qquad (8.28)$$

$$\Sigma M_{zi} = 0 \;:\; \int_F \sigma_x y \, dF = -M_z$$



شكل 8-11

حيث أن :

$$M_y = M \cos \alpha \quad ; \quad M_z = M \sin \alpha \qquad (8\text{-}29)$$

أما شروط التوازن المتبقية $\Sigma K_{y\,i} = 0 \;;\; \Sigma K_{z\,i} = 0 \;;\; \Sigma M_{x\,i} = 0$ فهي محققة من البداية . بسبب التوزيع الخطي للاجهادات الناظمية في حالة انعطاف القضبان المستقيمة يمكن الاستعاضـة عن σ_x بمعادلة المستوي التالية :

$$\sigma_x = a + b\,y + cz \qquad (8\text{-}30)$$

يتم الحصول على هذه العلاقة بتبديل علاقة التغير النسبي (التمدد) ε_x التي يتم الحصـول عليهـا إستناداً على فرضية برنولي في قانون هوك للاجهادات الناظمية . بتبديل العلاقة (8-30) في علاقات شروط التوازن (8-28) يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$aF + b\int_F y\,dF + c\int_F z\,dF = 0$$

$$a\int_F z\,dF + b\int_F y\,z\,dF + c\int_F z^2\,dF = M_y \qquad (8\text{-}31)$$

$$a\int_F y\,dF + b\int_F y^2\,dF + c\int_F y\,z\,dF = -M_z$$

بحل هذه المعادلات ، يتم تعيين الثوابت a , b , c :

$$a = 0 \; ; \; b = \frac{-M_y I_{yz} - M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \; ; \; c = \frac{M_y I_{zz} + M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}} \quad (8\text{-}32)$$

وبتبديلها في العلاقة (8-30)يتم الحصول على توزيع الاجهاد الناظمي ممثلاً بالشكل الآتي :

$$\sigma_x = \frac{-M_y I_{yz} - M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \, y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \, z \qquad (8\text{-}33)$$

أو ، بعد تبديل العلاقة(8-29)في العلاقة(8-28)، ممثلا بالشكل الآتي :

$$\sigma_x = [(-I_{yz} \cos\alpha - I_{yy} \sin\alpha)y + (I_{zz} \cos\alpha + I_{yz} \sin\alpha)z] \frac{M}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (8\text{-}34)$$

بواسطة $\sigma_x = 0$ يتم الحصول ، من العلاقة 8-34 ، على معادلة خط الصفر (المحور الحيادي) التـالية :

$$z = \frac{I_{yy} \, tg\alpha + I_{yz}}{I_{zz} + I_{yz} \, tg\alpha} \, y = tg\,\beta \cdot y \qquad (8\text{-}35)$$

من المعادلات (8-33) , (8-34) يمكن الحصول على جميع الحالات الخاصـة للانعطاف الصافي (الانعطاف المجرد) .

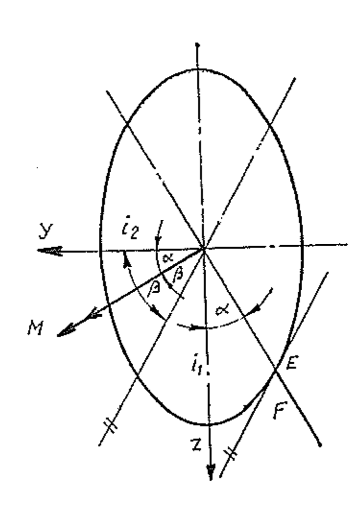
هناك طريق آخر لتعيين توزيع الاجهادات الناظمية في حالة الانعطاف المنحرف ، غير الطريق السابق ، يمكن اتباعه الا وهو ايجاد محاور العطالة الرئيسية (s_1 , s_2) وعـــزوم العطالة الرئيسية (I_1 , I_2) المقطع العرضي المدروس (شكل 8-12) . بعد ذلك تحليل عزم الانعطاف M لمركبات بالاتجاهين s_1 , s_2 . أما توزيع الاجهاد الناظمي فيتم الحصول عليـــه عندئذ من العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \frac{M \cos\alpha}{I_1} \, s_2 - \frac{M \sin\alpha}{I_z} \, s_1$$

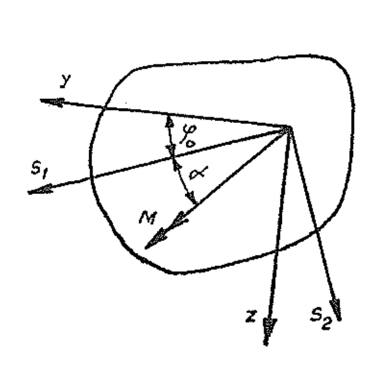
وهذا الحل لا بأس به ولكن يعيبه أمران :

أولهما : التعثر الذي قد يحدث في تحديد المحورين الرئيسين وقيمة عزوم العطالة الرئيسية بالنسبـة لـكل منهما .

وثانيهما : ضرورة إيجاد عزوم الانعطاف بالنسبة لهذين المحورين وما قد يرافق هـــذا من مشقة وحاجة الى ايجاد الابعاد من الرسم واحتمال عدم دقة هذا الرسم الى الحد المطلوب .



شكل 8-13



شكل 8-12

كل هذا دفـع الى التفكير في طريقة اخرى والى البحث عن وسيـلة مناسبـة بدرجة اكبر تؤدي للحصول على معادلة عامة لتوزيع الاجهاد في حالة الانعطاف المنـحرف ، تصـلح لكل اوضاع المحاور المركزية z,v .

ج ـ الطرائق التخطيطية لتعيين المحور الحيادي في حالة الانعطاف المنحرف

لتعيين موضع المحور الحيادي بسرعة يمكن أيضاً علاوة على الطريق التحليـلي اتبـاع الطرائق التخطيطية التـالية :

ج ـ ١ تعيين المحور الحيادي تخطيطياً بالاستعانة بقطع ناقص العطالة

يحدد اتجاه المحور الحيادي عندما يكون قطع ناقص العطالة معلوماً برسم مماس على القطع يمر من نقطة تقاطع القطع مع أثر مستوي التحميل (شكل 8.13) .

تـكتب معادلة قطع ناقص العطالة بالشكل التالي (انظر العلاقة 1.59 b) :

$$y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} = \text{const.}$$

بواسطة العلاقة التالية :

$$y_E I_{yy} + z_E . z' I_{zz} = 0$$

يتم تحديد اتجاه المماس :

$$z' = - \frac{I_{yy}}{I_{zz}} \cdot \frac{y_E}{z_E}$$

بالاستعانة بالعلاقة :

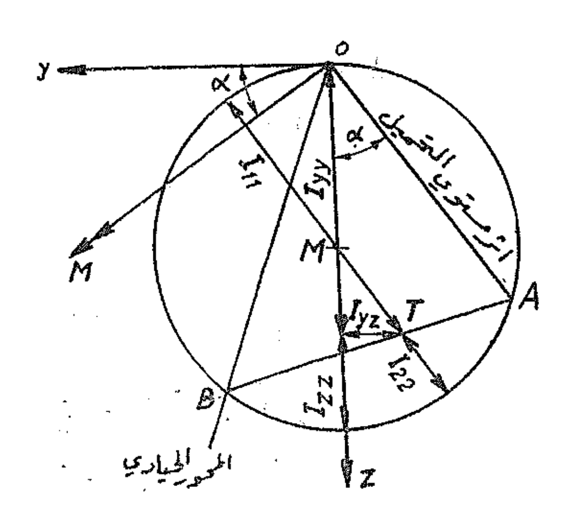
$$-\frac{y_E}{z_E} = tg\ \alpha$$

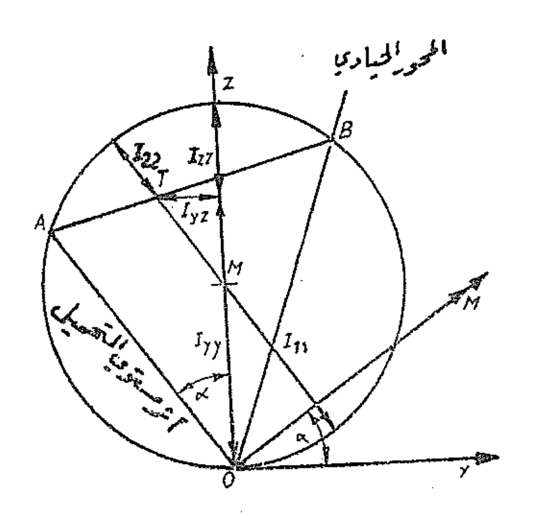
يتم الحصول على معادلة المحور الحيادي التالية :

$$z = \frac{I_{yy}}{I_{zz}}\ y\ tg\ \alpha = y\ tg\ \beta$$

ج - ٢ تعيين المحور الحيادي تخطيطياً بالاستعانة بدائرة عطالة مور - لاند

بالامكان تحديد موضع المحور الحيادي تخطيطياً بالاستعانة بدائرة عطالة مور - لاند (شكل 8-14).





شكل 8.14

يرسم شعاع العزم M حسب اتجاهه ابتداء من مبدأ مجموعة الاحداثيات . يمر مستوي التحميل الذي يتعامد مع شعاع العزم من المستقيم OA . برسم مستقيم يصل بين النقطة A والنقطة الرئيسية للعطالة T والذي يقطع الدائرة في B يتحدد الاتجاه OB الذى يمثل موضع المحور الحيادي . سيتم فيما يلي البرهان على صحة التصميم من خلال حالتين خاصتين .

α - لتكن المحاور z,y محاور عطالة رئيسية المقطع العرضي (شكل 8-15) .

لقد تم تحليليا الحصول على معادلة خط الصفر (المحور الحيادي) التالية :

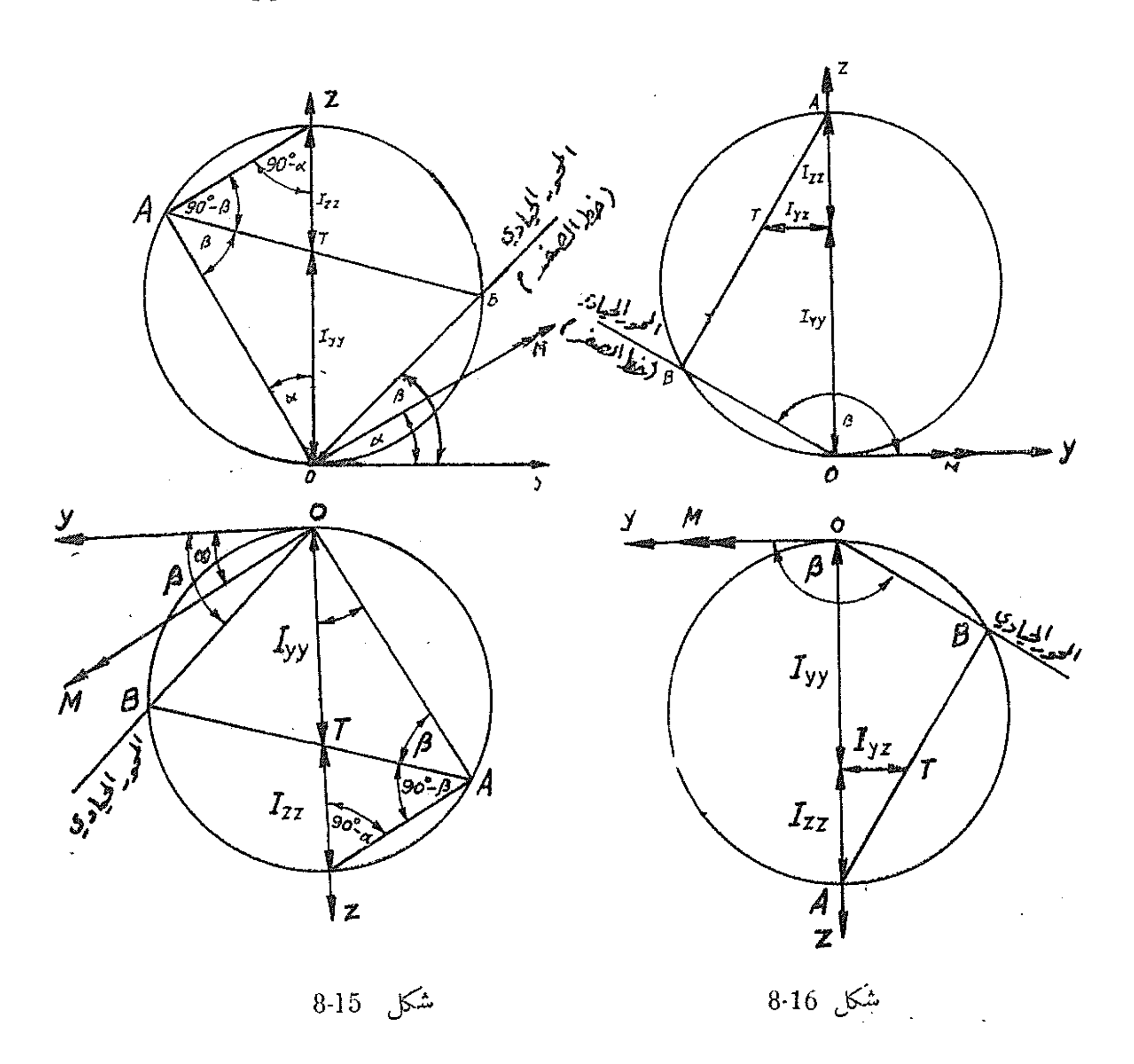
$$z = \frac{I_{yy}}{I_{zz}} \; y \; tg \; \alpha = y \; tg \; \beta$$

من الشكل (8-15) يتم التوصل لما يلي :

$$\frac{\overline{TA}}{I_{zz}} = \frac{\sin\,(90^\circ - \alpha)}{\sin\,(90^\circ - \beta)} \;;\; \frac{\overline{TA}}{I_{yy}} = \frac{\sin\,\alpha}{\sin\,\beta}$$

من هذه العلاقة ينتج :

$$tg\,\beta = \frac{I_{yy}}{I_{zz}} \; tg\,\alpha$$



شكل 8-15

شكل 8-16

β $\alpha=0$ (شكل 8-16) **المحاور z,y ليست محاور رئيسية**

لقد تم تحليلياً الحصول على العلاقة التالية :

$$z = + \frac{I_{yz}}{I_{zz}} \lambda$$

من الاشكال يتم فوراً قراءة هذه العلاقة .

تلخيص طريقة انشاء المحور الحيادي تخطيطياً بواسطة دائرة عطالة مور ـ لاند

α ـ **المحاور z,y محاور عطالة رئيسية .**

المعلوم : $I_{yy} = I_1$, $I_{zz} = I_2$, $I_{yz} = 0$ وكذلك إما شعاع العزم او أثر مستوي التحميل (شعاع العزم دائماً عمودي على اثر مستوي التحميل) .

المطلوب : تعيين موضع المحور الحيادي (محور الصفر) .

الحـل :

بعد اختيار مقياس مناسب للرسم :

١ ـ ترسم الاحداثيات z , y في مركز ثقل المقطع العرضي s.

٢ ـ ترسم عزوم العطالة I_{yy} , I_{zz} ابتداء من s وعلى المحور z .

٣ ـ يرسم أثر مستوي التحميل (عندما يكون شعاع العزم هو المعلوم يقام عليه عمـوداً يمر من مبدأ مجموعة الاحداثيات ، الذي يمثل في نفس الوقت مركز ثقل المقطع العرضي . هـذا العمود يمثل أثر مستوي التحميل) .

٤ ـ تنصف المسافة $I_{yy} + I_{zz}$ في النقطة m .

٥ ـ ترسم دائرة مركزها m ونصف قطرها $(I_{yy}+I_{zz})/2$. فتقطع اثر مستوي التحميـل في النقطة A .

٦ ـ توصل النقطة A والنقطة T بمستقيم فيقطع الدائرة في النقطة B . ان النقطة B هي نقطة من المحور الحيادي .

٧ ـ المحور الحيادي يمر من مركز الثقل . اذاً بوصل s , B يتم الحصول على المحور الحيادي.

β - المحاور z y ليست محاور رئيسية للعطالة .

المعطى: I_{yz} , I_{zz} , I_{yy} وشعاع العزم او اثر مستوي التحميل (شعاع العزم دائماً عمودي على اثر مستوي التحميل) .

المطلوب : تحديد موضع المحور الحيادي .

الحـــل :

بعد اختيار مقياس مناسب للرسم :

١ - ترسم الاحداثيات z , y في مركز ثقل المقطع العرضي s .

٢ - ترسم عزوم العطالة I_{zz} , I_{yy} ابتداء من s وعلى المحور z . أما جـداء العطالة I_{yz} فيرسم عمودياً على المحور z ابتداء من نهاية I_{yy} . ($I_{yz} > 0$ يرسم باتجاه المحور y ، $I_{yz} < 0$ يرسم بعكس اتجاه المحور y) .

٣ - يرسم أثر مستوي التحميل (شعاع العزم M يتعامد على اثر مستوي التحميل) .

٤ - تنصف المسافة $I_{yy}+I_{zz}$ في النقطة m .

٥ - ترسم دائرة مركزها m ونصف قطرها $(I_{yy}+I_{zz})/2$. تقطع هذه الدائرة أثر مستوي التحميل في النقطة A .

٦ - توصل النقطه A والنقطة T بمستقيم فيقطـع الدائرة في النقطـة B . هذه النقطة هي نقطة من المحور الحيادي .

٧ - يمر المحور الحيادي في الانعطاف المنحرف من مركز الثقل s . إذاً بوصل s , B يتم الحصول على المحور الحيادي .

٨ - ٢ - ٤ انعطاف مع قوة ناظمية (الانعطاف المركب)

يقال عن المقطع العرضي انه موجود في حالة انعطاف مركب عندما يقع تحت تأثير عزم انعطاف وقوه ناظمية .

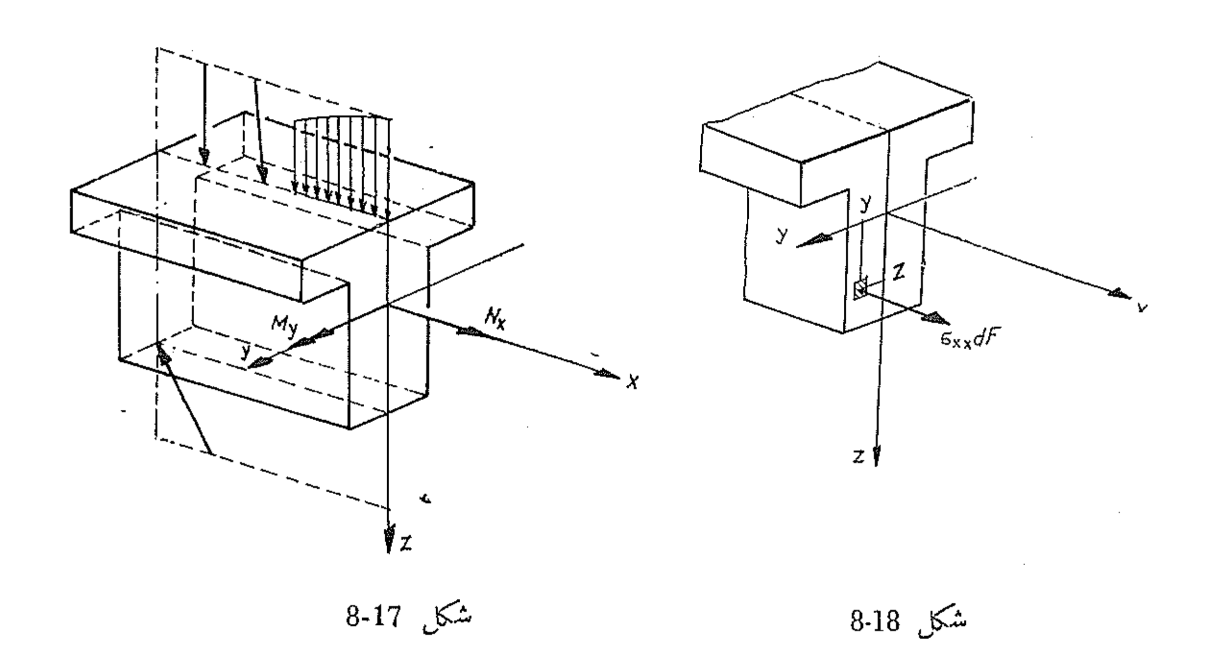
آ - توزيع الاجهاد في حالة الانعطاف البسيط مع القوة الناظمية

فيما يلي سوف تتم دراسة قضيب مستقيم مرن يحتـوي مقطعـه العرضي $x =$ const. على قيم القطع المؤلفة من عزم الانعطاف M_y والقوة الناظمية N_x (شكل 8-17) . أما القـوة العرضية فانها ان وجدت فسوف يغض النظر عنها بشكل مبديء .

آ - ١ أيجاد توزيع الاجهاد في حالة الانعطاف البسيط والقوة الناظمية بالاشتقـاق.

الفرضيات :

تقع الحمولات المؤثرة ؛ في المستوي z,x (مستوي التحميل) فقط .



شكل 8-17

شكل 8-18

المحاور z, y هي محاور عطالة رئيسية ($I_{yz} = 0$) للمقطع العرضي .

فرضية برنولي :

تبقى المقاطع العرضية المستوية العمودية على المحور الاوسط للقضيب قبل التغير ، بعد التغير أيضاً مستوية وعمودية على المحور الاوسط للقضيب المتغير . لانعـــدام القوة العرضية (أو اعتبارها بشكل مبدئي غير موجودة) فان كل عنصر dF من المقطع العرضي يحتوي على الاجهاد الناظمي $\sigma_{xx}(y,z)$ نقط (شكل 8-18) .

لمعالجة مشكلة تحديد الاجهاد الناظمي $\sigma_{xx}(y,z)$ (يمكن كتـابته $\sigma_x(y, z)$) في نقطـة ما من مقطع عرضي لجائز ينبغي تطبيق شروط التوازن التالية :

$$\sum_i K_{xi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{zi} = 0$$

$$\sum_i M_{xi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{zi} = 0$$

بما ان الاجهادات المتشكلة في مستوي المقطع العرضي هي اجهادات ناظمية باتجاه المحور x فقط فان شروط التوازن :

$$\sum_i K_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{zi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{xi} = 0$$

تتحقق من البداية ؛ أما بقية شروط التوازن فانها تعطي المعادلات التالية :

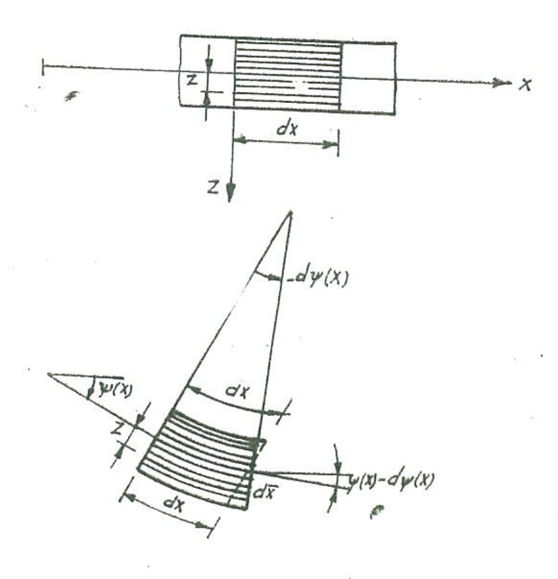
$$\sum_i K_{xi} = 0 \quad ; \int_F \sigma_{xx}\, dF = N_x$$

$$\sum M_{yi} = 0 \quad : \int_F \sigma_{xx}\, z\, dF = M_y \qquad (8.36)$$

$$\sum M_{zi} = 0 \quad : \int_F \sigma_{xx}\, y\, dF = 0$$

لكن شروط التوازن الممثلة بالمعادلات الثلاثة السابقة لا تكفي وحدها لتعيين توزيع الاجهاد الناظمي وبذلك فان مشكلة ايجاد توزيع الاجهاد في حالة الانعطاف البسيط المركب هي مشكلة غير مقررة ستاتيكياً ، لذلك ينبغي التفتيش عن تغيرات الجائز الممكنة هندسياً .

لقد كانت نتيجة تلك البحوث والدراسات هي التوصل لما يسمى **بشروط التوافق** . تشير فرضية برنولي في حالة **الانعطاف** المستقيم مع القوة الناظمية (الانعطاف المستقيم المركب) إلى دوران المقطعين العرضيين اللامتناهيين في القرب بالزاوية | dφ | الواقعة في المستوي — zx(شكل 19-8).



شكل 19-8

إن استطالة محاور القضيب (آلياف القضيب) dx̄ - dx وكذلك تمددها (تغيرها النسبي الخطي) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d\bar{x} - dx}{dx}$$

هي توابع خطية للاحداثي z وبذلك يمكن التعبير عن فرضية برنولي بالعلاقة التالية :

$$\varepsilon_{xx} = \bar{a} + \bar{b}\, z \qquad (8.37)$$

تسمى هذه المعادلة بشرط التوافق (إن الشكل العام هو $\varepsilon_{xx} = a + bz + cy$. بمتابعة الحساب يثبت ان $c = 0$) . والآن ينبغي بواسطة قانون هوك إيجاد ترابط بين معادلات التوازن(8-36)وبين شرط التوافق(8-37) . بضرب العلاقة (8-37) بعامل المرونة (الطولي) E وبأخذ قانون هوك بعين الاعتبار يتم الحصول على العلاقة الخطية للاجهاد الناظمي التالية :

$$E\, \varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} = a + bz \qquad (8.38)$$

تمثل هذه العلاقة ، التي تربط بين فرضية برنولي الممثلة بشرط التوافق وبين قانون هوك ، العلاقة الخطية لتوزيع الاجهاد الناظمي بالنسبة لارتفاع المقطع العرضي z (بالنسبة للمحور z).
بتبديل العلاقة(8-38)في العلاقات (8-36) وبالاستعانة بالعزوم الستاتيكية وعزوم العطالة بالنسبة للمحاور المركزية الرئيسية التالية :

$$S_y = \int_F z\, dF = 0 \quad ; \quad S_z = \int_F y\, dF = 0$$

$$I_{yy} = \int_F z^2\, dF \quad ; \quad I_{zz} = \int_F y^2\, dF \quad ; \quad I_{yz} = \int_F y\, z\, dF = 0$$

يتم الحصول على ما يلي من العلاقات :

$$\int_F (a + bz)\, dF = a \int_F dF + b \int_F z\, dF = a\, F + b\, S_y = a\, F = N_x$$

$$\int_F z\,(a + bz)\, dF = a \int_F z\, dF + b \int_F z^2\, dF = a\, S_y + b\, I_{yy} = b\, I_{yy} = M_y$$

$$\int_F y\,(a+bz)\, dF = a \int_F y\, dF + b \int_F yz\, dF = a\, S_z + b\, I_{yz} = 0$$

من العلاقتين الاوليتين ينتج :

$$a = \frac{N_x}{F} \quad , \quad b = \frac{M_y}{I_{yy}}$$

أما العلاقة الثالثة فمحققة بالتطابق . وبذلك يتم الحصول من العلاقة (8-38) بعد تبديل الثوابت على توزيع الاجهاد الناظمي لقضيب موشوري محمل على الانعطاف وبقوة ناظمية ، الممثل بالعلاقة التالية :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z \qquad (8.37\ b)$$

حالات خاصة :

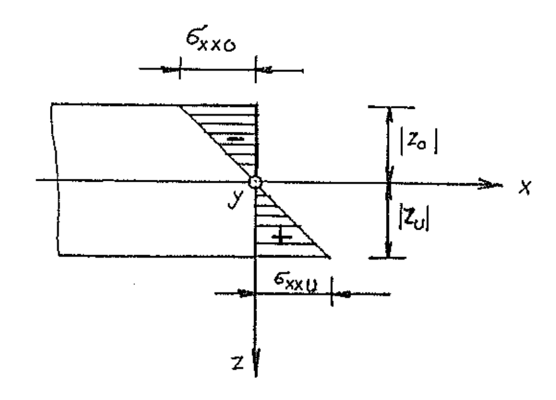
اذا احتوى المقطع العرضي للجائز على قوة ناظمية فقط ، أي $N \neq 0$, $M_y = 0$ عندئـــذ يتشكل في المقطع العرضي إجهاد ناظمي ثابت (التوزيع) :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{F}$$

لقد تم التأكد من هذه الحقيقة أثناء دراسة القضيب المشدود/ المضغوط . أما اذا احتوى المقطع العرضي للجائز على عزم إنعطاف فقط عندئذ يقال عنه انه موجود في حالة انعطـاف صـافي (انعطاف مجرد) أي $N = 0$, $M_y \neq 0$ ، وفي هذه الحالة فان توزيع الاجهاد الناظمي يأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

لقد تم في الشكل (8.20) تمثيل هذه المعادلة من أجل $M_y > 0$.



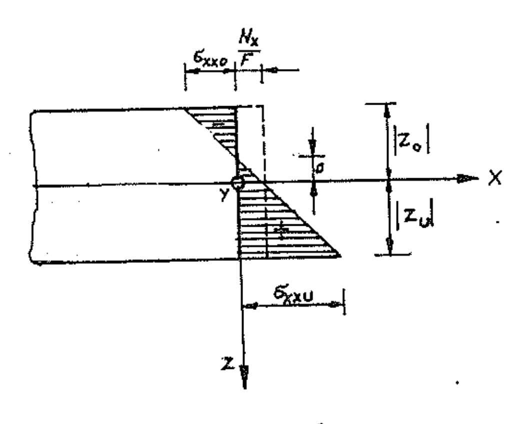
شكل 8.20

ينعدم الاجهاد الناظمي (في حالة الانعطاف البسيط) في نقاط المقطع العرضي التي تقع على المستقيم $z=0$ ويسمى هذا الخط كما سماه العالم نافيير بالمحور الحيادي أو خط الصفر .

في حالة كون $N_x \neq 0$, $M_y \neq 0$ فان توزيع الاجهاد الناظمي يأخذ ، حسب العلاقة (8.37)، الشكل التالي :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z \tag{8.38b}$$

لقد تم في الشكل (8.21) تمثيل الاجهاد الناظمي في حالة كون $N_x > 0$, $M_y > 0$.



شكل 8.21

تبلغ الاجهادات الناظمية على حواف المقطع العرضي القيم التالية :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xxu} &= \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} |z_u| = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_{yyu}} \\ \sigma_{xx0} &= \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} |z_0| = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_{yy0}} \end{aligned}\right\} \tag{8.39}$$

تنعدم الاجهادات الناظمية في النقاط التي تقع على مستقيم يوازي المحور y ويبعد عنه بالمسافة :

$$z_0 = - \frac{N_x}{M_y} \frac{I_{yy}}{F} = - \frac{N_x}{M_y} i_y^2 \tag{8.40}$$

اذاً المستقيم $z=z_0$ هو المحور الحيادي في حالة الانعطاف البسيط مع القوة الناظمية . اذا

كانت قيم إجهادات الشد المسموحة $zul\ \sigma_z$ واجهادات الضغط المسموحة $zul\ \sigma_D$ معلومة فان علاقة الاجهاد الناظمي من أجل الانعطاف المستقيم مع القوة الناظمية هي التالية :

$$zul\ \sigma_D \leqq \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z \leqq zul\ \sigma_z \qquad (8.40b)$$

من هذه العلاقة يتم الحصول على علاقات الكشف عن الاجهادات الناظمية التالية :

$$zul\ \sigma_D \leqq \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{I_{yy}} z \leqq zul\ \sigma_z$$

$$(8.40\ c)$$

$$zul\ \sigma_D \leqq \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{,y}} z \leqq zul\ \sigma_z$$

في حالة الانعطاف الصافي البسيط فان علاقات الكشف عن الاجهادات تأخذ الشكل الآتي :

$$zul\ \sigma_D \leqq -\frac{M_y}{W_{yyo}} \leqq zul\ \sigma_z$$

$$zul\ \sigma_D \leqq \frac{M_y}{W_{yyu}} \leqq zul\ \sigma_z$$

تأخذ هذه العلاقات شكلاً مبسطاً ، عندما تؤخذ القيمة المطلقة $|M_y|$ للعزم M_y ويؤخذ العزم الاصفري $min\ W_{yy}$ وهو التالي :

$$\frac{|M_y|}{min\ M_y} \leqq |zul\ \sigma| \qquad (8\text{-}41)$$

ينبغي في هذه العلاقة أخذ إما $|zul\ \sigma_D|$ $|zul\ \sigma_z|$ واعتباره كـ $|zul\ \sigma|$ وذلك حسبما تكون الاجهادات الموجودة هي اجهادات شد أو اجهادات ضغط . لتصميم المقطع العرضي للجائز وفي حالة كون عزم الانعطاف والاجهاد المسموح معلومين ، يمكن استخـــدام العلاقة (8.41) وتعيين العزم المقاوم الاصغري التالي :

$$erf\ W_y \geqq \frac{|M_y|}{|zul\sigma|} \qquad (8\text{-}42)$$

في حالة كون العزم المقاوم الاصغري والاجهاد المسموح معلومين عندئذ يمكن إيجاد القيمـــة المطلقة لعزم الانعطاف المسموح الذي يستطيع المقطع العرضي تحمله ، بواسطة العلاقة التالية :

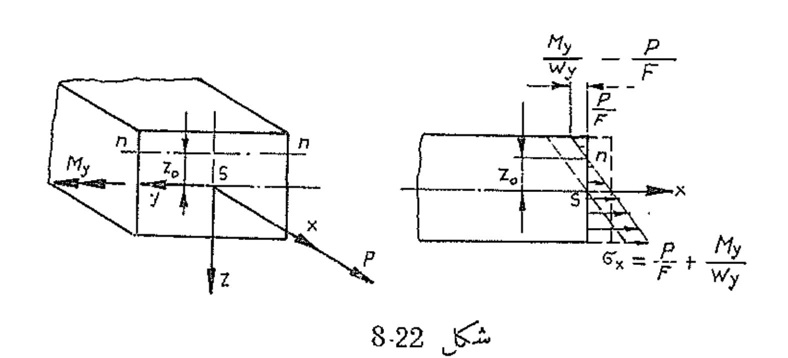
$$|zul\ M| \leqq \min W_y\ |zul\ \sigma| \qquad (8\text{-}42\ b)$$

آ ـ ٢ إيجاد توزيع الاجهاد في حالة الانعطاف البسيط والقوة الناظمية باستخدام قانون التنضد
اذا احتوى المقطـع العرضي x=const على عزم انعطاف M_y وقوة ناظمية تمـــر من مركز ثقله N_x (تعتبر $N_x > 0$ عندما تكون قوة شد و $N_x < 0$ عندما تكون قوة ضغط . المحاور z,y هي محاور عطالة رئيسية) عندئذ يتم الحصول على توزيع الاجهاد الناظمي بواسطـة جمـع (تنضد) الاجهاد الناتج عن M_y مع الاجهـاد النـاتـج عن N_x (شكل 8,22) كما تشير العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \sigma_{xN} + \sigma_{xM} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z \qquad (8\text{-}43)$$

من هذه العلاقة يتبين أن خط الصفر (المحور الحيـادي ، المحـور السليم) يوازي المحور y ويبعد عنه مسافة :

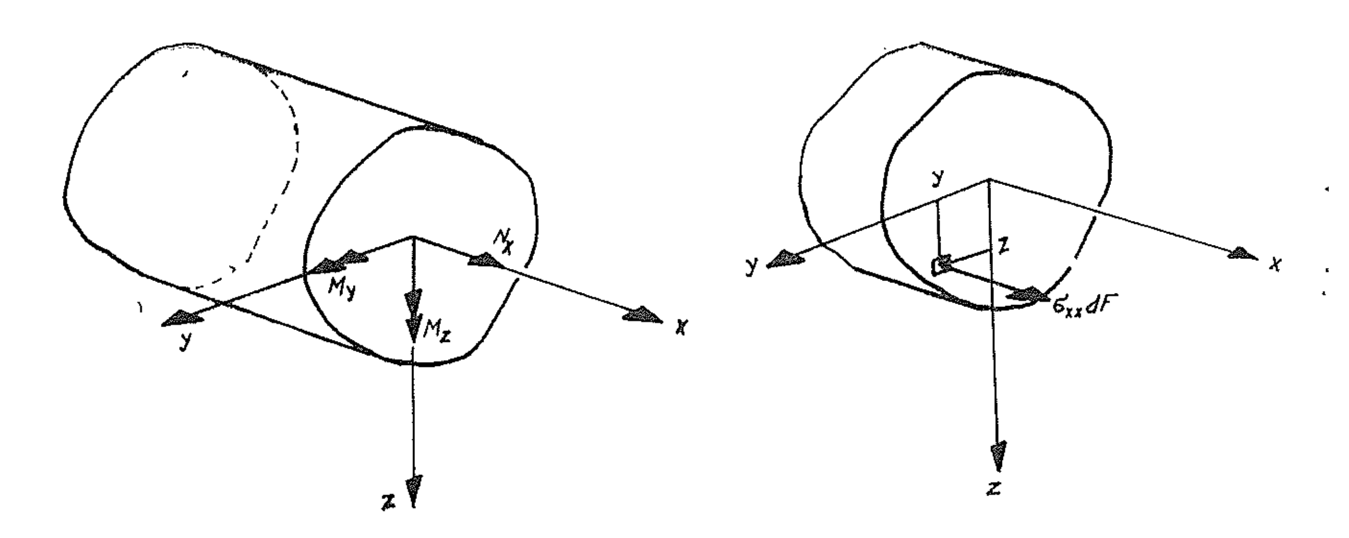
$$z_0 = - \frac{N_x}{M_y} \frac{I_{yy}}{F} = - \frac{N_x}{M_y} i_y{}^2 \qquad (8\ 44)$$



شكل 8-22

ب ـ توزيع الاجهاد في حالة الانعطاف المنحرف مع القوة الناظمية

يقال عن المقطع العرضي انه موجود في حالة انعطاف منحرف مع قوة ناظمية (انعطاف منحرف مركب) عندما يقع تحت تأثير عزوم الانعطاف M_z , M_y والقوة الناظمية N في آن واحد (شكل 8-22b) . للتمكن من دراسة توزيع الاجهاد النـاظمي تختار مجموعـــة المحاور الاحداثية المتعامدة z , y , x ويثبت منها الاحـداثي x في محور القضيب بحيث ينطبق عليـــه كما يثبت مبدأ الاحداثيات z , y في مركز ثقـــل المقطع العرضي (z, y هي اذاً محـاور مركزية) .



شكل 8-22b

ب ـ ١ اشتقاق العلاقات بالاستعانة بقانون التنضد

α ـ المحاور z , y محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي

بجمع الاجهاد الناظمي الناتج عن كل من N_x وعن M_z , M_y :

$$\sigma_{xN} = \frac{N_x}{F}$$

$$\sigma_{xMy} = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma_{xMz} = -\frac{M_z}{J_z} y$$

يتم الحصول على علاقة الاجهاد التي تصلح من أجل الانعطاف المنحرف المركب في حالة كون z, y محاور عطالة رئيسية :

$$\sigma_x = \sigma_{xNx} + \sigma_{xMy} + \sigma_{xMz} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \qquad (8\text{-}45)$$

β ـ المحاور z, y ليست محاور عطالة رئيسية المقطع العرضي

بجمع الاجهاد الناظمي الناتج عن القوة الناظمية σ_{xNx} مع الاجهاد الناظمي الناتج عن حالة الانعطاف المنحرف الصافي (المجرد) :

$$\sigma_{xNx} = \frac{N_x}{F}$$

$$\sigma_{xM} = -\frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}\, y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}\, z$$

يتم الحصول على علاقة الاجهاد التي تصلح من اجل الانعطاف المنحرف المركب في حالة كون z, y أية محاور مركزية للمقطع العرضي (ليست محاور رئيسية) :

$$\sigma_x = \sigma_{xNx} + \sigma_{xM} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}\, y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}\, z \qquad (8\text{-}46)$$

ب ـ ٢ اشتقاق العلاقات بالاستخراج

α ـ المحاور z, y ليست محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي

ان اول ما يتبادر الى الذهن لتعيين توزيع الاجهادات الناظمية في حالة الانعطاف المنحرف المركب هو تحديد وضع المحورين الرئيسين s_2, s_1 وكذلك تعيين عزوم العطالة الرئيسية I_2, I_1 للمقطع العرضي المدروس وذلك كما ورد في الفقرة السابقة . بعد ذلك تحليل عزم الانعطاف M الى مركبتين باتجاه المحاور الرئيسية M_2, M_1 ومن ثم استعمال معادلة ايجادتوزيع الاجهادالناظمي الخاصة بالمحاور الرئيسية . وهذا الحل لابأس به ولكن يعيبه امران .

أولهما : التعثر الذي قد يحدث في تحديد المحورين الرئيسيين وفي قيمة عزوم العطالة الرئيسية بالنسبة لكل منهما .

ثانيهما : ضرورة ايجاد عزوم الانعطاف بالنسبة لهذين المحورين وما قد يرافق هذا من مشقة وحاجة الى ايجاد الابعاد من الرسم واحتمال عدم دقة هذا الرسم الى الحد المطلوب .

كل هذا يدفع الى التفكير في طريقة اخرى والى البحث عن وسيلة مناسبة بدرجة اكثر تؤدي للحصول على معادلة عامة لتوزيع الاجهاد في حالة الانعطاف المنحرف المركب وتصلح لكل اوضاع المحاور المركزية z, y .

تتطلب دراسة مشكلة تعيين توزيع الاجهاد الناظمي في مقطع عرضي من جائز الى تطبيق شروط التوازن وذلك للحصول على علاقات تربط بين القوى الخارجية وبين الاجهادات الداخلية (التي تعتبر قيم القطع محصلات لها) .

شروط التوازن : (ويقصد فيها هنا بشكل دقيق مساواة محصلة الاجهادات الناظمية في المقطع العرضي بقيم القطع N_x, M_y, M_z) .

لقد تم في علم السكون إيجاد علاقات تربط بين قيم القطع (والتي سيكتفى منها في هذا الفصل فقط بالقوة الناظمية N_x وعزم الانعطاف M الذي يمكن تحليله إلى مركبتين M_z , M_y) في العنصر الانشائي المدروس وبين القوى الخارجية المؤثرة على الجملة الانشائية وذلك بتطبيق شروط التوازن بعد اجراء القطع اللازم . لذلك سيفترض هنا بأن قيم القطع M_x , M_y , N_x التي تعتبر محصلات للاجهاد الناظمي σ_x ، هي توابع معروفة معينة بدلالة القوى الخارجية . وسيكتفى بايجاد العلاقات التي تربط بين الاجهادات الناظمية σ_x وبين قيم القطع M_z , M_y , N_x وذلك انطلاقاً من فكرة التكافىء الستاتيكي الموجود بين قيم القطع وبين محصلات الاجهادات الناظمية المؤثرة في أي مقطع عرضي من القضيب . بتطبيق شروط التوازن (أو بكلام أدق المساواة بين قيم القطع وبين محصلات الاجهاد الناظمي في المقطع العرضي) يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\sum_i K_{xi} = 0 \quad : \int_F \sigma_x dF = N_x$$

$$\sum_i M_{yi} = 0 \quad : \int_F \sigma_x z dF = M_y \qquad (8\,47)$$

$$\sum_i M_{zi} = 0 \quad : \int_F \sigma_x y\, dF = -M_z$$

أما بقية شروط التوازن :

$$\sum_i K_{yi} = 0 \;;\; \sum_i K_{zi} = 0 \;;\; \sum_i M_{xi} = 0$$

فمحققة من البداية ، لكن شروط التوازن وحدها لا تكفي لتعيين توزيع الاجهاد الناظمي في حالة الانعطاف المنحرف المركب لذلك يلجأ الى شروط التغير التي تستخلص من تغيرات الجسم الممكنة هندسياً والتي تسمى هنا بشرط التوافق .

شرط التوافق :

إستناداً الى فرضية برنولي فان معادلة التمدد (التغير النسبي الخطي) في أي نقطة من مستوي المقطع العرضي تحقق معادلة المستوي التالية :

$$\varepsilon_x = \bar{a} + \bar{b}\, y + \bar{c}\, z \qquad (8\text{-}48)$$

حيث أن z, y هي أية محاور مركزية في المقطع العرضي وأن $\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}$ هي ثوابت عددية .

قانون هوك للاجهادات الناظمية :

بواسطة قانون هوك يمكن الربط بين شروط التوازن وبين شرط التوافق :

$$\sigma_x = E\ \varepsilon_x \tag{8-49}$$

بتبديل العلاقة (8.48) في العلاقة (8.49) يتم الحصول على المعادلة التالية :

$$\sigma_x = E\bar{a} + E\ \bar{b}\ y + E\bar{c}\ z$$

وبالاستعاضة عن الثوابت $E\ \bar{a}$, $E\ \bar{b}$, $E\ \bar{c}$ بثوابت جديدة ينتج :

$$\sigma_x = a + by + c\ z \tag{8-50}$$

وكل ما يلزم الآن هو تحديد قيمة كل من الثوابت c, b, a . وبهذه المناسبة فان توزيع الاجهادات الناظمية الممثل بهذه العلاقة يطلق عليه إسم التوزيع المستوي للاجهادات . بتبديل العلاقة (8.50) في العلاقة (8.47) وبعد الرجوع لتعاريف عزوم السطوح للدرجة الاولى والثانية (العزم الستاتيكي وعزوم العطالة وجداء العطالة) :

$$I_{yy} = \int_F z^2 dF \quad ; \quad I_{zz} = \int_F y^2 dF \quad ; \quad I_{yz} = \int_F y\ z\ d\ F$$

$$S_y = \int_F z\ d\ F \quad ; \quad S_z = \int_F y\ dF$$

يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$N_x = \int_F (a + by + cz)\ dF = a\int_F dF + b\int y\ dF + c\int_F z\ dF$$

$$= a\ F + b\ S_z + c\ S_y$$

$$M_y = \int_F (a + by + cz)\ zdF = a\int_F z\ dF + b\int_F yz\ dF + c\int_F z^2 d\ F$$

$$= a\ S_y + b\ I_{yz} + c\ I_{yy} \tag{8-51}$$

$$-M_z = \int_F (a + by + cz)\ y\ dF = a\int_F ydF + b\int_F y^2 dF + c\int_F yz\ dF$$

$$= a\ S_z + b\ I_{zz} + c\ I_{yz}$$

بما ان المحاور y , z هي محاور مركزية المقطع العرضي إذاً فان العزوم الستاتيكية بالنسبة لها تساوي الصفر ، أي أن :

$$S_y = \int_F z\,dF = 0 \quad ; \quad S_z = \int_F y\,dF = 0 \qquad (8\text{-}52)$$

بادخال هذه النتيجة في العلاقات 8.51) بعين الاعتبار يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} N_x &= aF \\ M_y &= b\,I_{yz} + c\,I_{yy} \qquad (8\text{-}53) \\ -M_z &= b\,I_{zz} + c\,I_{yz} \end{aligned}$$

بحل هذه المعادلات يتم تعيين الثوابت :

$$a = \frac{N_x}{F}$$

$$b = -\frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} = -\frac{M_z^*}{I_{zz}^*} \qquad (8\text{-}54)$$

$$c = \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} = \frac{M_y^*}{I_{yy}^*}$$

حيث ان I^*_{yy}, I^*_{zz} تمثل قيما معدلة لعزوم العطالة ومقدارها هو :

$$I_{yy}^* = I_{yy} - \frac{I_{yz}^2}{I_{zz}} \qquad (8\text{-}55)$$

$$I_{zz}^* = I_{zz} - \frac{I_{yz}^2}{I_{yy}}$$

كذلك فان M^*_y , M^*_z تمثل ما يسمى بالعزوم المعدلة ولها هذه القيم :

$$M_y^* = M_y + M_z \left(\frac{I_{yz}}{I_{zz}}\right) \qquad (8\text{-}56)$$

$$M_z^* = M_z + M_y \left(\frac{I_{yz}}{I_{yy}}\right)$$

وبذلك تكون المعادلة العامة للتوزيع المستوي للاجهادات الناظمية في الانعطاف المنحرف المركب للقضبان المستقيمة كما يلي :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}\, y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}\, z \qquad (8\text{-}57)$$

أو

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} - \frac{M_z^*}{I_{zz}^*}\, y + \frac{M_y^*}{I_{yy}^*}\, z \qquad (8\text{-}58)$$

ويجب عند ايجاد القيم الاهتمام بالاشارات .

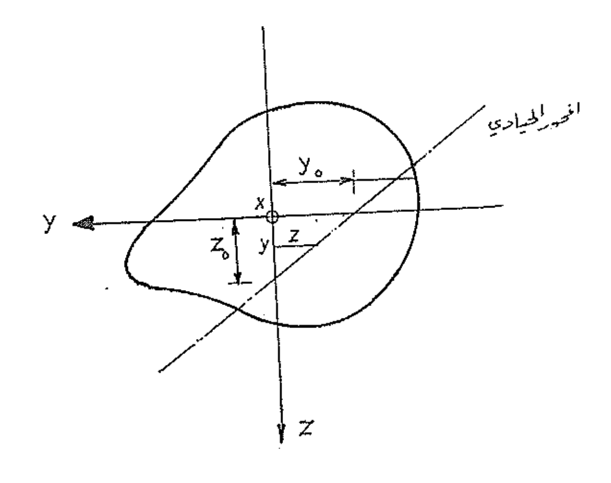
تتحدد معادلة المحور الحيادي (محور الصفر) بجعل $\sigma_x = 0$ وبذلك ينتج :

$$z = -\frac{N_x}{F}\,\frac{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}} + \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}\, y$$

$$= -\frac{N_x}{F}\,\frac{I_{yy}^*}{M_y^*} + \frac{M_z^* \cdot I_{yy}^*}{M_y^* \cdot I_{zz}^*}\, y \qquad (8\text{-}59)$$

تبلغ احداثيات نقاط تقاطع هذا المستقيم مع المحاور الاحداثية القيم التالية (شكل 8 23) :

$$y_0 = -\frac{N_x}{F}\,\frac{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}} \;;\; z_0 = -\frac{N_x}{F}\,\frac{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}} \qquad (8\text{-}60)$$



شكل 8-23

β ـ المحاور z , y محاور عطالة رئيسية المقطع العرضي

عندما تكون المحاور z , y محاور عطالة رئيسية المقطع العرضي فان جداء العطالة يساوي الصفر:

$$I_{yz} = \int_F y\, z\, d\, F = 0$$

وبذلك تأخذ العلاقات (8 53) الشكل التالي :

$$\begin{aligned} N_x &= a\, F \\ M_y &= c\, I_{yy} \\ -M_z &= b\, I_{zz} \end{aligned} \qquad (8.61)$$

اما الثوابت c , b , a فتأخذ القيم التالية :

$$a = \frac{N_x}{F} \; ; \quad b = -\frac{M_z}{I_{zz}} \; , \; c = \frac{M_y}{I_{yy}} \qquad (8.62)$$

وبذلك تسهل علاقة توزيع الاجهاد الناظمي كثيراً لتأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} - \frac{M_z}{I_{zz}} y + \frac{M_y}{I_{yy}} z \qquad (8.63)$$

اما احداثيات نقاط تقاطع المحور الحيادي مع المحاور الاحداثية z , y فتبلغ :

$$y_0 = -\frac{N_x}{F}\,\frac{I_{zz}}{M_z} \; , \quad z_0 = -\frac{N_x}{F}\,\frac{I_{yy}}{M_y} \qquad (8.64)$$

يتركب الاجهاد الناظمي في حالة الانعطاف المنحرف المركب من حدين ، حد ناتج عن القوة الناظمية N_x وحد اخر ناتج عن عزم الانعطاف M (أو بالاحرى ناتج عن مركبتي عزم الانعطاف M_z , M_y) . يسمى الانعطاف منحرفاً لان المحور الحيادي لا يوازى أحد محاور العطالة الرئيسية للمقطع العرضي .

بالرجوع إلى علاقة الاجهاد (8.63) وبتبديل :

$$M_y = M \cos \alpha \quad ; \quad M_z = M \sin \alpha$$

فانها تصبح

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + M \left(\frac{\cos \alpha}{I_{yy}} z - \frac{\sin \alpha}{I_{zz}} y \right)$$

تسهل مهمة ايجاد العلاقات التي تربط بين الاجهادات الداخلية وبين القوى الخارجية المطبقة على الجملة الانشائية كثيراً بتقسيمها الى مرحلتين .

المرحلة الاولى :

مرحلة ايجاد علاقات تربط بين القوى الخارجية المؤثرة على الجملة الانشائية وبين محصلات الاجهاد الداخلية المسماة بقيم القطع .

المرحلة الثانية :

مرحلة ايجاد علاقات تربط بين محصلات الاجهاد المسماة بقيم القطع وبين الاجهادات (مركبات الاجهاد) .

ان المرحلة الاولى هي من وظيفة علم السكون ولقد تم بحثها بشكل مفصل (وذلك بتطبيق شروط التوازن على الاجسام بعد القطع) . اما المرحلة الثانية فهي من وظيفة علم مقاومة المواد وقد تم أنفاً دراستها وهي تعتمد على حقيقة كون محصلة الاجهادات في المقطع العرضي بالاتجاه الافقي مساوية للقوة الناظمية N ، وكذلك كون محصلة العزوم التي تشكلها الاجهادات الناظمية بالنسبة للمحور y مساوية للعزم M_y ومحصلة العزوم التي تشكلها الاجهادات الناظمية بالنسبة للمحور z مساوية للعزم M_z .

٨ ـ ٢ ـ ٥ أمثلة

مثال 79 :

بعد تعيين مخططات قيم القطع لجائز مصنوع من الفولاذ تبين ان مقطعه العرضي يحتوي على عزم إنعطاف M_y فقط .

المعطى : $M_y = 12{,}5$ Mpm والاجهاد المسموح للفولاذ $\text{zul } \sigma = 1{,}4 \text{ Mp cm}^{-2}$.

المطلوب : تعيين بروفيل من النوع IP يستطيع تحمل العزم M_y .

الحل :

بتطبيق علاقة التصميم للانعطاف البسيط الصافي (العلاقة 8.42) ينتج :

$$\text{erf } W_y \geqq \frac{|M_y|}{|\text{zul}\sigma|} = \frac{12{,}5 \cdot 10^2}{1{,}4} = 892{,}9 \text{ cm}^3$$

من جدول البروفيلات الموجود في الملحق يتم اختيار بروفيل IP 24 الذي يبلغ عزم مقاومته :

$$\text{vorh } W_y = 974{,}0 \text{ cm}^3 > \text{erf } W_y = 892{,}9 \text{ cm}^3$$

مثال 80 :

يتألف مقطع عرضي فولاذي من بروفيلين من النوع 24] تتصل ببعضها بواسطة اللحام.

المعطى : الاجهاد المسموح للفولاذ St . 37 : $\text{zul } \sigma = 1{,}4 \text{ Mp cm}^{-2}$.

المطلوب : حساب عزم الانعطاف M_y الذي يستطيع المقطع العرضي تحمله .

الحل : من جدول البروفيلات الموجود في الملحق ومن أجل البروفيل 24] تقرأ قيمة العزم المقاوم بالنسبة للمحور y التالية :

$$W_y = 300{,}0 \text{ cm}^3 = (W_{yy})$$

بما ان المقطع العرضي يتألف من بروفيلين لذا فان العزم المقاوم الكلي هو :

$$W_y = 2 \cdot 300{,}0 = 600{,}0 \text{ cm}^3$$

بتطبيق العلاقة (8.42 b) يتم الحصول على عزم الانعطاف المسموح (اعلى عـزم انعطاف يسمح للمقطع العرضي بتحمله) :

$$|\text{zul } M_y| \leqq W_{yy} \cdot |\text{zul } \sigma| = 600{,}0 \cdot 1{,}4 = 840{,}0 \text{ Mp cm}$$

مثال : 81 :

حمل جائز بسيط مقطعه العرضي مستطيل الشكل ومسند في النقطتين b , a في منتصفـه بقوة وحيدة P (شكل 8.24) .

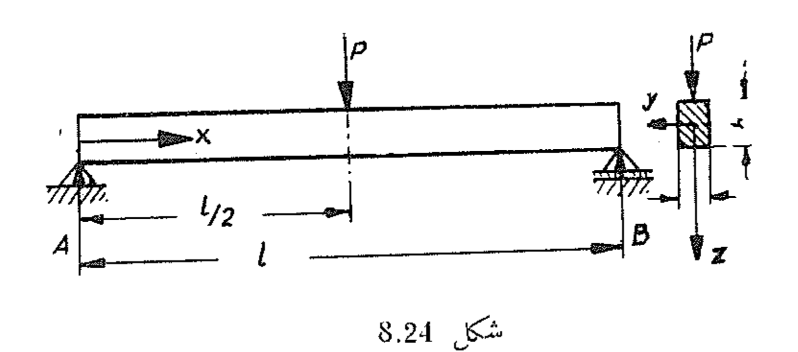
المعطى :

$$h = 5 \text{ cm} \; ; \; b = 3 \text{ cm} \; ; \; l = 100 \text{ cm} \; ; \; P = 650 \text{ kp}$$

المطلوب :

١ ـ حساب توزيع الاجهاد الناظمي في المكان $x = l/3$.

٢ ـ حساب الاجهاد الناظمي الاعظمي في المكان $x = l/2$.



شكل 8.24

الحل :

ان المحاور z , y هي محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي (لانطباقها على محـاور تناظر المقطع العرضي) .

اما الانعطاف المتشكل فهو انعطاف بسيط لوقوع مستوي التحميل على المحور الرئيسي z .

إن العلاقة التي تصلح من اجل توزيع الاجهاد الناظمي في مكان ما من الجائز هي التالية :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y}\ z$$

يبلغ رد فعل المسند عند a القيمة الآتية :

$$A_v = \frac{P}{2}$$

اما تابع عزم الانعطاف (عزم الانعطاف M بالنسبة للمحور x) فهو :

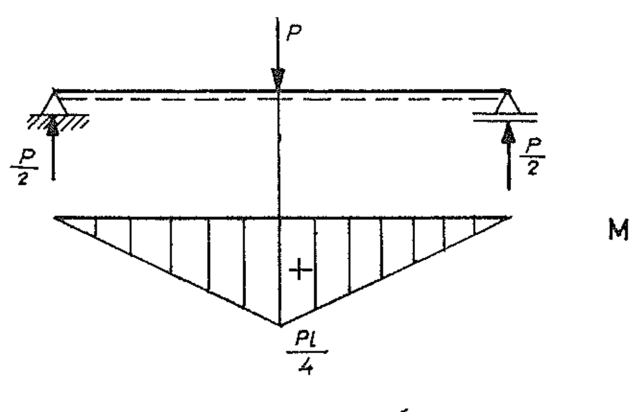
$$M_y = A_v \,.\, x = \frac{P}{2}\ x$$

لقد تم في الشكل (8.25) تمثيل مخطط عزم الانعطاف .

يبلغ عزم عطالة المقطع العرضي بالنسبة للمحور y القيمة التالية :

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

وبذلك يأخذ توزيع الاجهاد الناظمي في نقطة ما من الجـــائز (النقطـة التي تبعد x) القيمة الآتية :

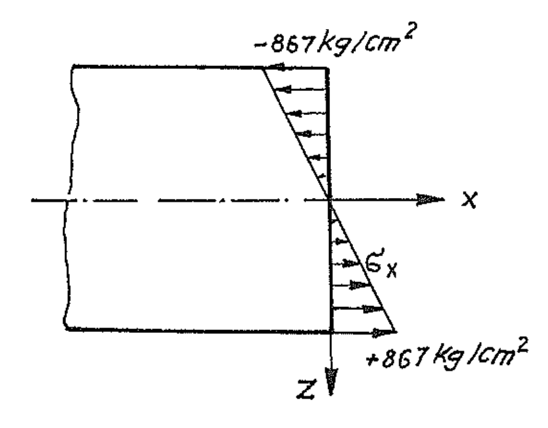


شكل 8.25

$$\sigma_x = \frac{P\,x\,.\,12}{2\,b\,h^3}\,z$$

١ - يتم الحصول على توزيع الاجهاد الناظمي في النقطة $x=l/3$ بتبديل قيمة x في العلاقة السابقة وبذلك ينتج :

$$\sigma_x = \frac{2\,P\,l}{b\,h^3}\,z$$



شكل 8.26

يتشكل في المقطع العرضي الكائن عند $x=l/3$ ، الاجهاد الناظمي الاعظمي في النقاط $z=h/2$ (الشكل 8.26) :

$$\max \sigma = \frac{Pl}{b\,h^2} = \frac{650\,.\,100}{3\,.\,25} = 867\ \text{kp/cm}^2$$

بالامكان اختيار طريق آخر عديم الواحدات ، يستطاع بواسطته التعبير عن الاجهادات ، هكذا :

$$\frac{\sigma_x}{\max\ \sigma_x} = \frac{z}{h/2}$$

من هذه العلاقة يرى ان الاجهاد الناظمي يتناسب طرداً مع المحور z . فمن أجل z =0 ينتج :

$$\sigma_x = 0$$

ومن أجل z=h/2 يتم الحصول على القيمة التالية :

$$\sigma_z = \max\ \sigma_x$$

٢ ـ يتم الحصول على الاجهاد الناظمي الاعظمي في القطع العرضي $x=l/2$ بتبديل $x=l/2$ و $z=h/2$ في علاقة الاجهاد :

$$\max\ \sigma_x = \frac{\max M_y}{W_y} = \frac{3\,Pl}{2bh^2} = \frac{3\,.\,650\,.\,100}{2\,.\,3\,.\,25} = 1300\ \text{kp/cm}^2$$

مثـال 82 :

يتكون القطع العرضي لجائز موثوق من بروفيل فولاذي على شكل I . حمل هذا الجائز بحمولة وحيدة P تؤثر على نهايته الحرة (شكل 8.27) .

المعطى : $zul\sigma = 1400\ \text{kp/cm}^2$, $l = 120$ cm . البروفيل المستعمل هو NPI 10 .

المطلوب : تعيين الحمولة الوحيدة P التي يستطيع الجائز المذكور تحملها لكل من اوضاع القطع العرضي الممثلة في الشكل (8 27a) ، أي

١ ـ عندما تؤثر الحمولة باتجاه الجسد (الحالة a) .

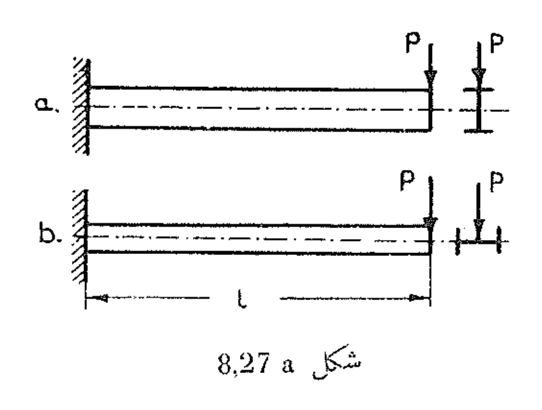
٢ ـ عندما تؤثر الحمولة عمودية على اتجاه الجسد (الحالة b) .

الحـــل :

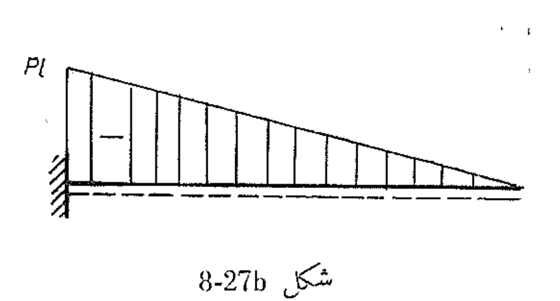
إن شرط التصميم في الانعطاف المستقيم هو :

$$\max \sigma_x = \frac{\max M_y}{W_y} \leqq zul\ \sigma$$

يبلغ عزم الانعطاف الاعظمي في الجائز ، القيمة التالية (شكل 8.27 b):



شكل 8,27 a



شكل 8-27b

$$\max M_y = \max P \cdot l$$

من العلاقتين السابقتين يتم الحصول على النتيجة الآتية :

$$\max P = \frac{W_y \text{ zul } \sigma}{l}$$

١ - يبلغ العزم المقاوم من اجل الحالة a :

$$W_y = 34{,}2 \text{ cm}^3$$

وبالتعويض في العلاقة الاخيره يتم الحصول على القوة الاعظمية

$$\max P = \frac{34{,}2 \cdot 1400}{120} = 399 \text{ kp}$$

٢ - يبلغ العزم المقاوم من اجل الحالة b :

$$W_y = 4{,}88 \text{ cm}^3$$

$$\max P = \frac{4{,}88 \cdot 1400}{120} = 56{,}9 \text{ kp}$$

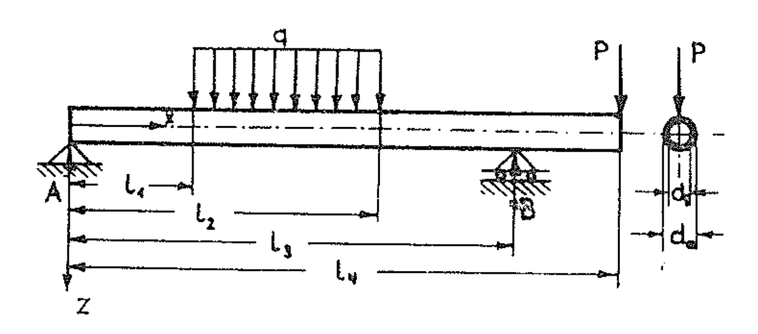
مثـال 83 :

حمل الجائز الممثل في الشكل (8.28) والمسند في النقطتين B , A بالقوة p وكذلك بحمولة خطية موزعة بانتظام q .

المعطى :

$l_2 = 50$ cm , $l_1 = 20$ cm , $q = 30$ kp/m , $P = 500$ kp

$.d_i / d_a = 0{,}8$; $l_4 = 90$ cm ; $l_3 = 70$ cm,



شكل 8.28

المطلوب : تصميم المقطع العرضي للجائز شريطة أن يكون أنبــوباً دائرياً تتحقق فيه نسبة الاقطار المعطاة .

الحـــل :

حساب ردود أفعال المساند :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 : B_v = \frac{1}{l_3}\left\{ P l_4 + q(l_2 - l_1) \cdot \left[\frac{l_2 - l_1}{2} + l_1 \right] \right\}$$

$$= \frac{2 P l_4 + q(l_2 - l_1)(l_2 + l_1)}{2 l_3} \approx 1093 \text{ kp}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v = q(l_2 - l_1) + P - B_v \approx 307 \text{ kp}$$

حساب عزم الانعطاف :

لتعيين مكان عزم الانعطاف الاعظمي يلجأ لحساب توابع عزوم الانعطاف ورسمها على شكل مخطط (مخطط عزم الانعطاف) . يتألف الجائز من اربعة مجالات . بتطبيق شرط توازن العزوم على الاشكال (8.29) ينتج :

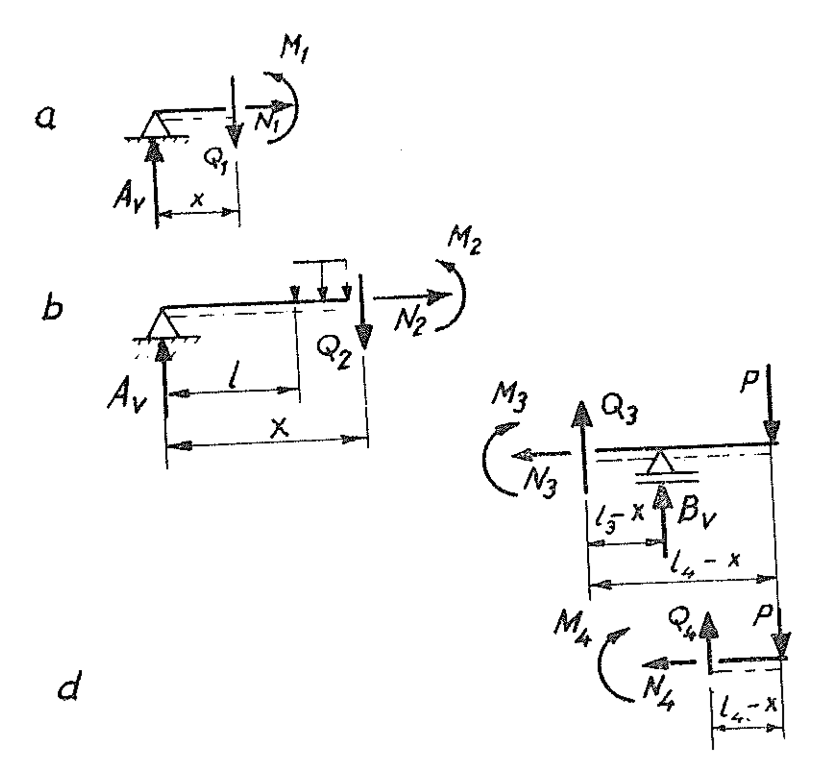
المجال $_I$ $(0 \leqq x \leqq l_1 = 20 \text{ cm})$:

$$\Sigma M_x = 0 : M_I = A_v \cdot x = 307\ x$$

(توزيـع خطي) .

$$x = 0 : M_I = 0$$

$$x = 20 \text{ cm} : M_I = 6140 \text{ kp cm}$$



شكل 8.29

المجال II $(l_1 = 20\text{ cm} \leqq x \leqq l_2 = 50\text{cm})$:

$$\Sigma M_x = 0 : M_2 = A_v \,.\, x - q(x - l_1)\,\frac{(x-l_1)}{2} = A_v\, x - q\,\frac{(x-l_1)^2}{2}$$

(قطع مكافىء درجة 2) .

$x = 20\text{ cm} : M_2 \approx 6140\text{ kp cm}$

$x = 50\text{ cm} : M_2 \approx 1850\text{ kp cm}$

لتعيين مكان العزم الاعظمي يلجأ لاشتقاق التابع وجعله يساوي الصفر $(dM_2/dx = 0)$ وبذلك ينتج :

$$\frac{dM_2}{dx} = A_v - q\,(x - l_1) = 0$$

$$x = \frac{A_v}{q} + l_1 = 10{,}02 + 20 = 30.02\text{ cm} \approx 30\text{ cm}$$

أما عزم الانعطاف الاعظمي فيتم الحصول عليه بتبديل x=30 cm في تابع عزم الانعطاف وهو يساوي :

$\max M_2 = 7710$ kp cm

المجال III $(l_2 = 50 \text{ cm} \leqq x \leqq l_3 = 70 \text{ cm})$:

$$\Sigma M_x = 0 : M_3 = B_v (l_3 - x) - P (l_4 - x)$$

$$= (B_v l_3 - P l_4) - (B_v - P) x$$

(توزيـع خطي) .

$x = 50$ cm : $M_3 = 1860$ kp cm

$x = 70$ cm : $M_3 = -10000$ kp cm

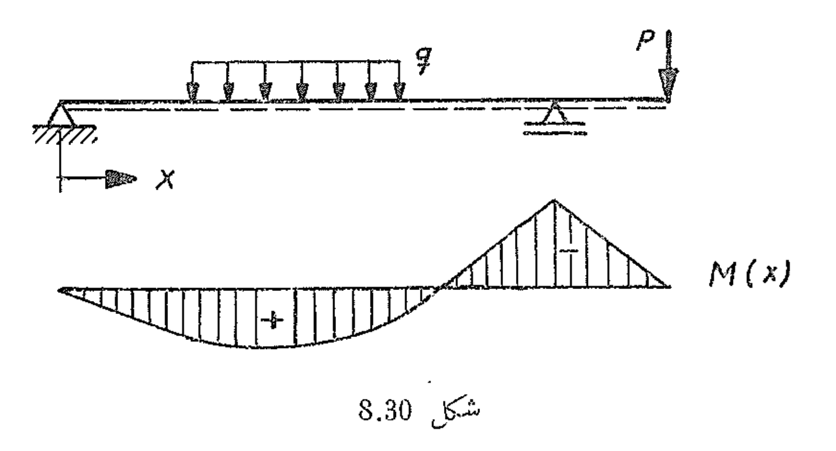
المجال IV $(l_3 = 70 \text{ cm} \leqq x \leqq l_4 = 90 \text{ cm})$:

$$\Sigma M_x = 0 : M_4 = - P (l_4 - x)$$

(توزيـع خطي) .

$x = 70$ cm : $M_4 = -10000$ kp cm

$x = 90$ cm : $M_4 = 0$



شكل 8.30

لقد تم في الشكل (8.30) تمثيل مخطط عزم الانعطاف . من مخطط العـزم المذكور يرى ان العزم الاعظمي يتشكل عند نقطة الاستناد b وتبلغ قيمته :

$\max M_y = M_b = -10\,000$ kp cm

وهو الضروري لتصميم الجائز . في حالة الانعطاف البسيط الموجودة في هذا المثال تصلح علاقة التصميم التالية :

$$\text{erf } W_y = \frac{\max M}{\text{zul } \sigma} = \frac{10\,000}{1400} = 7{,}14 \text{ cm}^3$$

يعرف العزم المقاوم كما يلي :

$$W_y = \frac{I_y}{e}$$

يبلغ عزم العطالة المحوري لأنبوب دائري القيمة التالية :

$$I_y = \frac{\pi}{64} (d_a{}^4 - d_i{}^4) = I$$

اما البعد الاعظمي للمقطع العرضي عن المحور الحيادي e فيبلغ :

$$e = \frac{d_a}{2}$$

وبذلك فان العزم المقاوم يأخذ القيمة التالية :

$$W_y = \frac{\pi}{32 \, d_a} (d_a{}^4 - d_i{}^4) = \frac{\pi}{32} d_a{}^3 \left(1 - \frac{d_i{}^4}{d_a{}^4} \right)$$

في هذه الحالة يلزم حساب القطر d_a بالاستعانة بالعزم المقاوم للانبوب الدائري erf W وبذلك ينتج :

$$d_a{}^3 = \frac{32 \text{ erf } W_y}{\pi (1 - d_i{}^4 / d_a{}^4)} = \frac{32 \, . \, 7{,}14}{1{,}854} = 123{,}3 \text{ cm}$$

$$d_a = 4{,}98 \text{ cm} \; ; \; d_i = 3{,}98 \text{ cm}$$

مثال 84 :

يحتوي مقطع عرضي مستطيل الشكل على قيم القطع التالية : عزم الانعطاف M_y والقوةالناظمية N_x (شكل 8.31) .

المعطى :

$$M_y = 1{,}0 \text{ Mpm} \; , \; N_x = 8{,}0 \text{ Mp} \; , \; h = 28{,}0 \text{ cm} \; , \; b = 14{,}0 \text{ cm}$$

المطلوب : حساب الاجهادات الناظمية على حواف المقطع العرضي (اجهادات الحواف) .

الحل : بواسطة مساحة المقطع العرضي :

$$F = bh = 14,0 \, , \, 28,0 = 392,0 \text{ cm}^2$$

والعزوم المقاومة :

$$W_{yyu} = W_{yyo} = \frac{bh^2}{6} = \frac{14,0 \, . \, 28,0^2}{6} = 1829,3 \text{ cm}^3$$

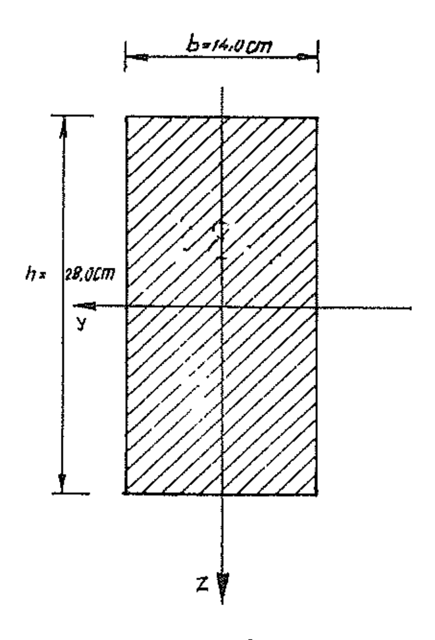
وبتطبيق العلاقة (8.39) يتم الحصول على اجهادات الحواف :

$$\sigma_{xu} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_{yyu}} = \frac{8,0}{392,0} + \frac{100}{1829,3}$$

$$= 0,0204 + 0,0547 = 0,0751 \text{ Mp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{xo} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_{yyo}} = \frac{8.0}{392,0} - \frac{100}{1829,3}$$

$$= 0,0204 - 0,0547 = -0,0343 \text{ Mp cm}^{-2}$$



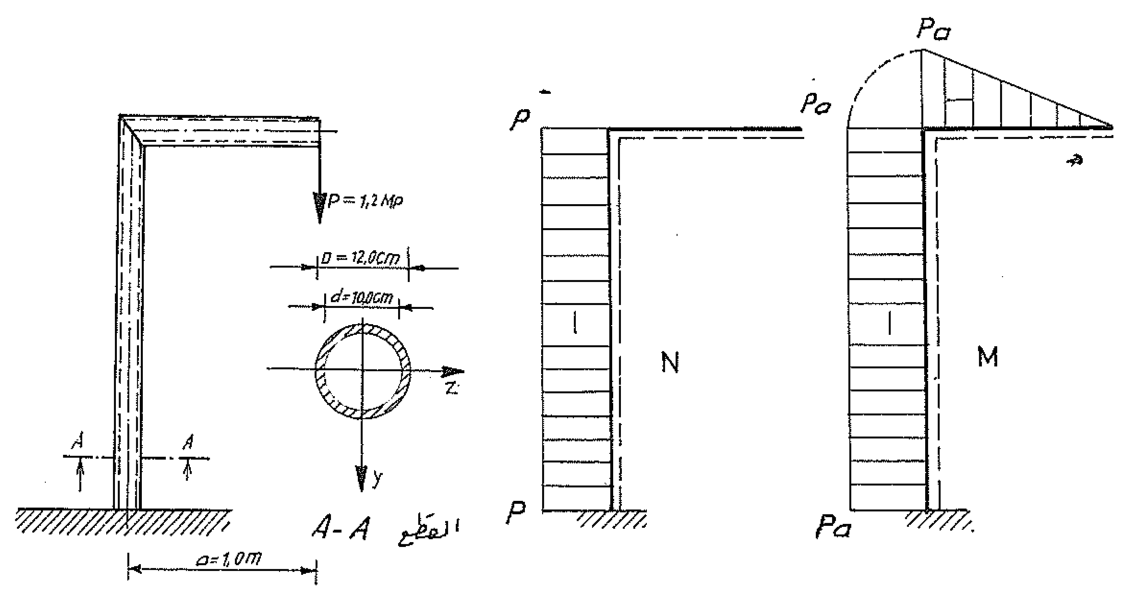
شكل 8·31

مثـال 85 :

تؤثر على النهاية الحرة لجائز موثوق من طرف واحد ، حمولة وحيدة P (شكل 8.32) .

المعطى : ابعاد الجائز و P=1,2 Mp وابعاد المقطع العرضي المكون على شكل حلقة دائرية .

المطلوب : حساب اجهادات الحواف للمقطع العرضي الواقع عند نقطة الوثاقة .



شكل 8.32

الحل : تبلغ قيم القطع في المقطع العرضي الكائن عند نقطة الوثاقة (شكل 8.32) :

$$N_x = -P = -1.2\ \text{Mp}$$

$$M_y = -Pa = -1,2 \cdot 1,0 = -1,2\ \text{Mpm}$$

(لا داعي لرسم مخطط Q والتنويه عنها لأنها تؤدي لتشكيل اجهاد مماسي لا لاجهاد ناظمي) .

بالاستعانة بمساحة المقطع العرضي :

$$F = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi (12,0^2 - 10,0^2)}{4} = 34,6\ \text{cm}^2$$

وبالعزم المقاوم :

$$W_u = W_0 = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32\ D} = \frac{\pi (12,0^4 - 10,0^4)}{32\ .\ 12,0} = 87,8\ \text{cm}^3$$

يتم الحصول على اجهادات الحواف :

$$\sigma_{xu} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_u} = \frac{-1,2}{34,6} + \frac{120,0}{87,8} = -0,0347+1,3667=1,332 Mp/cm^2$$

$$\sigma_{xo} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_o} = \frac{-1,2}{34,6} - \frac{120,0}{87,8} = -0,0347-1,3667=-1,401 Mp/cm^2$$

مثال 86 :

يحمل عمود بيتوني (الوزن النوعي $\gamma = 2.4\ Mp\ cm^{-3}$) مقطعه العرضي مثلـــثي الشكل ، بالقوى Z,P وبوزنه الذاتي (شكل 8.33) .

المعطى :

$H = 3,0\ m$, $b = 0,8\ m$, $h = 0,6\ m$, $Z = 3,0\ Mp$, $P = 10,0\ Mp$

المطلوب : حساب اجهادات الحافة (الاجهادات الطرفية) للمقطع العرضي عـــند نقطة الوثاقة (يؤخذ الوزن الذاتي للعمود بعين الاعتبار)

الحل : بالاستعانة بمساحة المقطع العرضي الثابتة :

$$F = \frac{b\,h}{2} = \frac{0,8\ 0,6}{2} = 0,240\ m^2$$

يتم الحصول على الوزن الذاتي للعمود :

$$G = \gamma\, F\, H = 2,4 \, . \, 0,240 \, . \, 3,0 = 1,728\ Mp$$

تبلغ قيم القطع عند نقطة الوثاقة القيم التالية :

$$N_x = -(P+G) = -(10,0+1,728) = -11,728\ Mp$$

$$M_y = Z\,H + P\,\frac{2h}{3} = 3,0 \, . \, 3,0 + 10,0 \, . \, \frac{2}{3} \, . \, 0,6 = 13,0\ Mpm$$

بالاستعانة بالعزوم المقاومة :

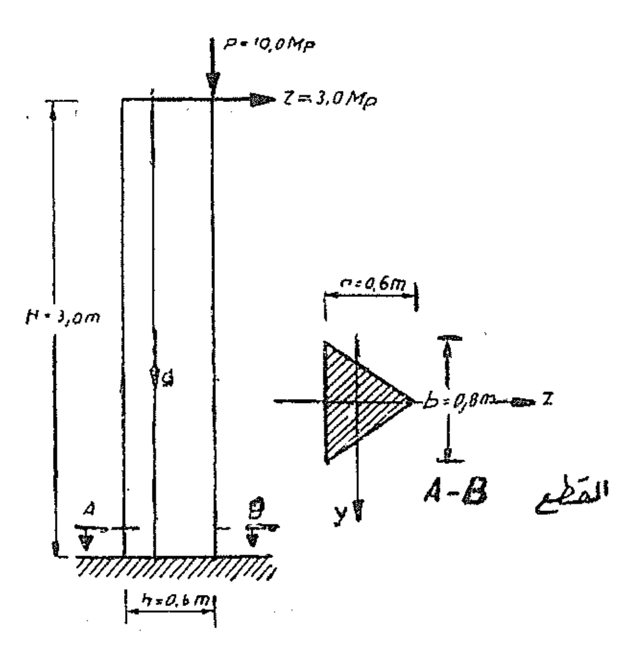
$$W_{yl} = \frac{bh^2}{12} = \frac{0,8 \, . \, 0,6^2}{12} = 0,024\ m^3$$

$$W_{yr} = \frac{bh^2}{24} = \frac{0,8 \, . \, 0,6^2}{24} = 0,012\ m^3$$

وبمساحة المقطع العرضي وبقيم القطع يتم الحصول على اجهادات الحافة :

$$\sigma_{xl} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_{yl}} = \frac{-11,728}{0,24} + \frac{13,0}{0,024} = -48,87 + 541,67 = 492,8 \text{Mp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{yr} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_{yr}} = \frac{-11,728}{0,24} - \frac{13,0}{0,012} = -48,87 - 1083,33 = -1132,2 \text{Mpcm}^{-2}$$



شكل 8,33

مثال 87 :

يتألف الجائز المقرر ستاتيكياً والممثل في الشكل (8,34) من بروفيل مدرفل I 32 .

المعطى : ابعاد الجائز و P = 6,0 Mp .

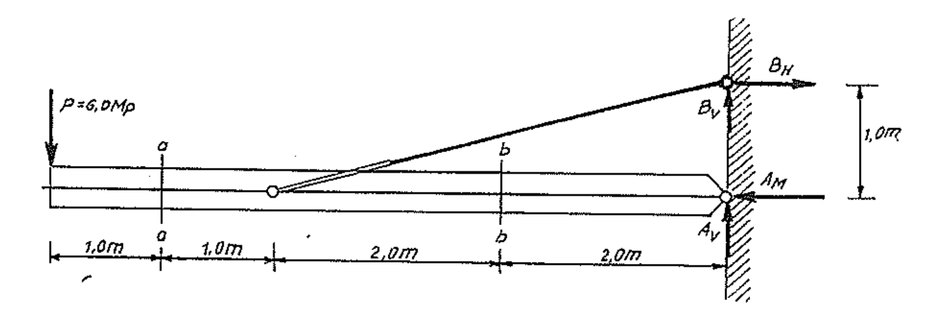
المطلوب : حساب اجهادات الحافة (الاجهادات الطرفية) في المقاطـــع العرضية الواقعة عند القطوع b−b , a−a .

الحل :

تبلغ ردود افعال المساند للجائز القيم التالية :

$A_H = 36,0$ Mp ; $B_H = 36,0$ Mp

$A_v = -3,0$ Mp ; $B_v = 9,0$ Mp



شكل 8,34

وبالاستعانة بها يتم الحصول على قيم القطع الآتية :

في القطع العرضي a–a :

$$N_x = 0$$

$$M_y = -P\ 1{,}0 = -6{,}0\ \text{Mpm}$$

وفي القطع العرضي b–b :

$$N_x = -A_H = -36{,}0\ \text{Mp}$$

$$M_y = A_v\ .\ 2{,}0 = -6{,}0\ \text{Mpm}$$

بواسطة القيم الهندسية للقطع العرضي التي يتم الحصول عليها من الجدول الموجود في الملحق :

$$F = 77{,}8\ \text{cm}^2\ ;\ W_{yo} = W_{yu} = 782{,}0\ \text{cm}^3$$

يتم تعيين اجهادات الحافة في البروفيل I 32 عند القطع العرضي a–a :

$$\sigma_{xu} = \frac{M_y}{W_u} = \frac{-6000{,}0}{782{,}0} = -0{,}767\ \text{Mpcm}^{-2}$$

$$\sigma_{xo} = -\frac{M_y}{W_0} = -\frac{-6000}{782{,}0} = 0{,}767\ \text{Mpcm}^{-2}$$

وعند القطع العرضي b–b :

$$\sigma_{xu} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_{yu}} = \frac{-36{,}0}{77{,}8} + \frac{-6000}{782{,}0} = -1{,}230\ \text{Mpcm}^{-2}$$

$$\sigma_{xo} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_{yo}} = \frac{36{,}0}{77{,}8}\ \ \frac{600{,}0}{782{,}0} = +0{,}304\ \text{Mp cm}$$

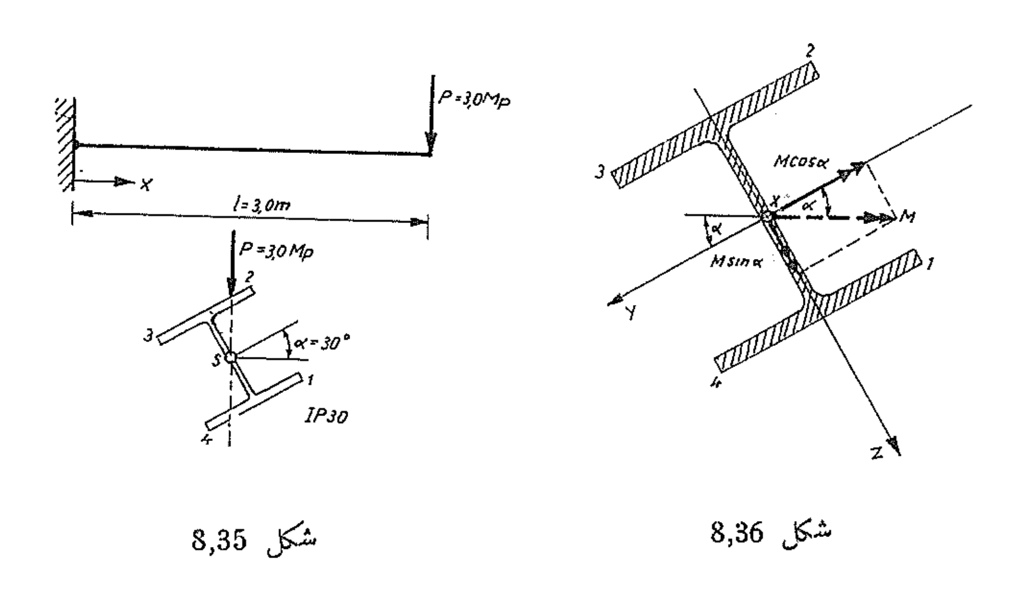
مثال 88 :

يتألف المقطع العرضي لجائز بارز من بروفيل فولاذي من النوع IP 30 . يميل المقطع العرضي على طول محور الجائز ليشكل مع حامل القوة P الزاوية α (شكل 8.35) .

المعطى :

$$l = 3{,}0\ \text{m}\ ,\ \alpha = 30^{\circ}\ ,\ P = 3{,}0\ \text{Mp}$$

المطلوب : حساب الاجهادات الناظمية المتشكلة في نقاط زوايا المقطع العرضي الكائن عند نقطة الوثاقة .



شكل 8,35

شكل 8,36

الحل :

تمثل مجموعة المحاور (z,y) المحاور الرئيسية للمقطع العرضي (لكونها محاور تناظر) .لا ينطبق اثر مستوي التحميل على المحاور الرئيسية (z,y) فالانعطاف المتشكل هو اذاً إنعطاف منحرف .
عزم الانعطاف عند نقطة الوثاقة :

$$M = -Pl = -3{,}0 \,.\, 3{,}0 = -9{,}0\ \text{Mp m}$$

يرسم شعاع عزم الانعطاف M الفعلي (شكل 8.36) .
مركبات عزم الانعطاف بالنسبة لمجموعة المحاور الرئيسية z,y : هناك طريقان :

اولها : ان يرسم شعاع عزم الانعطاف الفعلي (بعد ادخال الاشارة بعين الاعتبار)(شكل 36 8) ثم يحلل هذا العزم الى مركبتين ، هكذا :

$$M_y = - | M | \cos \alpha = - 9,0 . 0,866 = - 7,794 \text{ Mp m}$$

$$M_z = + | M | \sin \alpha = + 9,0 \ 0,500 = + 4,500 \text{ Mp m}$$

وثانيهما : ان يحلل شعاع عزم الانعطاف الموجب دون النظر للاتجاه الفعلي ثم تدخل الاشـارة بعين الاعتبار أثناء العلاقة ، هكذا :

$$M_y = + M \cos \alpha = (- 9,0) . 0,866 = - 7,794 \text{ Mpm}$$

$$M_z = - M \sin \alpha = - (- 9,0) . 0,500 = + 4,500 \text{ Mpm}$$

القيم الهندسية للمقطع العرضي (وتقرأ من الجدول الموجود في الملحق) :

$$I_{yy} = 25\,760 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{yz} = 90\,10,0 \text{ cm}^4$$

احداثيات نقاط حواف المقطع العرضي :

$$y_1 = - \frac{b}{2} = - 15 \text{ cm} \quad ; \quad z_1 = + \frac{h}{2} = + 15 \text{ cm}$$

$$y_2 = - \frac{b}{2} = - 15 \text{ cm} \quad ; \quad z_2 = - \frac{h}{2} = - 15 \text{ cm}$$

$$y_3 = + \frac{b}{2} = + 15 \text{ cm} \quad ; \quad z_3 = - \frac{h}{2} = - 15 \text{ cm}$$

$$y_4 = + \frac{b}{2} = + 15 \text{ cm} \quad ; \quad z_4 = + \frac{h}{2} = + 15 \text{ cm}$$

علاقة الاجهاد الناظمي :

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = - \frac{7,794 . 10^5}{25760,0} z - \frac{4,500 . 10^5}{9010,0} y$$

$$= - 30,256 z - 49,944 z$$

اجهادات نقاط الحواف :

$$\sigma_{xx1} = - 30,256 (+15) - 49,944 (-15) = + 295 \text{ kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{xx2} = - 30,256 (-15) - 49,944 (-15) = + 1203 \text{ kp em}^{-2}$$

$$\sigma_{xx3} = - 30,256 (\quad 15) - 49,944 (+14) = - 295 \text{ kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{xx4} = - 30,256 (+15) - 49,944 (+15) = - 1203 \text{ kp cm}^{-2}$$

مثال 89 :

يحتوي المقطع العرضي لجائز على عزم الانعطاف M (شكل 8.37) .

المعطى :

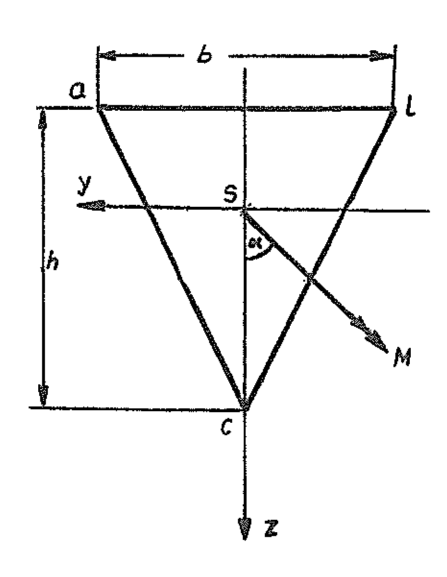
$, h = 4\ cm \quad , \quad b = 4\ cm \quad , \quad \alpha = 45^{\circ} \quad , \quad M = 2000\ kp\ cm$

المطلوب :

١ - حساب الاجهادات في كل من النقاط c,b,a .

٢ - حساب الاجهاد الاعظمي .

٣ - تحديد موضع المحور الحيادي .



شكل 8,37

الحل :

تمثل المحاور z,y محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي (وذلك لكون المحور z محور تناظر للمقطع العرضي) .

لا ينطبق شعاع العزم M على احد المحاور الرئيسية . إذاً فالمقطع العرضي موجود في حالة انعطاف منحرف .

١ - يمثل توزيع الاجهاد الناظمي في حالة الانعطاف المنحرف كما يلي :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y = \frac{-M \sin\alpha}{I_{yy}} z \quad \frac{M \cos\alpha}{I_{zz}} y$$

عزوم عطالة المقطع العرضي بالنسبة للمحاور z,y :

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{36} = 7{,}11 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz} = \frac{hb^3}{48} = 5{,}33 \text{ cm}^4$$

بتبديل هذه القيم في معادلة توزيع الاجهاد ينتج :

$$\sigma_x = -795 \frac{z}{h} - 1060 \frac{y}{b} \quad \text{kp cm}^{-2}$$

احداثيات النقاط c,b,a :

$$y_a = +\frac{b}{2} \quad , \quad z_a = -\frac{1}{3} h$$

$$y_b = -\frac{b}{2} \quad , \quad z_b = -\frac{1}{3} h$$

$$y_c = 0 \quad , \quad z_c = +\frac{2}{3} h$$

بتبديل هذه القيم فى معادلة توزيع الاجهاد ، ينتج :

$$\sigma_a = +\frac{795}{3} - \frac{1060}{2} = -265 \quad \text{kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_b = +\frac{795}{3} + \frac{1060}{2} = +795 \text{ kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_c = -\frac{795 \cdot 2}{3} = -530 \text{ kp cm}^{-2}$$

٢ ـ يتشكل الاجهاد الناظمي الاعظمي فى احد رؤوس المثلث الثلاثة . بالامكان اخذ النتيجة من الطلب الاول .

$$\max \sigma = \sigma_b = +795 \text{ kp cm}^{-2}$$

٣ ـ يمكن الحصول على معادلة محور الصفر (المحور الحيادي) بجعل معادلة توزيع الاجهاد الناظمي تساوي صفراً ، هكذا :

$$\sigma = \frac{-M \sin \alpha}{I_{yy}} z - \frac{M \cos \alpha}{I_{zz}} y = 0$$

$$z = -\frac{I_{yy}}{I_{zz}} \operatorname{ctg} \alpha \, y = \operatorname{tg} \beta \cdot y$$

حيث ان :

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{I_{yy}}{I_{zz}} \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{7,11}{5,33} 1 = -0,75 \;;\; \beta = 126° 55'$$

بطريقة مور ـ لاند التخطيطية يمكن الحصول على نفس النتيجة ايضاً .

مثال 90:

حمل جائز بارز (حامل بارز) بحمولة وحيدة (شكل 8,38) .

المعطى :

$.\alpha = 45° , P = 50\ kp ; L = 100\ cm ; h = 0,7\ cm ; l = 6\ cm$

المطلوب : حساب توزيع الاجهاد وتعين الاجهاد الاعظمي :

الحل :

بسبب كون المحور z محور تناظر للمقطع العرضي فان المجموعة z , y هي مجموعة محاور العطالة المركزية الرئيسية للمقطع العرضي . ولعدم وقوع اثر مستوي التحميل على احد المحاور الرئيسية z , y فالمقطع العرضي المدروس موجود في حالة انعطاف منحرف بسيط (سمي بسيطاً لعدم احتواء المقطع العرضي على قوة ناظمية) .

$$M = -P \cdot \overline{x} \quad ; M_y = +M \cos \alpha \;;\; M_z = +M \sin \alpha$$

ابعاد المقطع العرضي :

$$e = \frac{1}{2} \frac{l^2 + l\,h - h^2}{2\,l - h} = 1,755\ cm$$

عزوم العطالة :

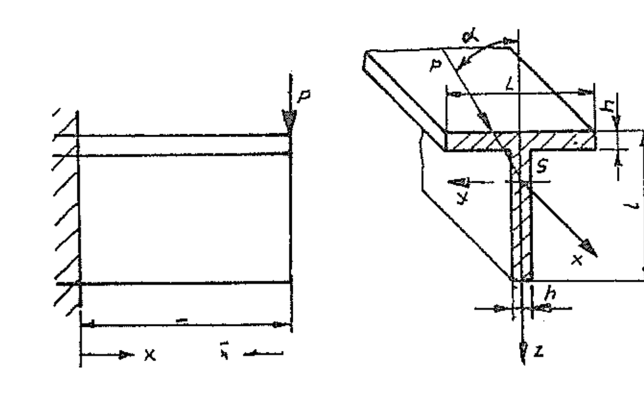
$$I_{yy} = \frac{h\,l^3}{3} + \frac{(l-h)}{3}\,h^3 - \frac{h}{4}\,\frac{(l^2+lh-h^2)}{2l-h} = 26{,}613\ \text{cm}^4$$

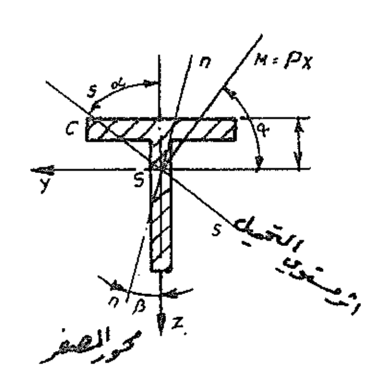
$$I_{zz} = \frac{h\,l^3}{12} + \frac{(l-h)}{12}\,h^3 = 12{,}769\ \text{cm}^4$$

توزيـع الاجهـاد :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}}\,z - \frac{M_z}{I_{zz}}\,y = (2{,}770y - 1{,}327\,z)\,\bar{x}$$

(تعوض $\bar{x}$, y , z بالـ cm اما σ فيعوض بالـ kp/cm²) حيث ان ($\bar{x} = L - x$) .





شكل 8,38

المحور الحيادي (المحور السليم) :

$$\sigma_x = 0 = (2{,}770\,y - 1{,}327\,z)\,\bar{x}$$

$$z = \frac{2{,}770}{1{,}327}\,y = \operatorname{tg}\beta\,y\ ;\ \beta = 64{,}65^\circ$$

يتشكل العزم الاعظمي في المقطع العرضي الكائن عند نقطة الوثاقة ($\bar{x} = L$) وهو يساوي :

$$\max M = -\,PL$$

اما الاجهاد الناظمي الاعظمي فيتشكل في نقاط المقطع العرضي التي لها اكبر بعد عن المحـور الحيادي ، هنا في النقطة c ذات الاحداثيات ($y_c = -e\ ,\ z_c = l$) ، وهـــو يبلغ القيمة التـالية :

$$\max\sigma = (2{,}770\ .\ 3 + 1{,}327\ .\ 1{,}755)\ .\ 100 = 1063{,}75\ \text{kp/cm}^2$$

مثال 90 b :

حملت علاقة رافعة بالحمولة P (شكل 8.38) .

المعطى :

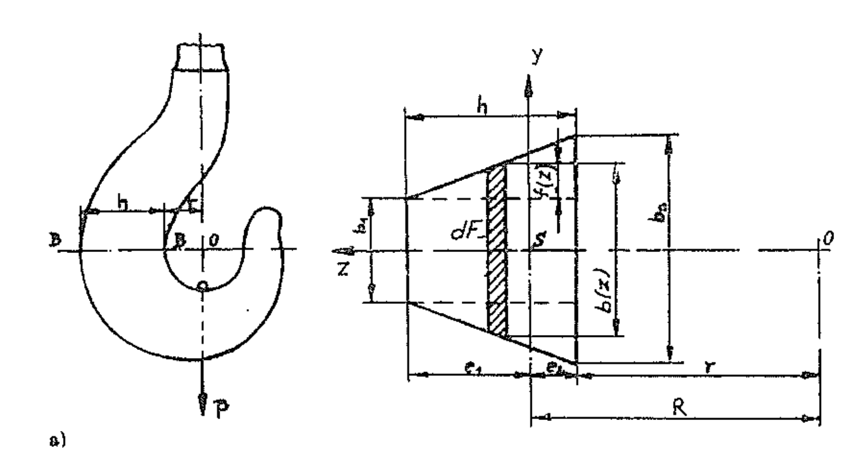
$r = 10\ cm\ ,\ h = b_2 = 8\ cm\ ,\ b_1 = 4\ cm\ ,\ P = 3000\ kp$.

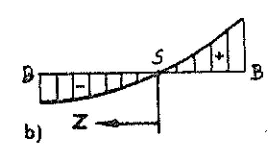
المطلوب : حساب توزيع الاجهاد الناظمي في المقطع العرضي B — B بالاعتماد على نظرية القضبان ذات الانحناء الكبير .

الحل :

نصف قطر الانحناء R للمحور المركزي العائد للمقطع العرضي B — B :

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2} h = 48\ cm^2$$





شكل 8-38

$$e_2 = \frac{1}{F}\left(\frac{h}{2} b_1 h + 2\ \frac{h}{3}\ \frac{h}{2}\ \frac{b_2 - b_1}{2}\right) = 3{,}56\ cm$$

$$e_1 = h - e_2 = 4{,}44\ cm$$

$$R = e_2 + r = 13{,}56\ cm$$

العامل (المعامل) Y :

$$dF = b(z)\,dz = [\,b_1 + 2\eta(z)\,]\,dz$$

$$\frac{\eta(z)}{e_1 - z} = \frac{\frac{b_2 - b_1}{2}}{h}$$

$$Y = -FR^2 + R^3 \int_F \frac{dF}{R+z} = -FR^2 + R^3 \int_{z=-e_2}^{e_1} \frac{b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h}(e-z)}{R+z}\,dz =$$

$$= -FR^2 + R^3 \left\{\left[b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h}(r+h)\right] ln \frac{r+h}{r} - (b_2 - b_1)\right\}$$

$$Y = 250 \ cm^4$$

توزيع الاجهاد (شكل $\overline{8.38\,b}$) :

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M}{FR} + \frac{M}{Y}\ \frac{z}{R+z}$$

المتشكل في المقطع العرضي B—B :

$$N = P \quad , \quad M = -PR$$

$$\sigma_x = -\frac{PR^2}{Y}\ \frac{z}{R+z} = -2208\ \frac{z}{13{,}56 + z}\ kp/cm^2$$

الحافة الخارجية المقطع العرضي : (ضغط) $\sigma_x\,(z=e_1) = -514{,}5\ kp/cm^2$

الحافة الداخلية للمقطع العرضي : (شد) $\bar{\sigma}_x\,(z=-e_2) = 786{,}0\ kp/cm^2$

المحور الحيادي :

بعد المحور الحيادي (n−n) عن مركز الثقل :

من اجل :

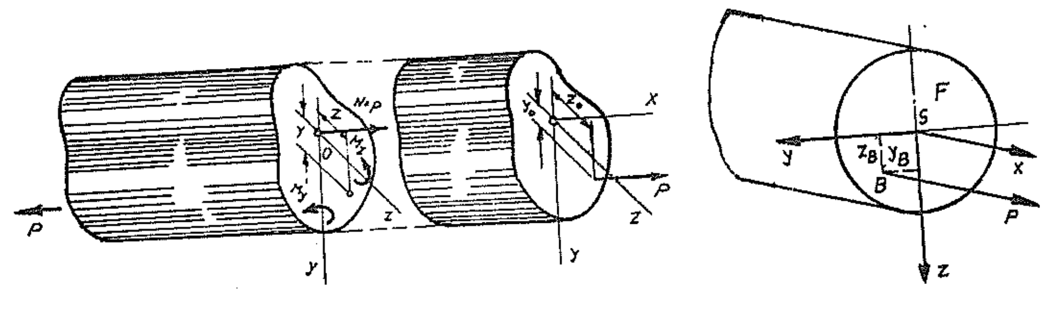
$$N = P \quad , \quad M = -PR$$

فان المحور الحيادي (n−n) ينطبق على المحور y .

٨ ـ ٣ الشد (أو الضغط) اللامركزي

في حالة عدم تأثير القوة P في مركز ثقل المقطع العرضي بل في نقطة ما منه وليكن في النقطة

B ذات الاحداثيات (y_B , z_B) عندئذ تتشكل في المقطع العرضي علاوة على القوة الناظميـة ، عزوم الانعطاف M_z , M_y . بسبب التغييرات الصغيرة المدروسة التي يقتصر البحث عليها هنـا يتم الحصول على توزيـع الاجهاد بتضام اجهاد الشد (او الضغط) الثابت (الناتج عن تأثـير قوة ناظمية N) مع الاجهاد ذو التغير الخطي الناتج عن الانعطاف المنحرف (شكل 8.39) .



شكل 8.39

٨ ـ ٣ ـ ١ المحاور z , y هي محاور عطالة رئيسية

اذا كانت المحاور z , y محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي فان توزيـع الاجهاد النـاظمي يتم الحصول عليه كما يلي :

$$M_y = P z_B \;\; ; \;\; M_z = - P y_B \;\; , \;\; N_x = P$$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y \qquad (8\text{-}65)$$

أو (بعد الاستعانة بتعريف انصاف اقطار العطالة) :

$$\sigma_x = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_B}{i_{yy}^2} z + \frac{y_B}{i_{zz}^2} y \right)$$

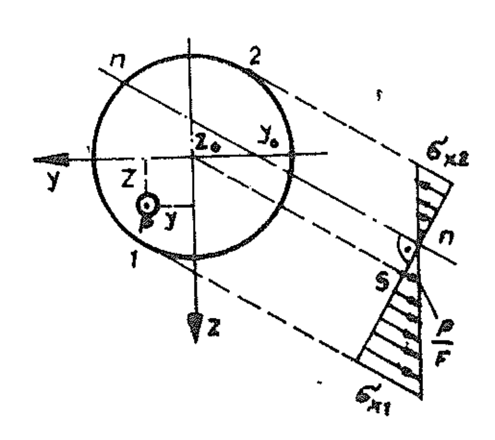
يرسم توزيـع الاجهاد مستوي منحرف . يعين المحور الحيادي (محور صفر الاجهاد) بواسـطة المعادلة التالية :

$$1 + \frac{z_B}{i_{yy}^2} z + \frac{y_B}{i_{zz}^2} y = 0 \qquad (8\cdot 67)$$

يقطع المحور الحيادي مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط ذات الاحداثيات :

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_B} , \quad z_0 = -\frac{i_y^2}{z_B} \qquad (8,67)$$

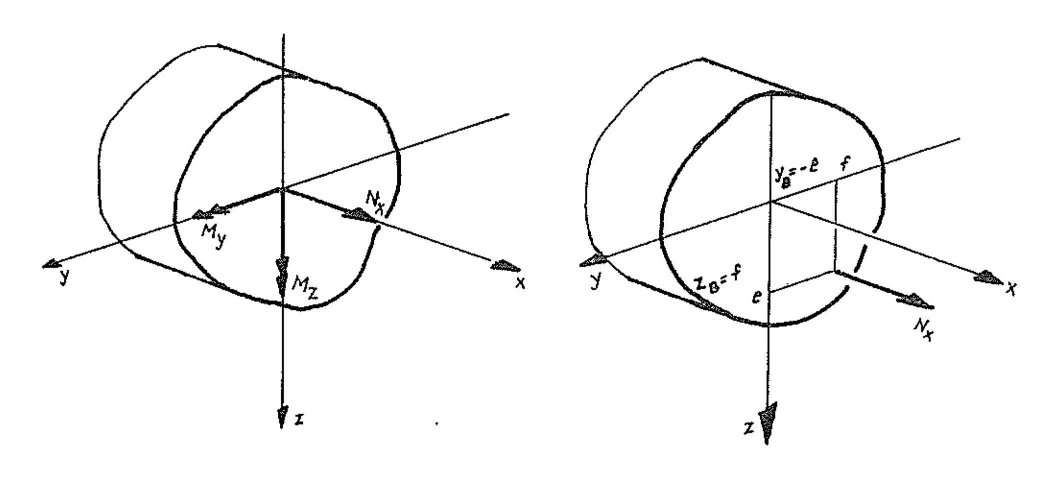
تتشكل الاجهادات الاعظمية في النقاط التي لها اكبر بعد عن المحور الحيادي . لقد تم في الشكل (8-40) رسم اجهادات الحواف (اجهادات الاطراف) تخطيطياً .



شكل 8-40

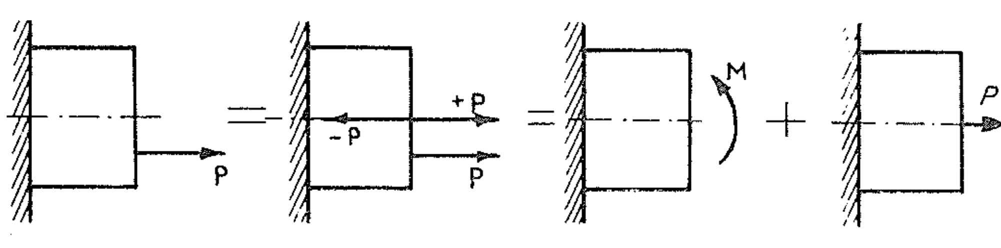
يمكن الاستعاضة عن قيم القطع M_z , M_y , N_z (شكل 8-41) بقوة ناظمية لامركزية N_x تكافئها وتؤثر في النقطة B ذات الاحداثيات (شكل 8-41):

$$z_B = \frac{M_y}{N_x} \; ; \; y_B = -\frac{M_z}{N_x}$$



شكل 8،41

حالة خاصة : (لا مركزية وحيده المحور) :



شكل 8-41a

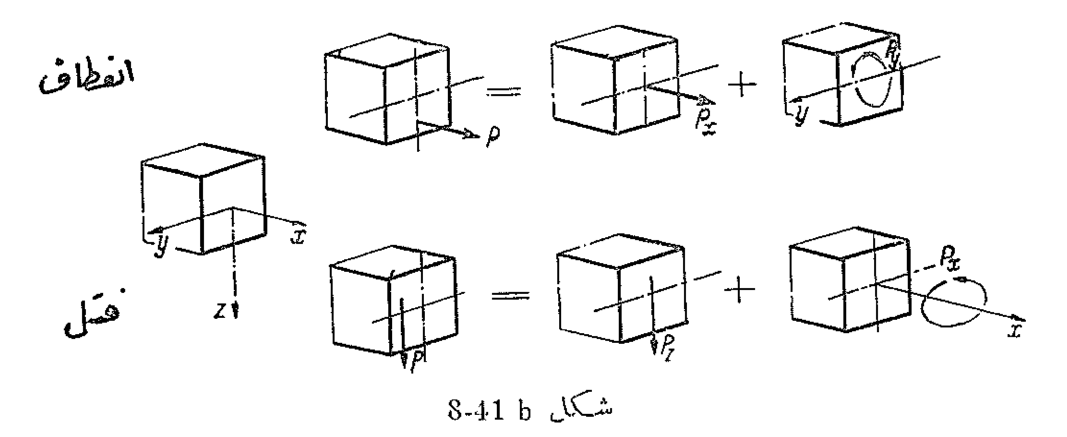
يمثل الشكل (8-41a لامركزية وحيدة المحور وهي التي تقع فيها نقطة تطبيق القوة اللامركزية على احد المحاور الرئيسية . فاذا وقعت نقطة تطبيق القوة اللامركزية على المحور z فان توزيع الاجهاد الناظمي يصبح كالتالي :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

حيث أن :

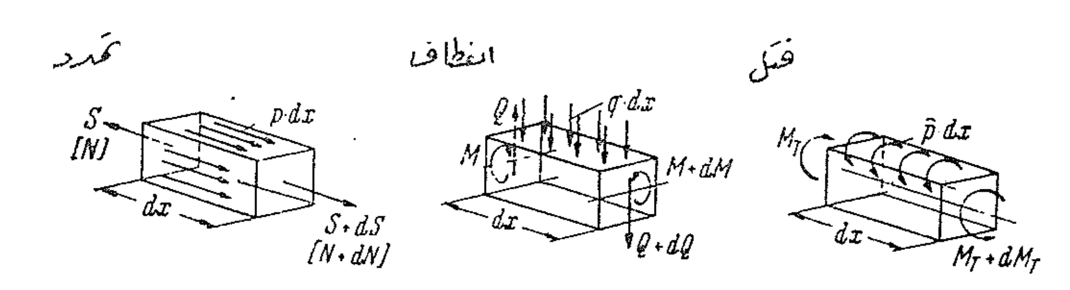
$$N_x = P \quad , \quad M_y = P z_B$$

اذا توازى حامل القوة اللامركزية المؤثرة مع المحور الاوسط للقضيب فالعزم المتشكل هو عزم انعطاف اما اذا وقع حاملها في مستوي المقطع العرضي للقضيب فان العزم المتشكل هو عزم فتل (شكل 8-41 b) .



شكل 8-41 b

يشير الشكل (8-41 c) الى ثلاث حالات هي الاستطالة (التمدد) والانعطاف والفتل .



شكل 8·41 c

٨ ـ ٣ ـ ٢ المحاور z , y ليست محاور عطالة رئيسية

إذا لم تكن المحاور z , y محاور عطالة رئيسية فان توزيع الاجهاد الناتج عن قوة لا مركزية تؤثر في النقطة $B(y_B , z_B)$ يتم الحصول عليه بواسطة العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \frac{N}{F} - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z \quad (8{\cdot}68)$$

حيث أن

$$N = P \;;\; M_y = P z_B \;;\; M_z = -P.y_B$$

مثال 91 :

حمل عمود بيتوني موثوق من نهايته السفليةبقوة لامركزية P تؤثر على الحافة 3 (شكل 8·42).

المعطى : $P=30{,}0$ Mp والوزن النـوعي للبيتـون $\gamma=2{,}4$ Mp cm^{-3} و $H=2{,}50$ m و $h=0{,}6$ m و $b=0{,}4$m .

المطلوب :

حساب الاجهادات الناظمية المتشكلة في نقاط الزوايا للمقطع العرضي الـكائن عند نقطة الوثاقـة (يدخل في حساب الاجهادات تأثير الوزن الذاتي للعمود بعين الاعتبار) .

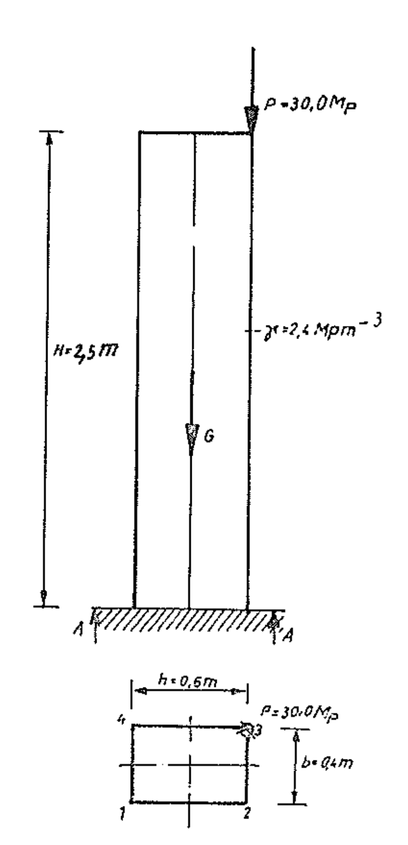
الحـل :

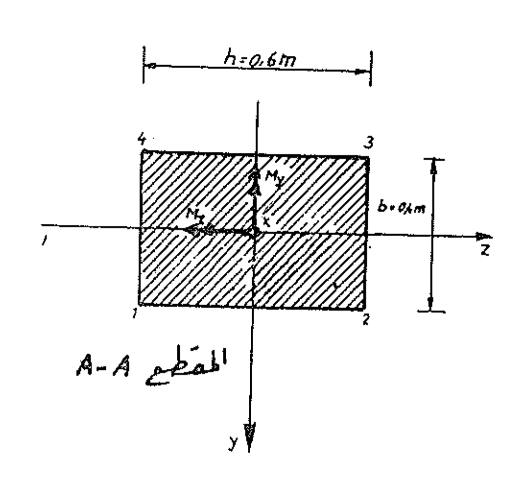
مساحة المقطع العرضي للعمود :

$$F = b\,h = 0{,}4 \,.\, 0{,}6 = 0{,}24 \ m^2$$

الوزن الذاتي للعمود :

$$G = \gamma\, F\, H = 2{,}4\ 0{,}24.2{,}5 = 1{,}44 \ Mp$$





شكل 8-42

عزوم عطالة المقطع العرضي :

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,4\ 0,6^3}{12} = 0,0072\ m^4$$

$$I_{zz} = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,6 . 0,4^3}{12} = 0,0032\ m^4$$

قيم القطع في المقطع العرضي الكائن عند نقطة الوثاقة :

$$N_x = -(P+G) = -(30,00+1,44) = -31,44\ Mp$$

$$M_y = -P\ \frac{h}{2} = -30,0 . 0,3 = -9,0\ Mpm$$

$$M_z = -P\ \frac{b}{2} = -30,0 . 0,2 = -6,0 Mpm$$

تتشكل في المقطع العرضي حالة انعطاف منحرف مركب . ان المحاور z , y هي محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي (لكونها محاور تناظر) .

توزيع الاجهاد الناظمي :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y$$

$$\sigma_x = -\frac{31,44}{0,24} - \frac{9,0}{0,0072} z + \frac{6,0}{0,0032} y = -131,0 - 1250,0\, z + 1875,0\, y$$

احداثيات حواف المقطع العرضي :

$$y_1 = +\frac{b}{2} = +0,2 \text{ m} \quad ; \quad z_1 = -\frac{h}{2} = -0,3 \text{ m}$$

$$y_2 = +\frac{b}{2} = +0,2 \text{ m} \quad ; \quad z_2 = +\frac{h}{2} = +0,3 \text{ m}$$

$$y_3 = -\frac{b}{2} = -0,2 \text{ m} \quad ; \quad z_3 = +\frac{h}{2} = +0,3 \text{ m}$$

$$y_4 = -\frac{b}{2} = -0,2 \text{ m} \quad ; \quad z_4 = -\frac{h}{2} = -0,3 \text{ m}$$

الاجهادات الناظمية على حواف المقطع العرضي (اجهادات الحواف) :

$$\sigma_{xx1} = -131,0 - 1250\,(-0,3) + 1875\,(+0,2) = +619,6 \text{ Mp m}^{-2}$$

$$\sigma_{xx2} = -131,0 - 1250\,(+0,3) + 1875\,(+0,2) = -131,0 \text{ Mp m}^{-2}$$

$$\sigma_{xx3} = -131,0 - 1250\,(+0,3) + 1875\,(-0,2) = -881,0 \text{ Mp m}^{-2}$$

$$\sigma_{xx4} = -131,0 - 1250\,(-0,3) + 1875\,(-0,2) = -131,0 \text{ Mp m}^{-2}$$

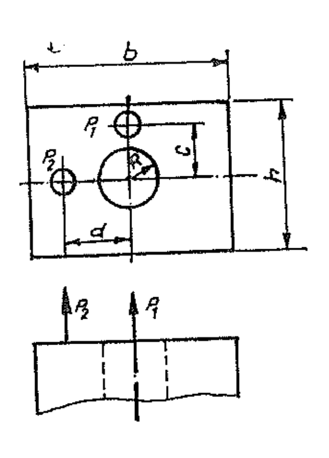
مثال 92 :

حمل عمود مقطعه العرضي مستطيل ويحتوي على ثقب في وسطه ، بقوتين وحيدتين لا مركزيتين P_1, P_2 (شكل 8-43) .

المعطى :

$R = 2\ cm$, $h = 8\ cm$; $d = 4\ cm$; $c = 3cm$, $b = 12cm$, $P_2 = 2000\ kp$, $P_1 = 1000\ kp$

المطلوب: حساب توزيع الاجهاد الناظمي وتحديد موضع المحور الحيادي وحساب الاجهاد الناظمي الاعظمي .



شكل 8 43

الحل :

بسبب كون المحاور z , y محاور تناظر المقطع العرضي فهي اذاً محاور عطالة رئيسية مركزية له. ان المقطع العرضي المدروس موجود في حالة انعطاف منحرف مركب ويحتوي على قيم القطع التالية :

$$M_y = -P_1 \cdot c \quad ; \quad M_z = -P_2 \cdot d \quad ; \quad N_x = P_1 + P_2$$

علاقة توزيع الاجهاد الناظمي (في حالة كون z , y محاور عطالة رئيسية) :

$$\sigma_x = \frac{P_1 + P_2}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y$$

القيم الهندسية للمقطع العرضي :

$$F = b\,h - \pi R^2 = 83{,}44\ cm^2$$

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12} - \frac{R^4 \pi}{4} = 499{,}44\ cm^4$$

$$I_{zz} = \frac{hb^3}{12} - \frac{R^4 \pi}{4} = 1139{,}44\ cm^4$$

بتبديل القيم الهندسية في علاقة الاجهاد ينتج :

$$\sigma_x = 36 + 7{,}026\, y - 6\, z$$

تبدل z, y بالـ cm فينتج من العلاقة ان σ_x هي بالـ (kp/cm^2) .

المحور الحيادي:

$$\sigma_x = 0 = 36 + 7{,}026\, y - 6\, z \;;\quad z = 6 + 1{,}171\, y$$

تشير هذه المعادلة الى ان المحور الحيادي هو خط مستقيم يشكل مع المحور z الزاوية β وهو يقطع المحور z في النقطة $z = +6$ cm .

$$tg\,\beta = \frac{1}{1{,}171} = 0{,}855 \quad ; \beta = 40{,}53^{\circ}$$

$$\max \sigma_x = \sigma_x \left(y = \frac{b}{2} , z = -\frac{h}{2}\right) = +\ 102{,}2\ kp/cm^2$$

٨ ـ ٤ نواة المقطع العرضي

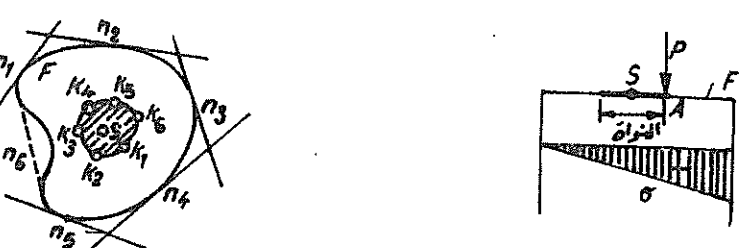
لقد تبين في حالة الانعطاف المركب ان المحور الحيادي إما أن يفصل (يشطر) المقطع العرضي إلى منطقتين احداها مشدودة والاخرى مضغوطة (المحور الحيادي يقع داخل المقطع العرضي) أو أن يقع خارج المقطع العرضي وكحالة حدية ملامسته ، عندئذ تتشكل على سطح المقطع العرضي بكامله اجهادات ناظمية من اشارة واحدة وذلك حسب إتجاه القوة اللامركزية المؤثرة ، إما اجهاد شد فقط أو إجهاد ضغط فقط .

تصادف المهندس في الحياة العملية مواد كثيرة ليس لها المقدرة على تحمل نوع معين من الاجهادات، وعلى سبيل المثال فان مقاومة الاحجار والبيتون للشد ضعيفة اذا ما قورنت بمقاومتها للضغط . كما ان هناك اجزاء منشآت لا يسمح بتحميلها بنوع معين من الاجهادات الناظمية او يرغب ان يكون الاجهاد الناظمي على كامل المقطع العرضي هو إجهاد ضغط فقط ، على سبيل المثال نعل الاساسات التي لا تسمح المواصفات من ان تنقل اليها اجهادات شادة . لذا يسعى لجعل نقطة تطبيق (نقطة تأثير) القوة اللامركزية قريبة من مركز ثقل المقطع العرضي قدر المستطاع والحصول على وضع يكون فيه المحور الحيادي خارج المقطع العرضي او على الاكثر ملامسته حتى يكون كامل المقطع العرضي مضغوطاً او مشدوداً فقط .

توجد على مقربة من مركز ثقل المقطع العرضي منطقة تدعى **سطح النواة** او باختصار **نواة المقطع العرضي** ، من خصائصها انه إذا وقع مركز تطبيق القوة اللامركزية داخلها فان المحور

الحيادي يقع خارج المقطع العرضي وبالتالي يتشكل فيه بكامله إجهاد ناظمي من إشارة واحـدة (اي ان الاجهاد الناظمي لا يغير اشارته في المقطع العرضي) اما اذا وقع مركز تطبيق القوة اللامركزية خارج حدود النواة فان المحور الحيادي يقطع المقطع العرضي وفي هذه الحالة يكون المقطع العرضي مضغوطاً في جزء منه ومشدوداً في الجزء الأخر (اي ان الاجهاد النـاظمي يغير اشارته في المقطع العرضي) واما اذا وقع مركز تطبيق القوة اللامركزية على محيط النواة فان المحور الحيادي (المحور السليم) يمس محيط المقطع العرضي وبذلك تسيطر على كامل المقطع العرضي اجهادات ناظمية من نوع واحد (اي ان المقطع العرضي اما ان يكون مضغوطاً او يكون مشدوداً) .

لتعيين نواة المقطع العرضي ينبغي التخيل بأن المحور الحيادي هو دائماً في حاله تماس مع نقاط محيط المقطع العرضي ، عندها ترسم نقطة تطبيق القوة حدود النواة . إذاً يجعل المحور الحيادي يمس المحيط المغلف للمقطع العرضي F في نقطة ما منه ثم تعين بالنسبة لهذا الوضع نقطة تأثير القوة اللامركزية التابعة له والتي تمثل في نفس الوقت نقطة من المحيط المغلف للنواة وبتكرار هذه العملية على عدة نقاط مختلفة (المحيط المغلف للمقطع العرضي) إلى ان يتم الحصول على مجموعة من النقاط وبذلك يتم تعيين النواة . ولكي يتم الحصول على المحيط المغلف للنواة ينبغي وصل النقاط التي تم ايجادها مع بعض بخطوط مستقيمـة . ينبغي إغلاق الزوايا البـارزة في المقطع العرضي بمستقيم حـتى لا تقطـع بعض هـذه المماسات سطح المقطع العرضي فـي نقطـــة ما (شكل 8 44) .



شكل 8-44

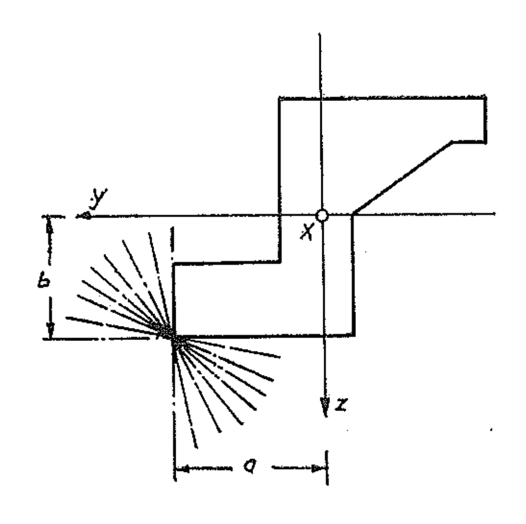
شكل 8-45

تسمى النقاط الواقعة على المحيط المغلف للنـواة ، **بنقاط النواة** . تتبع المحور n_1 نقطـة النواة k_1 كما تتبع المحور الحيادي n_2 نقطة النواة k_2 والخ .

تقابل كل ضلع من أضـــلاع مضلع منتظم نقطة من محيط النواة كما يقابـــل كل رأس في المضلع خط مستقيم في محيط النواة (تقابـــل الرؤوس في المقطع العرضي F أضلاع في محيط النواة والعكس صحيح) وذلك لأن المماسات أثناء انتقالها من أحد أضلاع المضلـع إلى الضلع

الذي يليه تدور حول نقطة الرأس الواقعة بينها وبذلك تنتقل نقطة تطبيق القوة التابعة لها على طول خط مستقيم . توصل نقاط النواة التي تقابل أضلاع المضلع مع بعضها بخطوط مستقيمة . حسب ما ذكر فان نواة المضلع المنتظم هي مضلع منتظم أيضاً ، عدد رؤوسها يساوي عـــدد رؤوس المقطع العرضي . إذاً نواة المثلث هي مثلثة أيضاً ونواة المربع هي مضلع رباعي ونـواة الدائرة هي دائرة. اذا كان المقطع العرضي متناظراً بالنسبة لمحور ما فنواتـه تكون أيضاً متناظرة بالنسبة لنفس المحور . بما أن الاجهادات الناظمية في حالة الشد أو الضغط المركزي (P تؤثر في مركز ثقل المقطع العرضي s) تتوزع على كامل المقطع العرضي توزيعاً منتظماً (ثابت القيمة) إذاً ينبغي أن يقع مركز ثقل المقطع العرضي دائماً داخل النواة (شكل 8-45) .

لتعيين نقاط المحيط المغلف لنواة سطح مضلع والعائدة لرؤوسه ينبغي تخيل كل المستقيمات التي تمر بنقطة الرأس والتي لا تقطع المقطع العرضي وكأنها محاور حيادية (شكل 8-46) عندئذ يمكن البرهان على أن كل النقاط ذات الاحداثيات z_k , y_k والتي تتبع هـــذه المستقيمات تقع على مستقيم واحد .



شكل 8-46

تمثل مجموعة (حزمة) المستقيمات التي تمر من نقطة الرأس ذات الاحـداثيات a و b بالمعادلة التالية :

$$z = b + m(y - a)$$

أو

$$1 + \frac{m}{b - ma}\ y - \frac{1}{b - ma}\ z = 0$$

حيث أن الحرف m هو عامل الاتجاه وهو في هذه الحالة قيمة متغيرة . بمقارنة المعادلة السابقة مع معادلة المحور الحيادي (العلاقة 8.65) التالية :

$$1 + \frac{y_B}{i_{zz}^2}\ y + \frac{z_B}{i_{yy}^2}\ z = 0$$

ينتج :

$$z_B = i_{zz}^2\ \frac{m}{b - ma}$$

$$y_B = -i_{yy}^2 \frac{1}{b - ma}$$

باختزل العامل m ينتج :

$$1 + \frac{a}{i_{zz}^2}\ y_B + \frac{b}{i_{yy}^2}\ z_B = 0$$

وبهذا يكون قد برهن على أن النقاط ذات الاحداثيات (y_k , z_k) لكل عامل من عوامل الاتجاه تقع على مستقيم واحد .

٨ ـ ٤ ـ ١ تعيين نقاط نواة المقطع العرضي

α ـ تعيين نقاط النواة بطريقة تحليلية (المحاور y , z محاور عطالة رئيسية) .

بالرجوع إلى معادلة المحور الحيادي ، في حالة الانعطاف المنحرف المركب ، التالية :

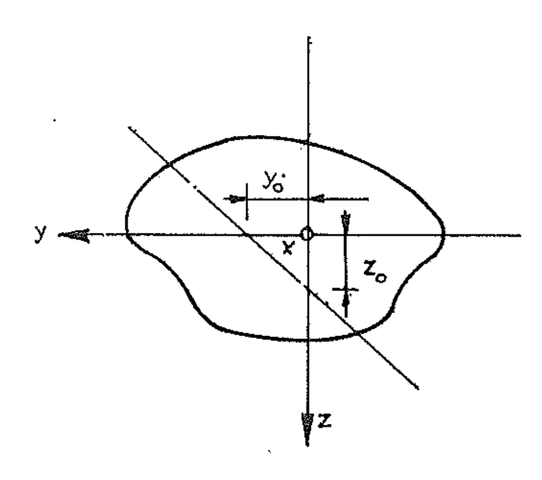
$$1 + \frac{z_B}{i_{yy}^2}\ z + \frac{y_B}{i_{zz}^2}\ y = 0$$

(والتي تصلح عندما تكون $z_B \neq 0\ ,\ y_B \neq 0\ ,\ N_x \neq 0$ وعندما تكون المحاور z , y محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي) وبمقارنتها مع معادلة المستقيم الممثل في الشكل (8.47) :

$$z = z_0 - \frac{z_0}{y_0} y$$

أو

$$1 - \frac{1}{z_0} z - \frac{1}{y_0} y = 0 \qquad (8\cdot69)$$



شكل 8.47

بعد إعتباره محوراً حيادياً ، يتم الحصول على احداثيات نقطة تطبيق القـوة اللامركزية التاليـة . (شكل 8.48 a):

$$y_B = -\frac{i_{zz}^2}{y_0} \quad , \quad z_B = -\frac{i_{yy}^2}{z_0}$$

وذلك لكون المعادلتين تمثل نفس المستقيم ألا وهو المحور الحيادي . بجعل المحور الحيادي يمس محيط المقطع العرضي في نقطة ما إحـداثياتها z_R , y_R (بجعل $z_0 = z_R$, $y_0 = y_R$)، عندهـا تنطبق نقطة تأثير القوة اللامركزية على إحـــدى نقاط النواة التي احداثياتها z_k , y_k (بذلك تصبح $y_B = y_k$, $z_B = z_k$) والتي تعين بواسطة العلاقات التالية :

$$y_k = -\frac{i_{zz}^2}{y_R} \quad , \quad z_k = -\frac{i_{yy}^2}{z_R}$$

أو بعد استخدام تعريف أنصاف أقطار المطالة والعزوم المقاومة :

$$y_k = -\frac{I_{zz}}{F\, y_R} = -\frac{W_{zz}}{F} \;,\; z_k = -\frac{I_{yy}}{F\, z_R} = -\frac{W_{yy}}{F} \qquad (8\text{-}70)$$

حيث أن I_{zz}, I_{yy} هي عزوم عطالة ألمقطع العرضي بالنسبة للمحاور z, y.

و i_{zz}, i_{yy} هي انصاف أقطار العطالة بالنسبة للمحار z, y .

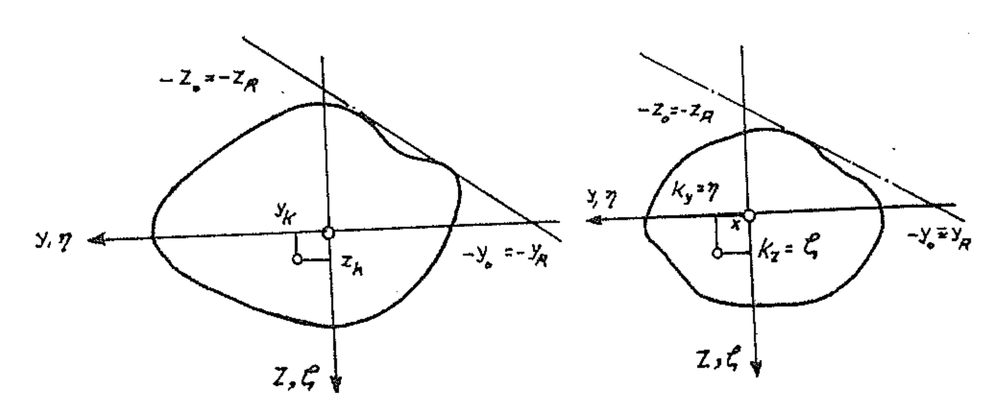
و F هي مساحة المقطع العرضي .

و z_R, y_R هي احداثيات نقاط التماس الواقعة على حافة المقطع العرضي .

و $z_k \; y_k$ هي احداثيات نقطة النواة .

بواسطة هذه العلاقات يتم تحديد إحداثيات نقاط النواة وبفضلها يتم حساب أبعاد النواة (يطلق على البعد بين مركز ثقل المقطع العرضي وبين نقطة النواة ببعد النواة) . من هـذه العلاقات يستخلص ما يلي :

تقع نقطة النواة التابعة لماس على الحافة العليا تحت مركز s ، اما نقطة النواة العائـدة لمـماس على الحافة السفلى فتقع فوق مركز الثقل s أو بمعنى أخر فان إتجاه نقطـة النواة ونقطة التماس بالنسبة لمركز الثقل s متعاكسين .



شكل 8.48

β ـ تعيين نقاط النواة تخطيطياً (المحاور z, y محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي) .

يتم تعيين نقاط النواة بطريقة تخطيطية وخاصة المقاطع العرضية غير المنتظمـة في الشكل باتباع الخطوات التالية (أما الطريق المتبع فيها فهو الطريق العكسي لايجاد المحـور الحيادي في حالـة إعطاء نقطة تأثير القوة) :

١ ـ يختار مقياس مناسب لانصاف أقطار العطالة i_{zz}, i_{yy} .

٢ ـ ترسم القيمة i_{yy} على الاحداثي y والقيمة i_{zz} على الاحداثي z (كلاهما ابتداء من مركز ثقل المقطع العرضي s) .

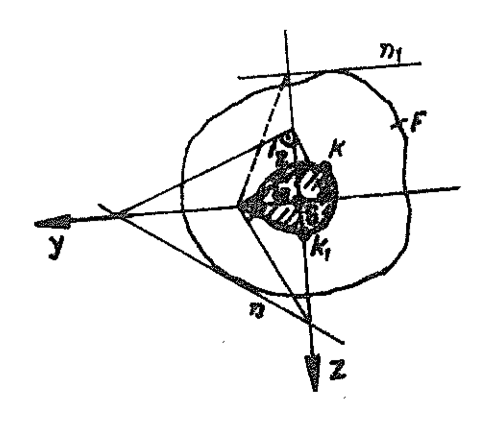
٣ ـ يرسم مماساً ما (وليكن المماس n) على حافة المقطع العرضي F ثم تعين نقاط تقاطعه مع المحاور الاحداثيه y , z (a نقطة التقاطع مع المحور z , b نقطه التقاطع مع المحورy).

٤ ـ بوصل النقطة b (نقطة تقاطع المماس مع الاحداثي y) ونهاية القيمة i_{zz} (المرسومة على الاحداثي z) بمستقيم ثم باقامة عمود على المستقيم المذكور يمر من نهاية i_{zz} فيقطع الاحداثي y في النقطة $\bar{b}$. القيمة $S\bar{b}$ هي مسقط نقطة النواة على الاحداثي y (هي إحداثي نقطة النواة بالنسبة للمحور y) .

٥ ـ بوصل النقطة a (نقطة تقاطع المماس مع الاحداثي z) ونهاية القيمة i_{yy} المرسومة على الاحداثي y) بمستقيم ثم باقامة عمود على المستقيم المذكور ويمر من نهاية i_{yy} فيقطع الاحداثي z في النقطة $\bar{a}$. القيمة $s\bar{a}$ هي مسقط نقطة النواة على الاحداثي z (هي احداثي نقطة النواة بالنسبة للمحور z) .

٦ ـ بالاستعانة بالقيم $s\bar{a}$, $s\bar{b}$ يتم تحديد نقطة النواة k التابعة للماس n .

يشير الشكل (8.48) الى كل الخطوات المذكورة كما يشير لطريقة تعيين نقطة النواة k_1 العائدة للماس n_1 الذي يتعامد مع المحور z . بعد رسم سلسلة من المماسات على حافة المقطع العرضي وتحديد نقاط النواة التابعة لها بالطريقة المذكورة ، يستطاع تعيين النواة بوصل النقاط مع بعضها بواسطة خطوط مستقيمة .



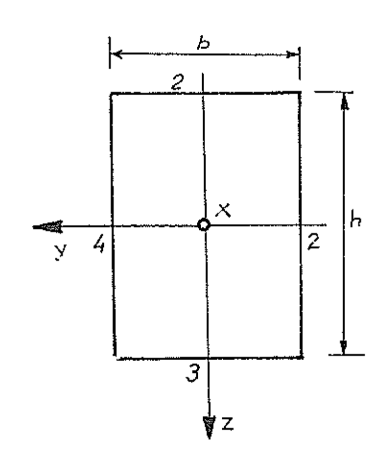
شكل 8.48

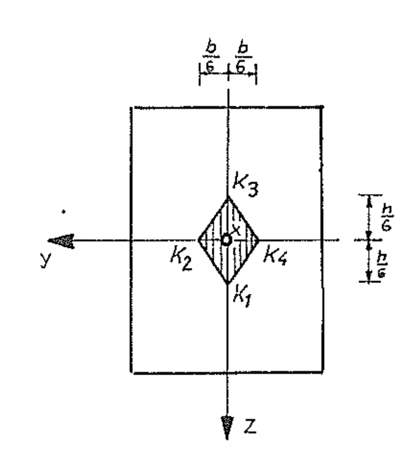
٨ ـ ٤ ـ ٢ أمثلة

مثال 93 :

إن المقطع العرضي لجائز هو مستطيل الشكل (الشكل 8.49) .

المعطى: b , h .





شكل 8-49

شكل 8-50

المطلوب : تعيين أبعاد نواة المقطع العرضي ورسمها .

الحل :

مساحة المستطيل :

$$F = b\,h$$

عزوم عطالة المستطيل :

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad I_{zz} = \frac{hb^3}{12}$$

نقاط النواة :

إحداثيات نقطة النواة العائدة للماس 1 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط : $\left(y_R = \infty \;, \; z_R = -\frac{h}{2} \right)$

$$y_{k1} = -\frac{I_{zz}}{F y_R} = 0 \; ; \; z_{k1} = -\frac{I_{yy}}{F z_R} = -\frac{bh^3/12}{bh\,(-h/2)} = +\frac{h}{6}$$

احداثيات نقطة النواة العائدة للماس 3 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط : $(y_R = \infty \;, \; z_R = +h/2)$

$$y_{k3} = 0 \; ; \; z_{k3} = -\frac{bh^3/12}{bh(+h/2)} = -\frac{h}{9}$$

احداثيات نقطة النواة العائدة للماسين2 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط

: $\left(y_R = - \frac{b}{2} \quad , \quad z_R = \infty \right)$

$$y_{k2} = - \frac{hb^3/12}{bh(\ \ b/2)} = + \frac{b}{6} \quad ; \quad z_{k2} = 0$$

احداثيات نقطة النواة العائدة للماسين 4 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط

: $\left(y_R = + \frac{b}{2} \quad , z_R = \infty \right)$

$$y_{k4} = - \frac{hb^3/12}{bh(+b/2)} = - \frac{b}{6} \quad , z_{k4} = 0$$

تتبع حزمة المستقيمات التي تمر من كل رأس من رؤوس المستطيل ، المستقيمات الممثلة في الشكل (8-50) وبهذا يتحدد شكل النواة .

يلاحظ من الشكل بأن نواة المستطيل هي عبارة عن شكل رباعي . يتبع كل رأس في المستطيل مستقيم في النواة ويتبع كل ضلع في المستطيل رأسين في النواة ، كما يلاحظ بان محاور تناظر المستطيل هي في نفس الوقت محاور تناظر لنواته .

حالات خاصة :

المربع $(b=h=a)$:

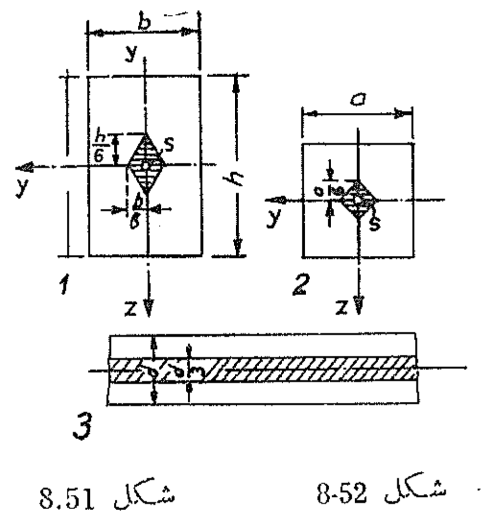
بتبديل $b=h=a$ في علاقات احداثيات النواة السابقة يتم الحصول على احداثيات النواة التابعة للمربع التالية (شكل 8-51) :

$$k = k_y = k_z = \frac{a}{6}$$

شريحة متوازية :

شريحة متوازية عرضها d (على سبيل المثال المسقط الرأسي لجدار طويـل والذي يمكن أن يعتبر مستطيلا لانهائي الطول) شكل (8-52) :

إن نواة هذه الشريحة هي أيضاً شريحة متوازية عرضها $d/3$.



شكل 8.51　　　　　شكل 8-52

مثـال 94 :

مقطع عرضي على شكل مثلث متساوي الاضلاع (شكل 8.53) .

المعطى : h , b .

المطلوب : تعيين أبعاد نواة المقطع العرضي .

الحل :

مساحة المثلث :

$$F = \frac{1}{2}\, b\, h$$

عزوم عطالة المثلث :

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{36} \quad , \quad I_{zz} = \frac{hb^3}{48}$$

إحداثيات نقاط النواة :

إحداثيات نقطة النواة العائدة للماس 2-1 الذي يقطع مجموعة المحـاور الاحداثيـة في النقـاط

: $\left(y_R = \infty \quad ; \quad z_R = + \frac{h}{3} \right)$

$$y_k = - \frac{I_{zz}}{F.y_R} = 0 \quad ; \; z_k = - \frac{I_{yy}}{F.z_R} = - \frac{bh^3/36}{\frac{1}{2}\, bh(\frac{h}{3})} = - \frac{h}{6}$$

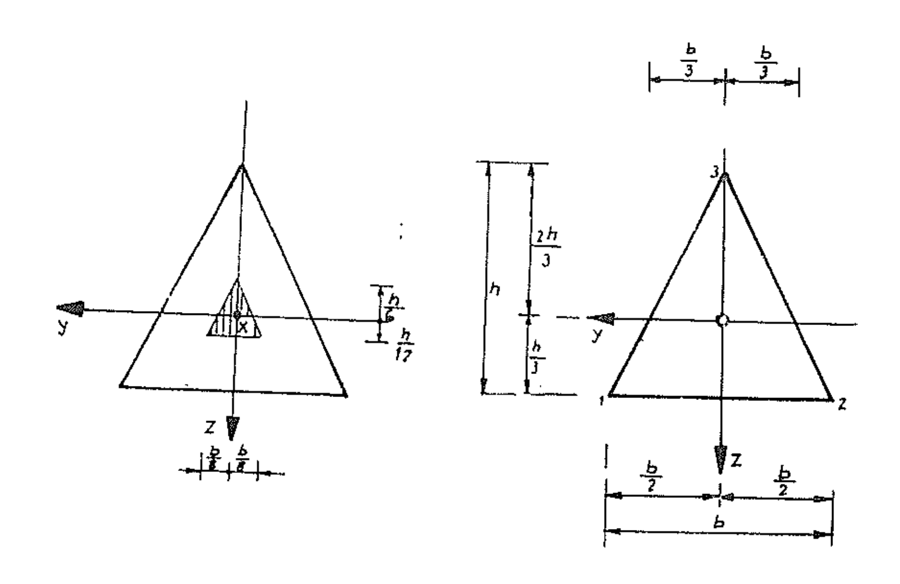
احداثيات نقطة النواة العائدة للماس 3 - 2 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثيـة في النقـاط : $(y_R = -\frac{1}{3} b \ , \ z_R = - \frac{2h}{3})$

$$y_k = - \frac{hb^3/48}{\frac{1}{2}bh\left(-\frac{1}{3}b\right)} = + \frac{b}{8} \ , \ z_k = - \frac{bh^3/36}{\frac{1}{2}bh\left(-\frac{2}{3}h\right)} = + \frac{h}{12}$$

احداثيات نقطة النواة العائدة للماس 1 - 3 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثيـة في النقـاط : $(y_R = \frac{1}{3} b \ , \ z_R = - \frac{2}{3} h)$

$$y_k = - \frac{hb^3/48}{\frac{1}{2}bh\left(+\frac{1}{3}b\right)} = - \frac{b}{8} \quad , \quad z_k = - \frac{bh^3/36}{\frac{1}{2}bh\left(-\frac{2}{3}h\right)} = + \frac{h}{12}$$

تقابل حزمة المستقيمات التي تمر من نقاط زوايا المثلث مستقيمات تصل بين نقاط النواة كما يشير الشكل (8-53) . ان محاور تناظر المثلث متساوي الاضلاع هي في نفس الوقت محاور تناظر لنواته .



شكل 8-53

مثال 95 :

مقطع عرضي دائري الشكل (8-54) .

المعطى : R .

المطلوب : حساب أبعاد نواة المقطع العرضي .

الحل :

بسبب تناظر الدائرة بالنسبة لجميع المحاور المركزية فان نواتها هي أيضاً دائرة متناظرة بالنسبة لنفس المحاور المركزية .

مساحة الدائرة :

$$F = \pi R^2$$

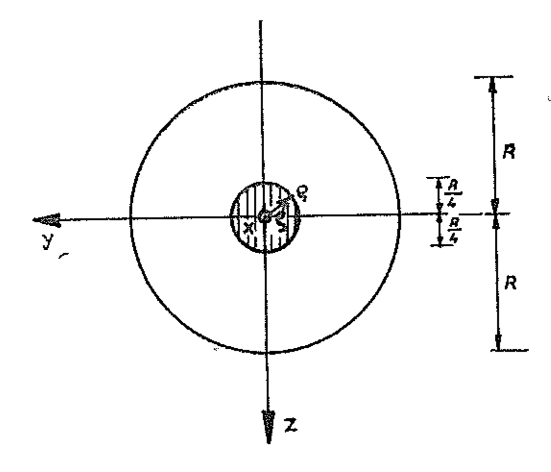
عزوم عطالة الدائرة :

$$I_{yy} = I_{zz} = I = \frac{\pi R^4}{4}$$

نقاط النواة :

يبلغ نصف قطر دائرة النواة ما يلي :

$$\rho_k = \sqrt{y_k^2 + z_k^2} = \frac{I}{F \cdot R} = \frac{\pi R^4 / 4}{\pi R^2 \cdot R} = \frac{R}{4}$$



شكل 8,54

مثال 96 :

مقطع عرضي على شكل حلقة دائرية (شكل 8,55) .

المعطى : $D = d_a = 2R \; ; \; d = d_i = 2r$.

المطلوب : تعيين أبعاد نواة المقطع العرضي ورسمها .

الحل :

مساحة الحلقة الدائرية :

$$F = \pi\ (R^2 - r^2)$$

عزم عطالة الحلقة الدائرية :

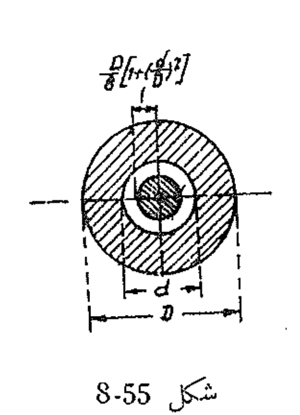
$$I_{yy} = I_{zz} = I = \pi\ \frac{(D^4 - d^4)}{64} = \pi\ \frac{R^4 - r^4}{4}$$

نقاط النواة :

ان نواة الحلقة الدائرية هي دائرة نصف قطرها ρ_k :

$$\rho_k = \frac{I}{F\,.\,R} = \frac{\pi\ \frac{R^4 - r^4}{4}}{\pi(R^2 - r^2).R} = \frac{R^2 + r^2}{4\,R}$$

$$= \frac{R}{4}\left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = \frac{D}{8}\left[1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right] = \text{const}$$



شكل 8-55

شكل 8.56

مثـال 97 :

يتألف مقطع عرضي من بروفيل على شكل حرف I (شكل 8-56) .

المعطى : ابعاد المقطع العرضي I 220 .

المطلوب : تعيين نقاط نواة المقطع العرضي .

الحــــل :

لتعيين النواة تغلق في البداية الرؤوس البارزة في المقطع العرضي وبذلك ينتج عنه مغلف مستطيل الشكل . اذاً نواة المقطع العرضي للبروفيل هي مضلع رباعي (في هذه الحالة ، معين) لكن هذه النواة تختلف عن نواة المستطيل المغلف المذكور لاختلاف عزوم العطالة والمساحات بين البروفيل والمستطيل المغلف وهي لا تتفق مع بعضها الا في الشكل .

بسبب تناظر المقطع العرضي بالنسبة للمحورين y , z فان النواة هي أيضاً متناظرة بالنسبة لنفس المحاور ولذلك يكتفى بتعيين نصف النواة .

القيم الهندسية للبروفيل (وتؤخذ من الجدول الموجود في الملحق) :

$F = 39{,}5\ cm^2 \quad : \quad I_{yy} = 3060\ cm^4 \quad ; \quad I_{zz} = 162\ cm^4$

$b = 9{,}8\ cm \quad ; \quad h = 22{,}0\ cm$

نقــاط النواة :

احداثيات نقطة النواة العائدة للماس 1 – 1 الذي يقطع مجموعة المحــاور الاحداثيــة في النقــاط : ($y_R = \infty$ و $z_R = \frac{h}{2}$) :

$$y_R = -\frac{I_{zz}}{F \cdot y_R} = 0 \quad , \quad z_R = -\frac{I_{yy}}{F \cdot z_R} = -\frac{3060}{39{,}5 . 11} = -7{,}04\ cm$$

احداثيات نقطة النواة العائدة للماس 2 – 2 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحــداثيــة في النقــاط : ($y_R = b/2$, $z_R = \infty$)

$$y_k = -\frac{I_{zz}}{F \cdot y_R} = -\frac{162}{39{,}5 \cdot 4{,}9} = -0{,}84\ cm \quad ; \quad z_k = 0$$

مثـال 98 :

مقطع عرضي على شكل زاوية (شكل 8.57) .

المطلوب : تعيين نواة الزاوية L 90.90.13 بالطريقة التخطيطية .

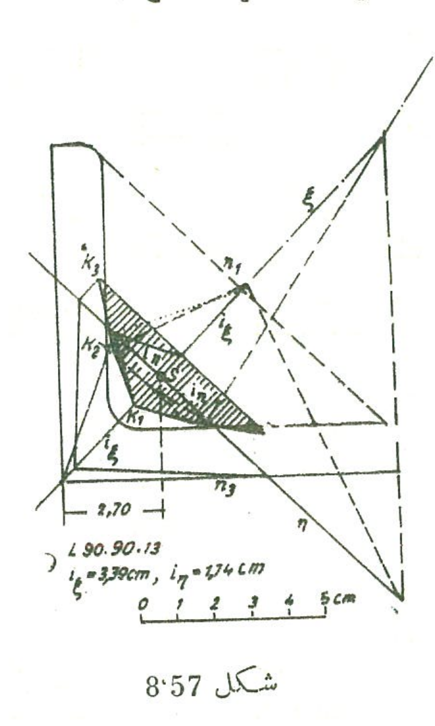
الحـل :

من جدول المقاطع العرضــــية الموجود في الملحق تقرأ أنصاف اقطار العطالة التابعــة للمقطــع العرضي المدروس :

$$i_1 = 3{,}39 \text{ cm} \quad ; \quad i_2 = 1{,}74 \text{ cm}$$

وكذلك بقية القيم اللازمة الاخرى . بعد اختيارمقياس الرسم المناسب المنوه في الشكل (8.57) يرسم نصف قطر العطاله i_1 على المحور الرئيسي s_1 ويرسم نصف قطر العطالة i_2 على المحور s_2 كل منهما إبتداء من مركز الثقل وبمقيس رسم الاطوال . بعد ذلك يغلق الرأس البارز للمقطع العرضي بواسطة مستقيم (المستقيم n_1) فينشأ عن ذلك مضلع خماسي مغلف متناظر بالنسبة للمحور الرئيسي s_1 . بالنظر إلى المضلع المغلف يرى أن النواة هي أيضاً مضلع خماسي ومتناظر بالنسبة للمحور الرئيسي s_1 . لتعيين النواة التي تمثل مضلعاً خماسياً متناظراً يكتفـــى بانشاء ثلاثة نقاط منها فقط .

لقد تم في الشكل (8.57) تعيين نقاط النواة k_1 , k_2 , k_3 التابعة للماسات n_1 , n_2 , n_3 . لتعامد المستقيم n_1 والمحور الرئيسي s_1 ينبغي أن تقع النقطة k_1 على المحور s_1 .



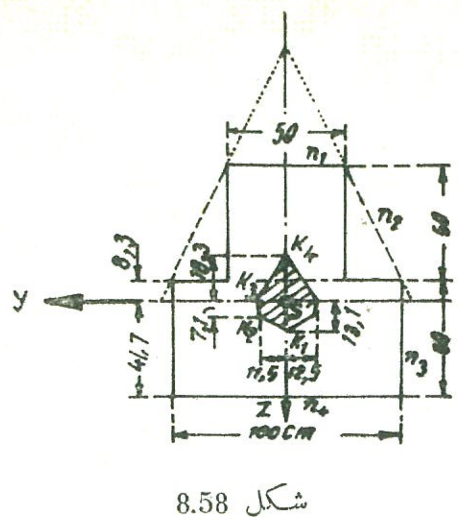
شكل 8٫57

مثـال 99 :

مقطع عرضي لوتد بيتوني على شكل حرف T (شكل 8 58) .

المعطى : ابعاد المقطع العرضي .

المطلوب : تعيين نواة المقطع العرضي تحليلياً مع الرسم .



شكل 8.58

الحل :

في البداية تغلق كافة البروزات الموجودة في المقطع العرضي بواسطة مستقيمات فينشأ عنه مضلع سداسي مغلف متناظر بالنسبة للمحور z . بذلك فان نواة المقطع العرضي للوتد هي مضلع سداسي متناظر بالنسبة للمحور z أيضاً . لاسباب التناظر يكتفى في هذه الحالة لتحديد النواة ايجاد أربع رؤوس منها فقط (أربع نقاط من المحيط المغلف للنواة) وهي k_1 , k_2 , k_3 , k_4 العائدة للمحاور الحيادية n_1 , n_2 , n_3 , n_4 .

لتكن y_i , z_i هي إحداثيات نقاط تقاطع المحور الحيادي n_i مع مجموعة المحاور الاحداثيـة ولتكن y_{ki} , z_{ki} هي احداثيات نقطة النواة k_i العائدة للمحور الحيادي n_i والـتي تحسب بواسطة العلاقات التالية :

$$y_{ki} = -\frac{i_{xx}^2}{y_i} \quad , \quad z_{ki} = -\frac{i_{yy}^2}{z_i}$$

عزوم العطالة :

لحساب عزوم العطالة الرئيسية I_{yy} , I_{zz} بالنسبة المحاور المركـزية الرئيسية y , z يجزىء المقـطع العرضي الى مربع مساحتـه $F_1 = 50 . 50\ cm^2$ والى مستطيـل مساحتـه $F_2 = 100 . 50\ cm^2$. بالاستعانة بعلاقة شتاينز يتم الحصول على عزم العطالة I_{zz} وذلك بالاعتماد على العلاقة (1.30) :

$$I_{yy} = I_{yy_1} + I_{yy_2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e^2$$

أما I_{zz} فتساوي مجموع عزوم عطالة السطحين الجزئيين وذلك لمرور المحور z مع مراكز ثقلها.

مساحة المقطع العرضي :

$$F = F_1 + F_2 = 50 . 50 + 100 . 50 = 7500 \text{ cm}^2$$

القيمة التربيعية لأنصاف اقطار العطالة :

$$i_{yy}^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{1}{7500}\left[\frac{50^4}{12} + \frac{100 . 50^3}{12} + \frac{2500 . 5000}{2500 + 5000} . 50^2\right]$$
$$= 764 \text{ cm}^2$$

$$i_{zz}^2 = \frac{I_{zz}}{F} = \frac{1}{7500}\left[\frac{50^4}{12} + \frac{50 . 100^3}{12}\right] = 625 \text{ cm}^2$$

يحسب بعد مركز الثقل s عن حافة المقطع العرضي السفلي بواسطة العلاقة التالية :

$$e_{\bar{z}} = \frac{F_1\, e_{z1} + F_2\, e_{z2}}{F_1 + F_2} = \frac{(100 . 50) . 25 + (50 . 50) . (50+25)}{(100 . 50) + (50 . 50)}$$

$$e_{\bar{z}} = \frac{5000 . 25 + 2500 . 75}{7500} = 41{,}7 \text{ cm}$$

وذلك للتمكن من رسم المحور y ولتعيين احداثيات نقاط تقاطع المماسات على حافات المقطع العرضي في المحاور الاحداثية y , z .

نقاط تقاطع المحور الحيادي n_2 مع المحاور الاحداثية :

$$z_2 = -\,(8{,}3 + 50 + 50) = -\,108{,}3 \text{ cm}$$
$$y_2 = -\left(50 + \frac{1}{2}\, 8{,}3\right) = -\,54{,}2 \text{ cm}$$

أما بقية نقاط تقاطع المحاور الحيادية n_1 , n_2 , n_3 مع المحاور الاحداثيةفقد دونت في الجدول الذي سيرد آنفاً :

n_i	y_i	z_i	k_i	y_{ki}	z_{ki}
—	cm	cm	—	cm	cm
n_1	∞	− 58,3	k_1	0,0	+13,1
n_2	−54,2	−108,3	k_3	+11,5	+ 7.1
n_3	−50,0	∞	k_3	+12,5	0,0
n_4	∞	+ 41,7	k_4	0,0	− 18,3

٨ ـ ٥ إنعطاف القضبان المنحنية المتناظرة

لتكن المقاطع العرضية المدروسة متناظرة بالنسبة لمستوي الانعطاف . حسبما تكون النسبة بين نصف قطر الانحناء وبين أبعاد المقطع العرضي يفرق بين القضبان ذات الانحناء الطفيف وبين القضبان ذات الانحناء الكبير ، فاذا كانت هذه النسبة كبيرة يقال عن القضيب انه ذو انحناء طفيف اما اذا كانت هذه النسبة صغيرة (نصف قطر الانحناء وأبعاد المقطع العرضي من نفس المرتبة) فيقال عنه انه ذو انحناء كبير .

٨ ـ ٥ ـ ١ القضبان ذات الانحناء الطفيف

تعطي معادلة الانعطاف المستقيم في هذه الحالة حلولا تقريبية جيدة . لذلك تفترض هنا أيضاً صلاحية فرضية نافيير في التوزيع الخطي للاجهادات وكذلك صلاحية فرضية برنولي في بقاء المقاطع العرضية مستوية ، يعطى توزيع الاجهادات في القضبان ذات الانحناء الطفيف بواسطة العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

تعتبر القوة الناظمية (القوة الطولية) N موجبة عندما تكون قوة شادة وسالبة عندما تكون قوة ضاغطة . ويعتبر عزم الانعطاف $M > 0$ عندما يؤدي لزيادة الانحناء .

٨ ـ ٥ ـ ٢ القضبان ذات الانحناء الكبير

تفترض هنا أيضاً من البداية صلاحية فرضية برنولي فى بقاء المقاطع العرضية مستوية لكن هذه الفرضية تؤدي بسبب اختلاف أطوال المحاور (الالياف) المحصورة بين مقطعين عرضيين ناظميين (عموديين) على المحور الاوسط للقضيب الى توزيع لا خطي للاجهادات في القضبان ذات الانحناء الكبير وذلك على عكس ما أدت اليه في القضبان المستقيمة .

بعض الرموز الهامة التي ستستعمل أثناء استخراج علاقات توزيع الاجهاد :

k − k : طبقة المحاور (طبقة الالياف) المدروسة .

m − m : المحور المركزي .

n − n : طبقة صفر الاجهادات (الطبقة الحيادية) .

ρ_1 (ρ_2) : نصف قطر انحناء طبقة انعدام الاجهادات قبل (بعد) التغيير .

R : نصف قطر انحناء المحور المركزي .

z : بعد k—k عن m—m .

e : بعد n—n عن m—m .

$\bar{z}$: بعد k—k عن n—n .

M : عزم الانعطاف (M>0 عندما يؤدي لزيادة الانحناء) .

N : القوة الناظمية (القوة الطولية) (N>0 قوة شد ، N<0 قوة ضغط) .

تأخذ علاقات التوازن (شروط التوازن) المطبقة على العنصر الحجمي (شكل 8.59) الشكل التالي :

$$\int_F \sigma_x \, dF = N \quad ; \quad \int_F \sigma_x z \, dF = M \qquad (8.71)$$

شكل 8.59

لحل هذه المسألة غير المقررة ستاتيكياً ينبغي اللجوء الى علاقات التغير (شروط التغـــير) (شكل 8.29) .

حسب فرضية برنولي فان تغير الشكل يتألف من دوران المقاطع العرضيـة بالزاوية $d\varphi$. فالزاوية

$d\psi$ المحصورة بين مقطعين عرضيين قبل التغيير تصبح بعد التغيير $d\psi+d\varphi$. لاتعاني طبقة صفر الاجهادات (طبقة انعدام الاجهادات) n - n أي تغير نسبي طولي (تمدد) .

$$ds_0 = \rho_1\, d\psi = \rho_2\, (d\varphi + d\psi)$$

يبلغ التمدد (التغير النسبي الطولي) لطبقة المحاور (الالياف) k - k القيمة التالية :

$$\varepsilon = \frac{ds_2 - ds_1}{ds_1} = \frac{(\rho_2 + \bar{z})\,(d\varphi + d\psi) - (R+z)\, d\psi}{(R+z)\, d\psi} = \frac{z-e}{R+z}\,\frac{d\varphi}{d\psi} \quad (8.72)$$

بواسطة العلاقة التالية :

$$\sigma_x = E\,.\,\varepsilon = E\,\frac{d\varphi}{d\psi}\,\frac{z-e}{R+z}$$

يتم الحصول من شروط التوازن على القيم e , $d\varphi/d\psi$. بواسطة العلاقة التالية :

$$\frac{d\varphi}{d\psi}\,E = a$$

يتم الحصول من العلاقتين (8 71) و (8.72) على ما يلي :

$$N = a \int_F \frac{z-e}{R+z}\, dF \;,\quad M = a \int_F \frac{z^2 - ez}{R+z}\, dF \quad (8.73)$$

بالاستعانة بالاختصار التالي :

$$Y = \int_F \frac{z^2}{1 + z/R}\, dF$$

تأخذ التكاملات التي تحتويها العلاقة (5.73) الشكل الآتي :

$$\int_F \frac{z^2}{R+z}\, dF = \frac{Y}{R} \quad , \quad \int_F \frac{z}{R+z}\, dF = -\frac{Y}{R^2}$$

$$\int_F \frac{dF}{R+z} = \frac{F}{R} + \frac{Y}{R^3}$$

وبذلك تتحول المعادلة (8.73) لتصبح كما يلي :

$$N = -a\frac{Y}{R^2} - ae\frac{F}{R} - ae\frac{Y}{R^3}$$

$$M = a\frac{Y}{R} + ae\frac{Y}{R^2}$$

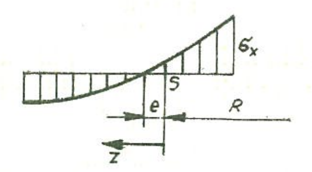
من هاتين المعادلتين يستطاع تعيين المجاهيل a , ae وبعدها تعوض في المعادلة :

$$\sigma_x = a\frac{z-e}{R+z}$$

وبعد اجراء بعض العمليات الحسابية يتم منها الحصول على العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M}{FR} + \frac{MR}{Y}\;\frac{z}{R+z} \qquad (8\text{-}75)$$

حسب هذه العلاقة فان الاجهاد الناظمي يتوزع في المقطع العرضي وباتجاه الارتفاع على شكل قطع زائد (hyperbolisch) (شكل 8.60) . في هذه الحالة لاتنطبق المحاور الحيادية (الآلياف المحايدة) على المحور المركزي حتى ولو كانت N=0 .



شكل 8.60

عندما يكون العامل Y (العلاقة 8.74) معلوما عندئذ يستطاع تقييم المعالة (8.75) . من أجل R>>z فان العامل Y يتحول الى عزم عطالة السطح العادي وتتحول المعادلة (8 75) لتأخذ الشكل المعتاد التالي :

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M}{I}z$$

من أجل المستطيل ذو الابعاد h,b يصبح العامل Y هكذا :

$$Y = -FR^2 + bR^3\; ln\,\frac{1+(h/2R)}{1-(h/2h)} \qquad (8\text{-}76)$$

ومن أجل دائرة قطرها r فان العامل Y يصبح بالشكل التالي :

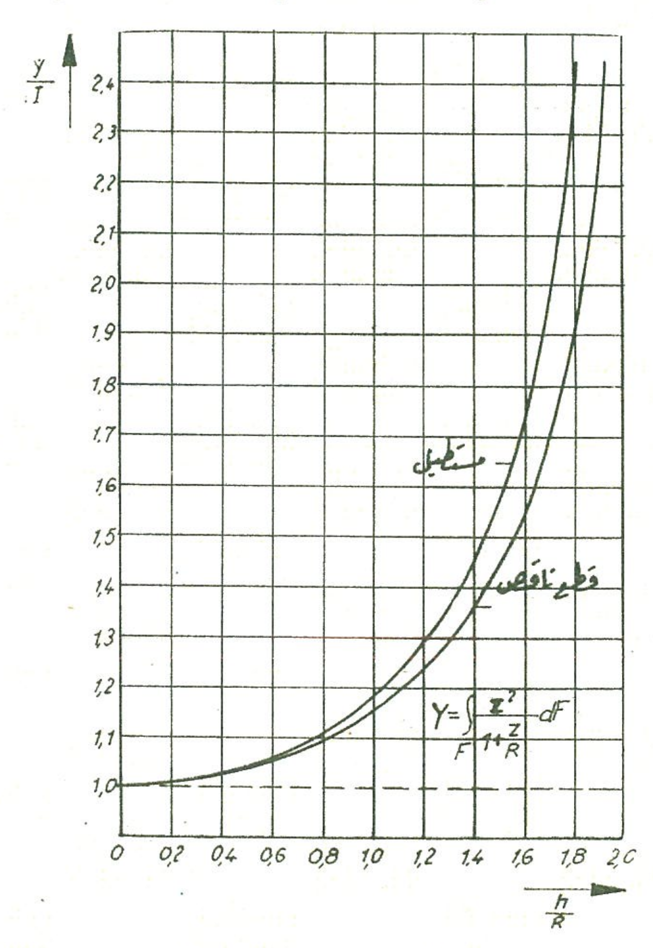
$$Y = FR^2 \left\{ -1 + 2\left(\frac{R}{r}\right)\left[\frac{R}{r} - \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}\right]\right\} \qquad (8\text{-}78)$$

ان نشر العامل Y هو ممكن أيضاً . بواسطة العلاقة التالية :

$$\frac{1}{1+z/R} = 1 - \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \left(\frac{z}{R}\right)^3 + - \cdots$$

ينتج :

$$Y = I - \frac{1}{R}\int_F z^3 dF + \frac{1}{R^2}\int_F z^4 dF - \frac{1}{R^3}\int_F z^5 dF + - \cdots$$



شكل 8.61

لقد تم في الشكل (8.61)رسم Y/R كتابع للقيمة h/R او بالاحرى كتابع للقيمة r/h وذلك من أجل مقطع عرضي مستطيل الشكل وآخر على شكل قطع ناقص (ودائرة) .

الفصل التاسع

التغيير الناتج عن الانعطاف

٩ ـ ١ المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية لخط انعطاف الجيزان الموشورية في حالة الانعطاف المستقيم

سوف تتم ، في هذه الفقرة ، دراسة المنحني الذي يأخذه (يتبناه) قضيب مستقيم في الاصل نتيجة لتأثير حمولة ساكنة معلومة . يسمى هذا المنحني **خط الانعطاف أو الخط المرن** . أما الغاية من تعيين خط الانعطاف فهي :

١ ـ حساب التغييرات (الانتقالات والدورانات) في الانشاءات (الجمل الانشائية) للتمكن من مقارنتها مع تغييرات مسموحة تحددها المواصفات .

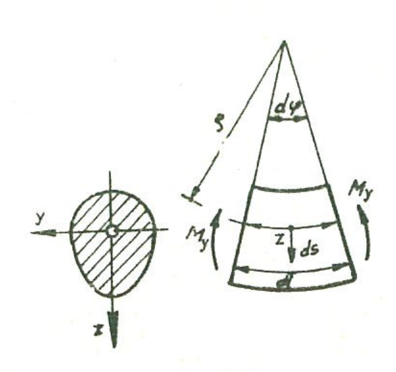
٢ ـ معالجة مشكلة تحنيب القضبان المضغوطة .

٣ ـ معالجة الجمل غير المقررة ستاتيكياً .

ليكن الجائز المدروس محملاً بحمولات ما ناظمية على محور القضيب وليفترض من البداية بأن هذه الحمولات تقع كلها في مستوي واحد يؤدي لان تتشكل في القضيب حالة انعطاف مستقيم (تقع حالة الانعطاف المستقيم عندما ينطبق شعاع عزم الانعطاف على إحدى اتجاهات المحاور الرئيسية للمقطع العرضي) . في حالة تأثير حمولات مائلة (منحرفة) على الجائز فانها تحلل الى مركبتين إحداهما موازية والثانية ناظمية على المحور الاوسط للقضيب . ان المركبة الاخيرة (المركبة الناظمية على محور القضيب) هي التي تلعب دوراً على خط الانعطاف .

لتكن المادة التي صنع منها الجائز خاضعة لقانون هوك وليكن عامل مرونتها (الطولي) هو E . تقع انتقالات الجائز في حالة الانعطاف المستقيم في مستوي التحميل وبذلك فان خط الانعطاف في هذه الحالة هو منحني يقع في مستوي التحميل . سوف يفترض هنا ان احداثيات المقطع العرضي z , y هي محاور رئيسية له (جداء العطالة $I_{yz} = 0$) . ليكن الاحداثي الطولي (المثبت في الفراغ) الذي ينطبق على المحور الاوسط للقضيب غير المتغير هو x وليكن الاحداثي الطولي الذي ينطبق على المحور الاوسط للقضيب المتغير (المثبت في الجسم) هو s . لتعيين

الانتقال الشاقولي الذي يقوم به قضيب مستقيم سوف يقتطع منه عنصر تفاضلي طوله ds=dx (يحتفظ المحور الاوسط للقضيب بعد التغير بطوله الأصلي) ويحده من طرفية مقطعان عرضيان متوازيان . نتيجة لتأثير عزوم الانعطاف M_y الموجودة في كل من المقطعين العرضيين فان العنصر التفاضلي المستقيم (الذي كانت تبلغ كافة أطوال محـاوره القيمة ds) سوف يعاني تغييراً يجعله يتحول إلى عنصر تفاضلي منحني (شكل 9.1) .



شكل 9.1

استناداً إلى فرضية برنولي فان المقاطع العرضية المستوية والناظمية على المحور z=0 قبل التغيير ، تبقى بعد التغيير مستوية وناظمية على المحور الاوسط للجائز المتغير . أي أن المقاطع العرضيـة للعنصر تعاني فقط دوراناً متبادلا صغيراً ، يتعين بواسطة الزاوية dφ .

العلاقة الهندسية ، حسب الشكل (9.1) (تشابه المثلثات) :

$$\frac{dl}{ds} = \frac{\rho + z}{\rho} = 1 + \frac{z}{\rho}$$

التمدد (التغير النسبي الطولي) :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{dl - ds}{ds} = \frac{dl}{ds} - 1 = \frac{z}{\rho} \; ; \; (\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0) \qquad (9\text{-}1)$$

قانون هوك للاجهادات الناظمية :

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = \frac{E}{\rho}\, z \qquad (9\text{-}2)$$

علاقة الاجهاد الناظمي في حالة الانعطاف المستقيم :

$$\bar{\sigma}_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

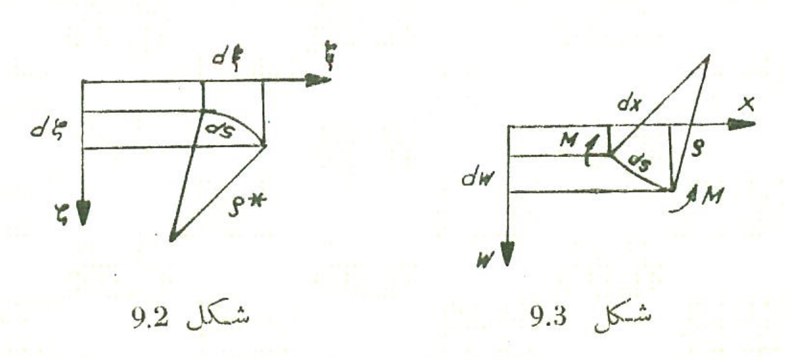
باجراء المساواة بين العلاقة (9-2) والعلاقة (9 3) ينتج :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_{yy}} = \frac{M}{EI} \tag{9.4}$$

بهذه العلاقة يكون قد تم التوصل الى نصف قطر انحناء خط الانعطاف ممثلاً كتابع لعزم الانعطاف M وصلابة الانعطاف EI_{yy} وهي معادلة الخط المرن للجيزان الموشورية في حالة الانعطاف المستقيم وتسمى **المعادلة الطبيعية لخط انعطاف القضبان المستقيمة** . بفضل هذه العلاقة يتم التوصل إلى أن خط الانعطاف (الخط المرن) في حالة كون عزم الانعطاف وصلابة الجائز على الانعطاف ثابتين هو قوس دائري نصف قطرة هو ρ . ينسب كل من عزم الانعطاف M وصلابة الانعطاف EI وانحناء محور القضيب المتغير $1/\rho$ الى مستوي واحد ويمكن أن تكون كلها تابعة للاحداثي الطولي x .

لقد اعطيت معادلة خط الانعطاف (الخط المرن) مبدئياً بشكلها الطبيعي (خالية من الاحداثيات) أما الآن فسوف يتم إعطائها ممثلة بالاحداثيات . يعطى نصف قطر الانحناء $1/\rho^*$ لمنحني (شكل 9.2) في مجموعة احداثيات ديكارتية ما η , ξ بواسطة العلاقة الرياضية المعروفة :

$$+\frac{1}{\rho^*} = \frac{d^2\eta / d\xi^2}{[1+(d\eta/d\xi)^2]^{3/2}} = \frac{d^2\eta/ds^2}{\sqrt{1-(d\eta/ds)^2}} \tag{9-5}$$



شكل 9.2

شكل 9.3

سوف يرمز لانتقالات جسم متغير بالاتجاهات x , y , z بالرموز u , v , w . يشير الرمز w الى انتقال نقطة ما من المحور الاوسط للقضيب باتجاه المحور z . بما ان الانتقال w يتعلق (يرتبط) بالمحور x أو بالأحرى s لذلك سوف يصار الى تمثيل المحور الاوسط

للقضيب المتغـــير على شـكل تابـع $w(x)$ أو $w(s)$. اذا ثبتـت في الشكل (9.1) مجموعـــة المحـاور الاحداثية w , z ، عندئـذ يـتم التوصـــل للشكل (9.3) الذي يتطابق مع الشـكل (9.2) (ينبغي الانتباه الى الاتجاه المتعاكس بـين ρ , ρ^*) وبذلك تنتج هنا العلاقة التالية :

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 w/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{d^2 w/ds^2}{\sqrt{1-\left(\frac{dw}{ds}\right)^2}} \qquad (9\text{-}6)$$

وبذلك تتحول المعادلة الطبيعية لخط الانعطاف (9.4) الى معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية :

$$-\frac{d^2 w / dx^2}{[1+(dw/dx)^2]^{3/2}} = \frac{M_y}{E I_{yy}} \qquad (9\text{-}7)$$

باجراء الاختصار التالي :

$$\frac{d(\;)}{dx} = (\;)' \qquad (9\text{-}8)$$

فان المعادلة التفاضلية (9.7) تأخذ الشكل الآتي

$$-\frac{w''}{[1+(w')^2]^{3/2}} = \frac{M_y}{E I_{yy}} \qquad (9\text{-}9)$$

ينطبق على معظم الجيزان والعناصر الانشائيـة التي ترد في المجالات الهندسية أن الانتقال $w(x)$ ومشتقه $w'(x) = tg\,\varphi(x)$ صغيرين ، أي أن :

$$\frac{dw}{ds} << 1 \quad , \quad \frac{dw}{dx} << 1$$

بحيث يمكن ، حسب اقتراح العالم أو يلر (EULER) إهمال الحد $[w'(x)]^2$ بالنسبة للعدد 1 في المعادلة الطبيعية لخط الانعطاف (9 6) وبذلك تصبح تلك المعادلة كالتالي :

$$\frac{1}{\rho} \approx -\frac{d^2 w}{dx^2} \approx -\frac{d^2 w}{ds^2} = -w'' \qquad (9\text{-}10)$$

وبهذا تتحول المعادلة اللاخطية لخط الانعطاف (9.7) لتأخذ الشكل التالي :

$$w'' = -\frac{M_y}{E I_{yy}} = -\frac{M}{EI} \qquad (9\text{-}11)$$

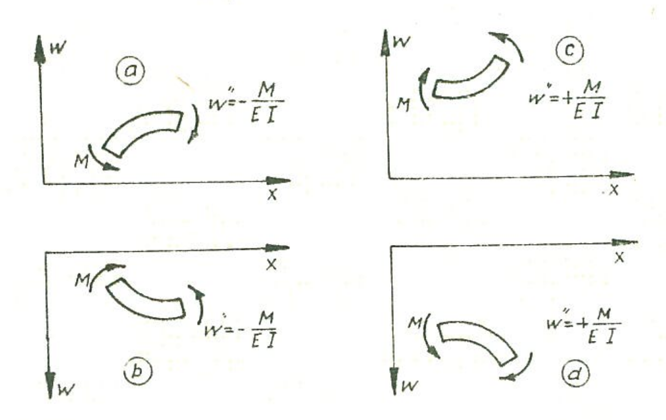
هذه المعادلة هي معادلة خط الانعطاف (الخط المرن) ويمكنها ان تأخـــذ إشارة معاكسة عندما تنسب الى مجموعة إحداثيات اخرى ، هكذا :

$$w'' = + \frac{M_y}{EI_{yy}} = + \frac{M}{EI} \qquad (8\text{-}12)$$

لكي يتم تعيين الانتقال w باعتباره تابعاً للمتغير x ينبغي حل المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية التالية :

$$w'' = \pm \frac{M}{EI} \qquad (8\text{-}13)$$

لتنظيم الاشارة في هذه المعادلة فان الشكل (9.4) يقوم بهذه المهمة .



شكل 9.4

ان الاتجاهات المرسومة للقيم w , x , M هي الاتجاهات الموجبة بالتعريف . ينبغي الانتباه الى ان كل القيم المذكورة هي قيم جبرية (اي أنها مرفقة باشارة) ويمكنها ايضاً ان تأخذ قيماً سالبة . يفضل اثناء تعيين الانتقال w(x) باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية اتباع الطريق التالي :

١ ـ اختيار كيفي ولكن بشكل مناسب لمجموعة المحاور الاحداثية (M , x , w) . بالامكان اختيار مجموعة محاور احداثية مشتركة او مختلفة لكل من مجالات الجائز . ينبغي ان لا يحتوي المجال الواحد (مجال الاستمرار) على عدم استمرار اياً كان نوعـــه (بالمفهوم الرياضي) . يتحدد عدم الاستمرار (وبذلك ايضاً حدود المجالات) من خـــلال الانكسارات والقفزات (الانزلاقات) التي تحتويها كل من توابع M (x) , EI (x) وتغير اتجاه الجائز .

٢ - حساب توابع $EI(x)$, $M(x)$. ينبغي الانتباه للاتجاهات الموجبة التي تم اختيارها في (١ -). علاوة على ارتباط تابع العزم $M(x)$ بالحمولة الخارجية فانه يتعلق أيضاً ، في الجيزان غير المقررة ستاتيكياً ، من الـ n ردود الافعال المجهولة وذلك عندما تكون الجملة n- مرة غير مقررة ستاتيكياً .

٣ - تعيين التوابع $w''(x)$ (لكل مجال) ، حسب المعادلة (9.11) وبالاستعانة بالتوابع $EI(x)$, $M(x)$ وذلك بعد الانتباه للاشارة المنوه عنها في ١ -. تتشكل في الـ m مجال m توابع مختلفة لـ $w_k''(x)$ $(k=1,2,\cdots,m)$.

٤ - مكاملة المعادلات التي تم الحصول عليها في ٣ -. عندئذ تتشكل 2 m ثوابت للتكامل (معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية) .

٥ - كتابة شروط الاطراف وشروط التحول (شروط الانتقال من مجال لمجال آخر) التابعة للقيم الهندسية $w(x)$, $w'(x)$ (وتسمى هذه الشروط بشروط الاطراف وشروط التحول الهندسية) . تتشكل في جملة n- مرة غير مقررة ستاتيكياً والتي تحوي على m مجـال ، 2m+n معادلة جبرية خطية لتعيين 2m ثوابت تكامل و n ردود افعال مساند غير مقررة ستاتيكياً .

٦ - حل مجموعة المعادلات التي تم الحصول عليها في ٥ -.

٧ - تلخيص النتائج وتقييمها .

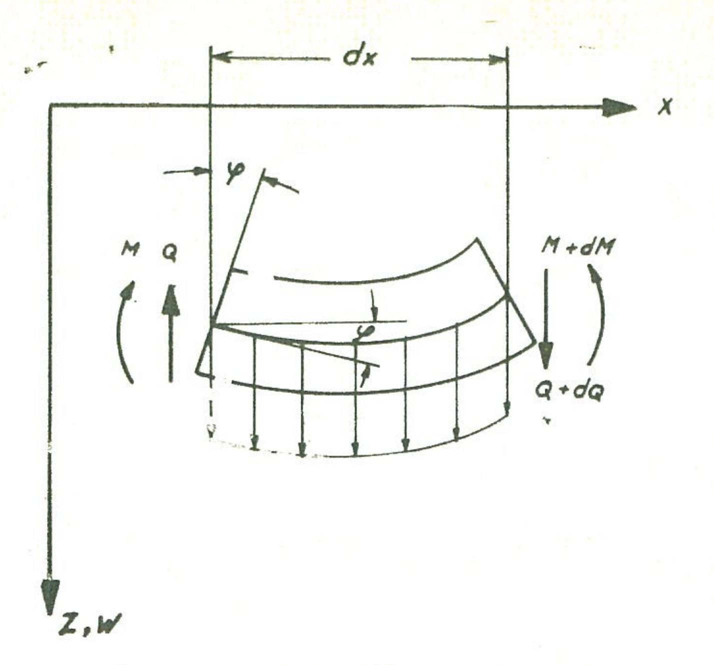
٩ - ٢ المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة لخط انعطاف الجيزان الموشورية في حالة الانعطاف المستقيم

سيتم في هذه الفقرة إستخدام مجموعة المحاور الاحداثية المشار اليها في الشكل (9,5) .

تأخذ المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية لخط الانعطاف بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية x , w المشار اليها آنفاً ، الشكل التالي :

$$w'' = -\frac{M}{EI} \qquad (9\text{-}14)$$

لقد تم في علم سكون الاجسام الحاملة التوصل للعلاقات التفاضلية التي تربط بين $M(x)$, $Q(x)$, $q(x)$ التالية :



شكل 9.5

$$Q = + \frac{dM}{dx} = + M' \quad (9\text{-}15)$$

$$q = - \frac{dQ}{dx} = - Q' = - M'' \quad (9\text{-}16)$$

من المعادلات الثلاثة السابقة يتم التوصل لما يلي من العلاقات :

$$M = - EIw'' \quad (9\text{-}17)$$

$$Q = - (EIw'')' \quad (9\text{-}18)$$

$$q = + (EIw'')'' \quad (9\text{-}19)$$

عندما تكون EI=const فان المعادلات السابقة تتحول لتأخذ شكلها الجديد التالي :

$$M = - EI\, w'' \quad (9\text{-}17\ b)$$

$$Q = - EI\, w''' \quad (9\text{-}18\ b)$$

$$q = + EIw'''' \quad (9\text{-}19\ b)$$

ان المعادلة (9.19) هي معادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة من اجل الانتقال الشاقولي w (x)

كتابع للمتغير x . يستعان بالمعادلات (9.17) , (9.18) للتمكن من كتابة شروط الاطراف وشروط التحول .

لحساب الانتقال الشاقولي w (x) عن طريق استخدام المعادلة التفاضلية من الرتبة الرابعة (9.19) يفضل إتباع الخطوات الآتية :

١ - تقسيم الجملة القضيبية الى مجالات وتثبيت مجموعة الاحداثيات (x , w) (شكل 9.5) على مخطط الجملة (وهذا ضروري للتمكن من كتابه شروط الأطراف وشروط التحول) .

٢ - تعيين التوابع q (x) , EI (x) . هنا لا تظهر حتى في الجيزان غير المقررة ستاتيكياً ردود افعال مساند مجهولة .

٣ - كتابة المعادلات التفاضلية من اجل الـ m مجال الموجودة في الجملة القضيبية وحسب المعادلة (9.19) .

٤ - مكاملة المعادلات التي تم الحصول عليها في ٣ - . بعد الانتهاء من المكاملة سوف تتشكل 4 m ثوابت للتكامل (معادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة) .

٥ - كتابة شروط الاطراف وشروط التحول (التحول من مجال لمجال اخر يليه) العائدة للقيم :

$$Q (x) \; ; \; M (x) \; ; \; w' (x) \; (w' = tg\,\varphi \approx \varphi) \; , \; w (x)$$

تسمى شروط الاطراف وشروط التحول العائدة للقيم Q (x) , M (x) **بالشروط الستاتيكية .**
اما شروط الاطراف وشروط التحول العائدة للقيم w' (x) , w (x) فتسمى **بالشروط الهندسية .**
بتطبيق المعادلات (7 -9) حتى (9.19) يتم الحصول على 4m معادلة من اجل 4m ثوابت للتكامل (هنا لا تلعب درجة التقرير الستاتيكية اي دور في عدد المعادلات) .

٦ - حل مجموعة المعادلات التي تم الحصول عليها في ٥ - .

٧ - تلخيص النتائج وتقييمها .

ملاحظة :

عندما تختار مجموعة الاحداثيات (x , w) كما في الشكل (9.5) فان المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية لخط الانعطاف والعلاقات التفاضلية التي تربط بين قيم القطع وتابع الحمولة تصبح بالشكل التالي :

$$w'' = + \frac{M}{EI}$$

$$Q = + \frac{dM}{dx} = +M'$$

$$q = + \frac{dQ}{dx} = +Q' = +M''$$

من هذه المعادلات الثلاثة يتم التوصل للعلاقات التالية :

$$M = + E\,I\,w''$$

$$Q = + (E\,I\,w'')'$$

$$q = + (E\,I\,w'')''$$

تسمى الطريقتين السابقتين (طريقة المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية وطريقة المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة) في بعض المراجع **بطريقة المكاملة** .

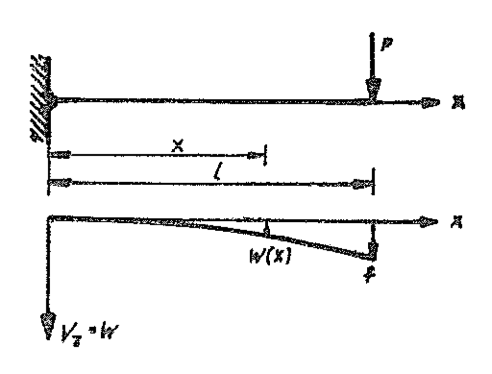
٩ ـ ٣ أمثلة :

مثال 100 :

حملت النهاية الحرة لجائز بارز (ظفر) بحمولة وحيدة شكل (9.6) .

المعطى : P , l , $EI = const.$.

(تطبيق عددي : $P = 250$ kp , $l = 100$ cm , $d = 5$ cm , $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kp/cm²) .



شكل 9.6

المطلوب :

١ - حساب ورسم خط الانعطاف (الخط المرن) .

٢ - تعيين القيمة العظمى للانتقال الشاقولي (السهم) .

٣ - تعيين زاوية دوران المماس لخط الانعطاف عند نقطة النهاية الحرة b .

ينبغي ، في البداية ، الاجابة على الطلبات بشكل عام ودون استخدام القيم العـددية ، بعد ذلك يجرى التطبيق العددي على الطلب الاول فقط .

الحـــل :

I - استخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية لخط الانعطاف .

I - ١ - حساب ورسم خط الانعطاف .

عزم الانعطاف :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن المقتطع من الجائز (شكل 9.7) يتم الحصول على عزم الانعطاف في النقطة x من الجائز (تابع عزم الانعطاف) :

$$M(x) = -P(l-x)$$

المعادلة التفاضلية لخط الانعطاف :

$$EI\,w''(x) = -M(x)$$

بتبديل تابع عزم الانعطاف في هذه العلاقة ينتج :

$$EI\,w''(x) = P(l-x)$$

بمكاملة هذه المعادلة على التوالي يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$EI\,w'(x) = \int P(l-x)\,dx + C_1 = Plx - \frac{Px^2}{2} + C_1 \qquad (a)$$

$$EI\,w(x) = \int\left[P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1\right]dx + C_2 = \frac{Plx^2}{2} - \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \quad (b)$$

يحتاج تعيين ثوابت التكامل C_1 ، C_2 الى معادلتين يتم الحصول عليهما من شروط الاطراف الهندسية للجملة .

شروط الاطراف الهندسية :

α ـ ينعدم الانتقال الشاقولي عند نقطة الوثاقة . ويعبر عن ذلك رياضياً بالشكل التالي :

عندما $x=0$ فان $w=0$ أو هكذا $w\,(x=0)=0$.

β ـ ينعدم دوران الماس لخط الانعطاف عند نقطة الوثاقة (ينعدم ميل خط الانعطاف في نقطة الوثاقة ، أي انه يبقى أفقياً) . ويعبر عن ذلك رياضياً بالشكل التالي :

عندما $x=0$ فان $w'=0$ أو هكذا $w'\,(x=0)=0$.

بتحقيق المعادلة (b) لشرط الاطراف (α -) ينتج :

$$0 = 0 + 0 + 0 + C_2 \quad ; = 0$$

كما يعطي تحقيق المعادلة (a) لشرط الاطراف (β-) ما يلي :

$$0 = 0 + 0 + C_1 \quad ; \; C_1 = 0$$

بتبديل ثوابت التكامل في معادلة خط الانعطاف (الخط المرن) يتم الحصول على المطلوب :

$$w\,(x) = \frac{Pl^3}{EI}\left(\frac{x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{6l^3}\right) = \frac{Pl^3}{6EI}\,\frac{x^2}{l^2}\left(3 - \frac{x}{l}\right)$$

I ـ ٢ ـ تعيين القيمة العظمى للانتقال الشاقولي

يتشكل الانتقال الاعظمي للجائز البارز عند النهاية الحرة التي تؤثر عليها القوة الوحيـــدة ، أما قيمتها فيتم الحصول عليها من معادلة خط الانعطاف $x=l$ وهي تبلغ :

$$w\,(x=l) = f = \frac{Pl^3}{3\,EI} \qquad (c)$$

I ـ ٣ ـ زاوية دوران الماس على خط الانعطاف عند نقطة النهاية الحرة .

بتبديل $x=l$ في معادلة مشتق خط الانعطاف :

$$w'\,(x) = \varphi = \frac{Pl^3}{EI}\left(\frac{x}{l^2} - \frac{x^2}{2l^3}\right)$$

يتم الحصول على زاوية دوران الماس للنهاية الحرة b :

$$w'(x=l) = \varphi = \frac{Pl^2}{2EI}$$

عندما يختار الاحداثي $\bar{x}$ الذي يبتدأ عند النهاية الحرة للجائز بدلاً عن الاحداثي x عندئذ تأخذ معادلة خط الانعطاف الشكل الجديد الآتي :

$$w(\bar{x}) = \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{6}\bar{x}^3 - \frac{Pl^2}{3}\bar{x} + \frac{Pl^3}{3}\right) = \frac{Pl^3}{6EI}\left[\left(\frac{\bar{x}}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{\bar{x}}{l}\right) + 2\right]$$

II ـ استخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة لخط الانعطاف .

بالامكان الحصول على نفس النتائج السابقة باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة التالية :

$$EI\,w''''(x) = -M''(x) = +q(x) = 0$$

بمكاملة هذه العلاقة عدة مرات ينتج :

$$EI\,w'''(x) = -Q(x) = D_1$$

$$EI\,w''(x) = -M(x) = D_1 x + D_2$$

$$EI\,w'(x) = EI\,\varphi(x) = D_1\frac{x^2}{2} + D_2 x + D_3$$

$$EI\,w(x) = D_1\frac{x^3}{6} + D_2\frac{x^2}{2} + D_3 x + D_4$$

لتعيين ثوابت التكامل الاربعة تلزم أربع معادلات يتم الحصول عليها بالاستعانة بشروطالاطراف.

شروط الاطراف الهندسية :

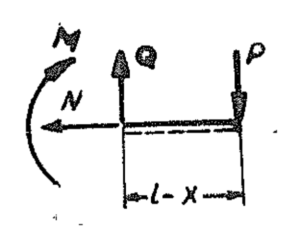
عندما $x=0$ فان $w=0$ أو هكذا $w(x=0)=0$.

عندما $x=0$ فان $w'=0$ أو هكذا $w'(x=0)=0$.

شروط الاطراف الستاتيكية :

عندما $x=l$ فان $Q=+P$ أو هكذا $Q(x=l)=P$.

عندما $x=l$ فان $M=0$ أو هكذا $M(x=l)=0$.



شكل 9.7

بتحقيق المعادلات التفاضلية لشروط الاطراف ، ينتج :

$$w\,(x = 0) = 0 = D_4$$

$$w'\,(x = 0) = 0 = D_3$$

$$M\,(x = l) = 0 = -D_1\,l - D_2$$

$$Q\,(x = l) = P = -D_1$$

من هذه العلاقات يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$D_3 = D_4 = 0 \quad ; \quad D_1 = -P \quad ; \quad D_2 = P\,l$$

بالتبديل في العلاقات التفاضلية يتم الحصول على معادلة خط الانعطاف :

$$w\,(x) = \frac{P\,l^3}{6\;E\,I}\,\frac{x^2}{l^2}\left(3 - \frac{x}{l}\right)$$

وعلى معادلة عزم الانعطاف ومعادلة القوة العرضية :

$$M\,(x) = -\,P\,(l - x)$$

$$Q\,(x) = +\,P$$

تطبيق عددي :

بتقييم معادلة خط الانعطاف يتم الحصول على القيم العددية التالية :

$$I = \frac{\pi\,d^4}{64} = 30{,}68\ \text{cm}^4$$

x / l	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
w [cm]	0	0,074	0,269	0,56	0,91	1,29

مثال 101 :

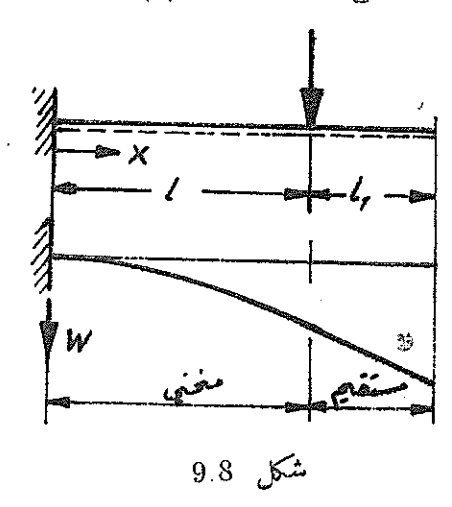
حملت نقطة داخلية ما من جائز بارز (ظفر) بحمولة وحيدة (شكل 9.8).

المعطى : l_1 , l , P , EI=const. .

المطلوب :

١ ـ إيجاد معادلة خط الانعطاف مع الرسم .

٢ ـ حساب القيمة العظمى للانتقال الشاقولي (السهم) .



شكل 9.8

الحل :

آ ـ حساب المطاليب بالاعتماد على معلومات مسبقة .

يتألف الجائز من مجالين. تثبت الاحداثيات المساعدة x_1 , x_2 كما يشير الشكل (9.8) وهي تتجه من اليمين إلى اليسار . أما المحور z والانتقال w الذي ينطبق عليه فيشير إلى الاسفل .

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq l_1)$:

يبقى المجال 1 مستقيماً وذلك لانعدام عزم الانعطاف فيه $(M_1=0)$.

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq l)$:

$$M_2 = - P x_2$$

$$EI w''_2 = - M_2 = + P x_2$$

بما أن معادلة العزم في هذا المثال هي نفسها في المثال السابق (المثال 100) وبسبب كون الجائز المدروس هناك هو نفس الجائز المدروس هنا ، لذلك يمكن الاستفادة من النتيجة السابقة لكونها نفس النتيجة في هذا المثال ، اي :

$$w_2 = \frac{1}{EI}\left(P\frac{x^3}{6} - P\frac{l^2}{2}x + P\frac{l^3}{3}\right) = \frac{P\ l^3}{6\ EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right) + 2\right]$$

لعدم إحتواء خط الانعطاف عند نقطة تطبيق القوة على إنكسار ، لذلك ينبغي أن يكون خط الانعطاف في المجال غير المحمل (المجال I) باتجاه المماس على منحني خط انعطاف المجال II .

زاوية ميل خط الانعطاف في المجال I :

$$tg\alpha = |\ w'_2(x_2 = 0)\ | = |- \frac{Pl^2}{2EI}\ | = \frac{Pl^2}{2EI}$$

وبواسطتها يتم التوصل لاكبر إنتقال شاقولي في الجائز :

$$f_1 = f + l_1\ tg\alpha = f + l_1\ \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{Pl^3}{6EI}\left(2 + 3\frac{l_1}{l}\right)$$

(بما أن انعطاف الجائز الذي تنطبق عليه الفرضيات المبحوثة في بداية هذا الفصل مسبب عن عزم الانعطاف ، فان شكل المجال الذي ينعدم فيه العزم يبقى مستقيماً دون إنعطاف) .

ب ــ حساب المطاليب باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية :

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq l_1)$:

$$M_1 = 0$$

$$EI w''_1 = - M_1 = 0$$

$$EI w'_1 = + C_1$$

$$EI w_1 = + C_1 x_1 + C_2$$

المجال II $(0 \leqq x_2 \leqq l)$:

$$M_2 = - P x_2$$

$$E I w''_2 = - M_2 = + P x_2$$

$$E I w'_2 = + P \frac{x_2^2}{2} + C_3$$

$$EIw_2 = + P \frac{x_2^3}{6} + C_3 x_2 + C_4$$

شروط الاطراف :

$$w_2'(x_2 = l) = 0 \qquad : C_3 = - \frac{Pl^2}{2}$$

$$w_2'(x_2 = l) = 0 \qquad : C_4 = + \frac{Pl^3}{3}$$

$$w'(x_1 = l_1) = w'(x_2 = 0) : \quad C_1 = - \frac{Pl^2}{2}$$

$$w_1(x_1 = l_1) = w_2(x_2 = 0) \quad : \quad C_1 l_1 + C_2 = + \frac{Pl^3}{3} \quad , \; C_2 = \frac{Pl^3}{3} + \frac{Pl^2}{2} l_1$$

$$EIw_1 = - \frac{Pl^2}{2} x_1 + \frac{Pl^3}{3} + \frac{Pl^2}{2} l_1$$

$$EIw_2 = + P \frac{x_2^3}{6} - \frac{Pl^2}{2} x_2 + \frac{Pl^3}{3}$$

الانتقال الشاقولي الاعظمي :

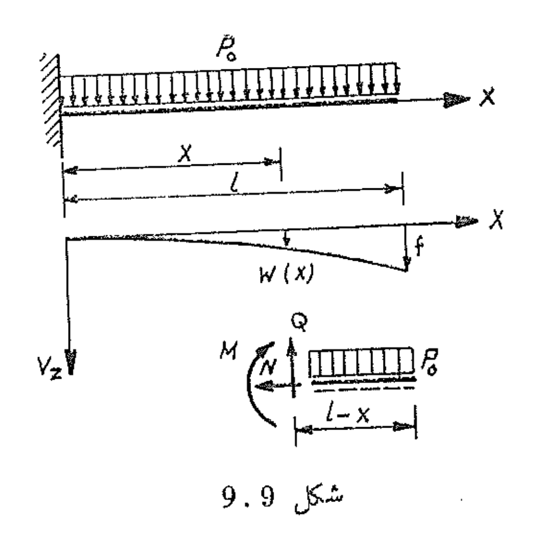
$$f_1 = w_1 (x_1 = 0) = \frac{P l^3}{6 EI} \left(2 + 3 \frac{l_1}{l}\right)$$

مثـال 102 :

يتألف المقطع العرضي لجائز بارز (ظفر) محمل بحمولة خطية ثابتة (بحمولة خطيـــة موزعة بانتظام) شدتها $p_z(x) = p_0$ (شكل 9-9) من مستطيل عرضه b ثابت وارتفاعـه h متغير خطياً (ان ارتفاع المستطيل عند النهاية الحرة هو H_1 وارتفاعه عنـــد النهاية الموثوقة هو H_0) .

المعطى : E , H_1 , H_0 , b , p_0 .

المطلوب : تعيين خط الانعطاف (ايجاد المعادلة ورسم المنحني) .



شكل 9.9

الحـــل :

يعين ارتفاع المقطع العرضي في نقطة ما من الجائز بواسطة المعادلة التالية :

$$h(x) = H_0 - \frac{H_0 - H_1}{l}\, x = H_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

حيث أن

$$a = \frac{H_0\, l}{H_0 - H_1}$$

يعطى عزم العطالة السطحي للمقطع العرضي في نقطة ما من الجائز بالعلاقة التالية :

$$I_{yy}(x) = \frac{b(x)^3}{12} = \frac{b\, H_0^3}{12} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 = I_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3$$

يعين عزم الانعطاف في نقطة ما من الجائز بواسطة العلاقة الآتية :

$$M(x) = -\frac{p_0\, l^2}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad ; \quad M(x) = M_y(x)$$

بتبديل هذه المعادلة في العلاقة التفاضلية لخط الانعطاف ينتج :

$$E\, I_0\, w''(x) = \frac{p_0\, l^2}{2}\, \frac{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2}$$

بمكاملة هذه العلاقة وبالاستعانة بالتكامل التالي :

$$\int \frac{(1-x/l)^2}{(1-x/a)^2}\,dx = \frac{a^3}{l^2}\Big[\frac{(a-l)^2}{2a^2(1-x/a)^2} - \frac{2(a-l)}{a(1-x/a)} - ln\Big(1-\frac{x}{a}\Big)\Big]$$

ينتج :

$$E I_0 w'(x) = \frac{p_0 a^3}{4}\Big[\frac{(1-l/a)^2}{(1-x/a)^2} - 4\frac{1-l/a}{1-x/a} - 2\,ln\Big(1-\frac{x}{a}\Big)\Big] + C_1$$

باجراء مكاملة ثانية يتم الحصول على العلاقة الآتية :

$$E I_0 w(x) = \frac{p_0 a^4}{4}\Big[\frac{(1-l/a)^2}{1-x/a} - 2(1-x/a)(1+ln\,a) +$$

$$+2\Big(3-2\frac{l}{a}-\frac{x}{a}\Big)\,ln\,(a-x)\Big] + C_1 x + C_2$$

بتحقيق المعادلة التفاضلية وتكاملاتها لشروط الاطراف الهندسية التالية :

$$w(x=0) = 0$$
$$w'(x=0) = 0$$

يتم الحصول على المعادلات الآتية :

$$\frac{p_0 a^4}{4}\Big[\Big(1-\frac{l}{a}\Big)^2 - 2(1+ln\,a) + 2\Big(3-2\frac{l}{a}\Big)ln\,a\Big] + C_2 = 0$$

$$\frac{p_0 a^3}{4}\Big[\Big(1-\frac{l}{a}\Big)^2 - 4\Big(1-\frac{l}{a}\Big)\Big] + C_1 = 0$$

بحل هذه المعادلات يتم الحصول على ثوابت التكامل :

$$C_1 = -\frac{p_0 a^3}{4}\Big[\Big(1+\frac{l}{a}\Big)^2 - 4\Big]$$

$$C_2 = -\frac{p_0 a^4}{4}\Big[\Big(1-\frac{l}{a}\Big)^2 - 2 + 4\Big(1-\frac{l}{a}\Big)ln\,a\Big]$$

وبتبديلها في التكامل الثاني للمعادلة التفاضلية يتم الحصول على معادلة خط الانعطاف :

$$w(x) = \frac{p_0 a^4}{4 EI_0}\left[\frac{(1-l/a)^2}{1-x/a}\ \frac{x^2}{a^2} + 2\left(3-2\frac{l}{a}\right)\frac{x}{a} + \right.$$

$$\left. + 2\left(3-2\frac{l}{a}-\frac{x}{a}\right) ln\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]$$

اما الانتقال الشاقولي للنهاية الحرة فيبلغ :

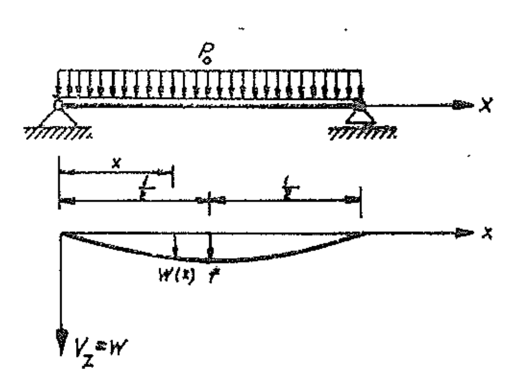
$$w(x=l) = f = \frac{p_0 a^4}{4 EI_0}\left[6\frac{l}{a} - 3\frac{l^2}{a^2} - \frac{l^3}{a^3} + 6\left(1-\frac{l}{a}\right) ln\left(1-\frac{l}{a}\right)\right]$$

مثـال 103 :

حمل جائز بسيط بحمولة خطية موزعة بانتظام (ثابتة) p_0 (شكل 9-10) .

المعطى : $EI = const.$, l , p_0 .

المطلوب : تعيين خط الانعطاف (بالحساب والرسم) باستخدام المادلتين التفاضليتين ، من المرتبة الثانية ومن المرتبة الرابعة .



شكل 9-10

الحـــل :

آ ـ تعيين خط الانعطاف باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .

يعطيعزم الانعطاففي نقطة ما من الجائز البسيط (توزيع عزم الانعطاف) بواسطة العلاقة التالية :

$$M(x) = \frac{p_0}{2}(lx - x^2)$$

وبعد التبديل في العلاقة التفاضلية من المرتبة الثانية لخط الانعطاف ينتج :

$$E\,I\,w''(x) = -\frac{p_0\,l}{2}\,x + \frac{p_0}{2}\,x^2$$

وباجراء مكاملة مضاعفة للعلاقة السابقة ينتج :

$$E\,I\,w'(x) = -\frac{p_0\,l}{4}\,x^2 + \frac{p_0}{6}\,x^3 + C_1$$

$$E\,I\,w(x) = -\frac{p_0\,l}{12}\,x^3 + \frac{p_0}{24}\,x^4 + C_1\,x + C_2$$

بتحقيق المعادلات السابقة لشروط الاطراف الهندسية التالية :

$$w(x=0) = 0 \quad ; \quad w(x=l) = 0$$

يتم الحصول على معادلات لتعيين الثوابت :

$$w(x=0) = 0 = \frac{1}{E\,I}\,C_2$$

$$w(x=l) = 0 = \frac{1}{E\,I}\left(-\frac{p_0\,l^4}{12} + \frac{p_0\,l^4}{24} + C_1\,l + C_2\right)$$

وبحلها يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1 = \frac{p_0\,l^3}{24} \quad ; \quad C_2 = 0$$

بتعويض هذه القيم في معادلة خط الانعطاف فانها تأخذ الشكل النهائي التالي :

$$w(x) = \frac{p_0\,l^4}{24\,EI}\,\frac{x}{l}\left(1 - 2\,\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)$$

$$= \frac{p_0\,l^4}{24\,EI}\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$$

بسبب تناظر خط الانعطاف فان القيمة الاعظمية للانتقال الشاقولي (السهم) تقع في منتصف الجائز ، أي في النقطة $x=l/2$ وهي تبلغ :

$$w\left(x=\frac{l}{2}\right) = f = \frac{5\,p_0\,l^4}{384\,E\,I}$$

لقد كان بالامكان أيضاً تعيين مكان تشكل القيمة الاعظمية للانتقال الشاقولي باشتقاق معادلة خط الانعطاف وجعلها صفراً ثم تبديل هذه القيمة في معادلة خط الانعطاف لتعيين القيمة الاعظمية للانتقال الشاقولي (السهم) .

بواسطة :

$$\max M = M\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{p_0\, l^2}{8}$$

فان العلاقة الاخيرة تأخذ شكلا أسهل هو التالي :

$$f = \max w = w\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{5 \max M \,.\, l^2}{48\ EI}$$

ب ـ تعيين خط الانعطاف باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة .

تابع الحمولة الموزعة :

$$p(x) = p_0 = \text{const}.$$

معادلة خط الانعطاف التفاضلية من المرتبة الرابعة وتبديل تابع الحمولة الموزعة فيها :

$$EI\, w''''(x) = p(x) = p_0$$

بمكاملة هذه العلاقة أربعة مرات متتالية ينتج :

$$EI\, w'''(x) = -Q(x) = p_0\, x + D_1$$

$$EI\, w''(x) = -M(x) = \frac{p_0}{2}\, x^2 + D_1\, x + D_2$$

$$EI\, w'(x) = \frac{p_0}{6}\, x^3 + D_1\, \frac{x^2}{2} + D_2 x + D_3$$

$$EI\, w(x) = \frac{p_0}{24}\, x^4 + D_1\, \frac{x^3}{6} + D_2 \frac{x^2}{2} + D_3\, x + D_4$$

لتعيين الثوابت الاربعة تلزم اربعة معادلات تنتج عن شروط اطراف الجملة ، التي سيعبر عنها هكذا :

شروط الاطراف الهندسية :

$$w(x = 0) = 0 \quad : \quad w(x = l) = 0$$

شروط الاطراف الستاتيكية :

$$M(x=0)=0 \quad ; \quad M(x=l)=0$$

بتحقيق المعادلات الاخيرة لشروط الاطراف ، يتم الحصول على المعادلات الآتية :

$$w(x=0)=0=\frac{1}{EI}\,D_4$$

$$w(x=l)=0=\frac{1}{EI}\left(\frac{P_0}{24}l^4+D_1\frac{l^3}{6}+D_2\frac{l^2}{2}+D_3\,l+D_4\right)$$

$$M(x=0)\ 0=-D_2$$

$$M(x=l)=0=-\frac{P_0}{2}l^2-D_1 l-D_2$$

بحل مجموعة المعادلات هذه يتم تعيين الثوابت :

$$D_1=-\frac{p_0\,l}{2} \quad , \quad D_2=0 \quad , \quad D_3=\frac{p_0\,l^3}{24} \quad , \quad D_4=0$$

بتبديل هذه القيم في معادلة خط الانعطاف يتم الحصول على نفس العلاقة التي تم التوصل اليها اثناء استخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية ، علاوة على ذلك تتعين علاقات قيم القطع $Q(x)$, $M(x)$.

مثـال 104 :

حمل جائز بسيط ممتد الطرف بحمولة وحيدة P تؤثر على نهايته الحرة (شكل 9.11) .

المعطى : $EI=const$, l , a .

المطلوب :

١ ـ تعيين خط الانعطاف (اعطاء المعادلة ورسم الدالة ، أي المنحني) .

٢ ـ حساب القيمة العظمى للانتقال (السهم) وتحديد مكان تشكلها .

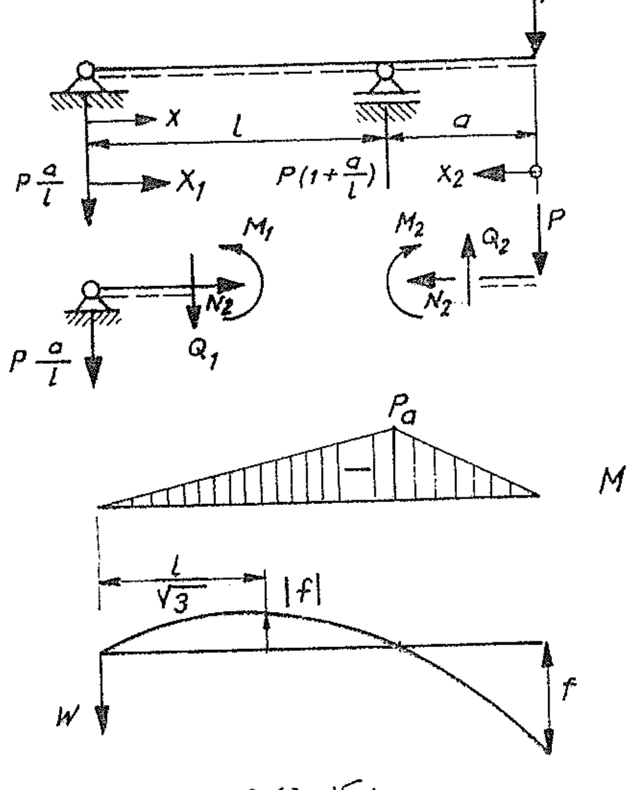
٣ ـ حساب زاوية دوران المماس في النقطة .

الحـــل :

١ ـ تعيين خط الانعطاف

١ ـ ١ ـ حساب ردود افعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل يتم الحصول على ردود أفعال المساند :



شكل 9-11

$$\Sigma M_b = 0 \quad ; \quad C_v\, l - P\,(l + a) = 0$$

$$C_v = P\left(1 + \frac{a}{l}\right)$$

$$\Sigma V = 0 \quad : \quad C_v - B_v - P = 0$$

$$B_v = \frac{Pa}{l}$$

١ ـ ٢ ـ اختيار مكان مناسب للاحداثيات وتحديد المجالات .

يختار المسند الثابت الايسر مبدأ للاحداثي المستمر x ومبدأ للاحداثي الفرعي x_1 كما تختار النهاية الحرة مبدأ للاحداثي x_2 (شكل 9-11) . يتألف الجائز في هذا المثال من مجاليين فقط . المجال الاول $0 \leqq x_1 \leqq l$ والمجال الثاني $0 \leqq x_2 \leqq a$.

١ ـ ٣ ـ معادلات عزم الانعطاف .

المجال I $(0 \leqq x_1 \leqq l)$:

بتطبيق شروط توازن العزوم على الجزء المقطوع الايسر (شكل 11-9) ينتج :

$$\Sigma M_{x_1} = 0 \quad : M_1 (x_1) = - \frac{Pa}{l} x_1$$

المجال II $(0 \leqq x_2 \leq a)$:

بتطبيق شرط توازن العزوم على الجزء المقطوع الايمن (شكل 11-9) ينتج :

$$\Sigma M_{x_2} = 0 \quad : M_2 (x_2) = - P x_2$$

١ ـ ٤ ـ المعادلات التفاضلية لخط الانعطاف وتكاملاتها .

بعد رسم خط عزم الانعطاف M (شكل 11-9) يرى انه لا يمثل بكامله تابعاً مستمراً وانما يحتوي على انكسار فوق المسند c ولهذا السبب لايمكن مكاملة المعادلة التفاضلية لخط الانعطاف على كامل الجائز وانما ينبغي في هذه الحالة كما في عزم الانعطاف تقسيم الجائز الى مجاليين لكل مجال معادلة خط انعطاف خاصة به .

مجال I $(0 \leqq x_1 \leq l)$:

$$E I w''_1 = - M_1 = + \frac{Pa}{l} x_1$$

$$E I w'_1 = E I \varphi_1 = + \frac{Pa}{l} \frac{x_1^2}{2} + C_1$$

$$E I w_1 = + \frac{Pa}{l} \frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + C_2$$

مجال II $(0 \geq x_2 \leqq a)$:

$$E I w''_2 = - M_2 = + P x_2$$

$$E I w'_2 = E I \varphi_2 = + P \frac{x_2^2}{2} + C_3$$

$$E I w_2 = + P \frac{x_2^3}{6} + C_3 x_2 + C_4$$

لتعيين ثوابت التكامل الاربعة يلزم اربعة شروط اطراف .

١ ـ ٥ ـ شروط الاطراف وشروط التحول (من مجال لمجال) وتعيين الثوابت :

في هذا المثال يكتفى بشروط الاطراف الهندسية .

$w_1 (x_1 = 0) = 0 \quad : C_2 = 0$

$w_1 (x_1 = l) = 0 \quad : \frac{Pa}{l} \frac{l^3}{6} + C_1 l + C_2 = 0$

$w'_2 (x_2 = a) = - w'_1 (x_1 = l) : \frac{Pa^2}{2} + C_3 = - \frac{Pa}{l} \frac{l^2}{2} - C_1$

$w_2 (x_2 = a) = 0 \quad : \frac{Pa^3}{6} + C_3 a + C_4 = 0$

١ ـ ٦ ـ حل مجموعة المعادلات الخطية وتعيين ثوابت التكامل :

$C_2 = 0 \quad ; C_1 = - \frac{Pa\,l}{6}$

$C_3 = - \frac{1}{3} Pal - \frac{1}{2} Pa^2 \quad , C_4 = \frac{1}{3} Pa^2 l + \frac{1}{3} Pa^3$

١ ـ ٧ ـ تبديل ثوابت التكامل في معادلات خط الانعطاف :

$E I w_1 = \frac{1}{6} \frac{Pa}{l} x_1^3 - \frac{1}{6} Pa\, l\, x_1$

$E I w_2 = \frac{1}{6} P x_2^3 - Pa \left(\frac{1}{3} l + \frac{1}{2} a \right) x_2 + \frac{1}{3} Pa^2 (l + a)$

٢ ـ حساب القيمة العظمي للانتقال الشاقولي (السهم) وتحديد مكان تشكلها .

المجال I :

بجعل مشتق الانتقال يساوي صفراً يتم تحديد مكان تشكل الانتقال الاعظمي :

$EIw'_1 = \frac{1}{2} \frac{Pa}{l} x_1^2 - \frac{1}{6} Pa\, l = 0 \; ; x_1^2 = \frac{1}{3} l^2 \; ; x_1 = \pm \frac{l}{\sqrt{3}}$

يؤخذ من الحلين ، الحل الموجب فقط ، أي :

$$x_1 = + \frac{l}{\sqrt{3}}$$

وبالتبديل في معادلة خط الانعطاف ، يتم الحصول على الانتقال الشاقولي الاعظمي (السهم) :

$$E I w_1 \left(x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}}\right) = E I f_1 = - \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{Pa\, l^2}{EI} = - \frac{\sqrt{3}\, Pa\, l^2}{27\, EI}$$

المجال II :

$$w_2\ (x_2 = 0) = f_2 = \frac{1}{3\, EI} Pa^2\ (l+a)$$

٣ - **زاوية** دوران المماس في النقطة b .

بتبديل $x_1 = 0$ في معادلة مشتق خط الانعطاف للمجال الاول يتم الحصول على زاوية دوران المماس في النقطة b :

$$w'_1 = \varphi_1 = - \frac{Pa\, l}{6\, EI}$$

ملاحظة :

في حالة اختيار المسند الثابت الايسر مبدأ للاحداثي x وعدم اختيار احداثيات فرعية x_1 , x_2 فان العلاقات السابقة تصبح بالشكل التالي :

$$M\ (x) = \begin{cases} - \dfrac{P\, l}{a} x & ; \quad 0 \leqq x \leqq l \\ - P\ (l + a - x); & l \leqq x \leqq l + a \end{cases}$$

المجال I $(0 \leqq x \leqq l)$:

$$EI\, w''_1\ (x) = \frac{Pa}{l} x$$

$$EI\, w'_1\ (x) = \frac{Pa}{l} \left(\frac{x^2}{2} + D_1\right)$$

$$EI\, w_1\ (x) = \frac{Pa}{l} \left(\frac{x^3}{6} + D_1 x + D_2\right)$$

المجال II $(l \leqq x \leqq l+a)$:

$$EI\,w''_2(x) = +P(l+a-x)$$

$$EI\,w'_2(x) = +P\left[(l+a)x - \frac{x^2}{2} + D_3\right]$$

$$EI\,w_2(x) = +P\left[(l+a)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + D_3 x + D_4\right]$$

شروط الاطراف وشروط التحول (شروط الاستمرار) :

$w_1(x=0) = 0 \qquad : D_2 = 0$

$w_1(x=l) = 0 \qquad : \frac{Pa}{l}\left(\frac{l^3}{6} + D_1 l + D_2\right) = 0$

$w_2(x=l) = 0 \qquad : P\left[(l+a)\frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{6} + D_3 l + D_4\right] = 0$

$w'_1(x=l) = w'_2(x=l) : \frac{Pa}{l}\left(\frac{l^2}{2} + D_1\right) = P\left[(l+a)\,l - \frac{l^2}{2} + D_3\right]$

بحل مجموعة المعادلات ينتج :

$$D_1 = -\frac{l^2}{6} \;,\quad D_2 = 0 \;,\quad D_3 = -\frac{2}{3}a\,l - \frac{l^2}{2}$$

$$D_4 = \frac{l^2}{6}(a+l)$$

معادلات خط الانعطاف :

$$w_1(x) = \frac{P\,a\,l^2}{6EI}\,\frac{x}{l}\left(\frac{x^2}{l^2} - 1\right)$$

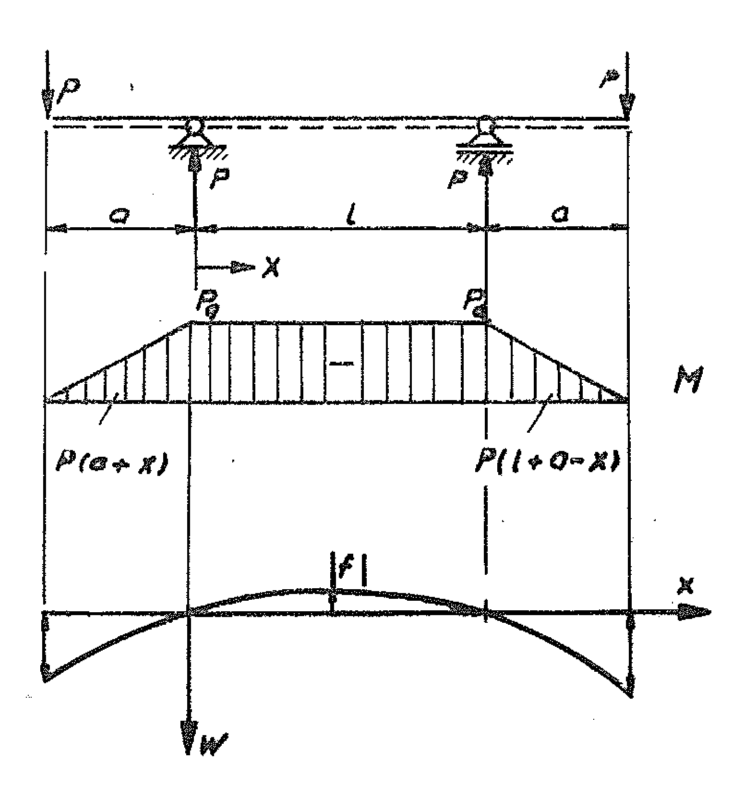
$$w_2(x) = \frac{P}{EI}\left[(l+a)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \left(\frac{2}{3}al + \frac{l^2}{2}\right)x + \frac{l^2}{6}(a+l)\right]$$

مثـال 105 :

حمل جائز بسيط ممتد الاطراف بحمولتين وحيدتين (شكل 12-9) .

المعطى : P , a , l , $EI=const.$.

المطلوب : حساب ورسم معادلة خط الانعطاف للمجال الموجود بين المسندين (المجـال الوسطي من الجائز) .



شكل 9-12

الحـــل :

معادلات عزوم الانعطاف :

$$M(x) = \begin{cases} M_1(x) = -P(a+x) & ; -a \leqq x \leqq 0 \\ M_2(x) = -Pa & ; \quad 0 \leqq x \leqq l \\ M_3(x) = -P(l+a-x) & ; \; l \leqq x \leqq l+a \end{cases}$$

المعادلة التفاضلية لخط الانعطاف في المجال الوسطي وتـكاملاتها :

$$EI\,w''(x) = +Pa \qquad = +M_0$$

$$EI\,w'(x) = +Pa\,x + C_1 \qquad = +M_0\,x + C_1$$

$$EI\,w(x) = +\frac{Pa}{2}x^2 + C_1\,x + C_2 = +\frac{M_0}{2}x^2 + C_1\,x + C_2$$

لتعيين الثوابت C_1 , C_2 تلزم معادلتين . شروط الاطراف الهندسية للمجال الوسطي :

$$w(x=0)=0 \quad ; \quad w(x=l)=0$$

بتحقيق المعادلات السابقة لشروط الاطراف يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1 = -\frac{Pa\,l}{2} = -\frac{M_0\,l}{2} \quad ; \quad C_2 = 0$$

معادلة خط الانعطاف للمجال الوسطي :

بتبديل قيم ثوابت التكامل في معادلة خط الانعطاف ينتج :

$$w(x) = -\frac{Pal^2}{2EI}\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) = -\frac{M_0 l^2}{2EI}\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

اما الانتقال الشاقولي الاعظمي الذي يتشكل في منتصف الجائز ، لتناظره فيبلغ :

$$w\left(x=\frac{l}{2}\right) = f = -\frac{Pa\,l^2}{8EI} = +\frac{M_0 l^2}{8EI}$$

وأما ميل المماس على خط الانعطاف عند نقاط الاستناد فيأخذ القيمة التالية :

$$\varphi(x=0) = -\varphi(x=l) = -\frac{Pa\,l}{2EI} = -\frac{M_0\,l}{2EI} \qquad (2\text{-}20a)$$

مثـال 106 :

حمل جائز بسيط بحمولة وحيدة P (شكل 13-9) .

المعطى : EI=const , l , a P .

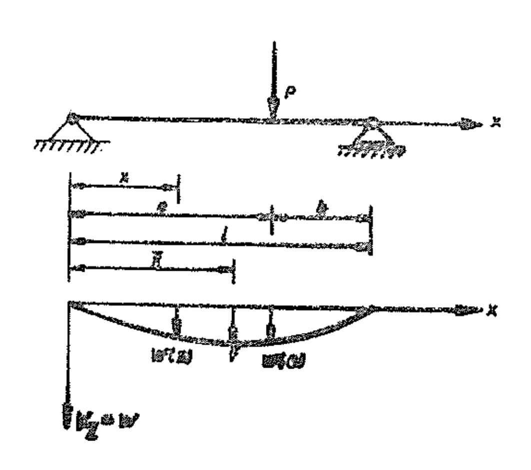
المطلوب : تعيين معادلة خط الانعطاف مع الرسم .

الحـل :

ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود افعال المساند :

$$\Sigma M_a = 0 \quad : B_v = \frac{1}{l}Pa = \frac{1}{l}P(l-b)$$



شكل 9-13

$$\Sigma V = 0 \quad : A_v = \frac{1}{l} P b = \frac{1}{l} P (l-a)$$

عزوم الانعطاف :

يتألف الجائز في هذه الحالة من مجالين . باجراء قطع في كل مجال وتطبيق شرط توازن العزوم على أحد الجزئين المقتطعين ينتج :

$$M(x) = \begin{cases} M_1 (x) = \frac{Pb}{l} x & ; 0 \leqq x \leqq a \\ M_2 (x) = \frac{Pa}{l}(l-x) & ; a \leqq x \leqq l \end{cases}$$

يفقد تابع العزم ، عند نقطة تطبيق القوة P ، استمراره مما يلزم تقسيم خط الانعطاف أثناء التكامل الى مجالين .

مجال I $(0 \leqq x \leqq a)$: | مجال II $(0 \leqq x \leqq l)$:

$$E I w''_1 (x) = - \frac{Pb}{l} x ; \qquad E I w_2'' (x) = - \frac{Pa}{l} (l-x)$$

$$E I w'_1 (x) = - \frac{Pb}{l} \frac{x^2}{2} + C_1 ; \qquad E I w'_2 (x) = + \frac{Pa}{l} \frac{(l-x)^2}{2} + C_3$$

$$E I w_1 (x) = - \frac{Pb}{l} \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_1 ; \quad E I w_2 (x) = - \frac{Pa}{l} \frac{(l-x)^3}{6} - C_3 (l-x) + C_4$$

لتعيين ثوابت التكامل الاربع تلزم أربعة معادلات يتم الحصول عليها بتحقيق هذه المعادلات لشروط الاطراف وشروط التحول (شروط الاستمرار) التالية :

شروط الاطراف الهندسية :

$$w_1\ (x = 0) = 0$$

$$w_2\ (x = l) = 0$$

شروط التحول (شروط الاستمرار) :

$$w_1\ (x = a) = w_2\ (x = a)$$

$$w'_1\ (x = a) = w'_2\ (x = a)$$

بتحقيق المعادلات التفاضلية لشروط الاطراف يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$w_1\ (x=0) = 0 = \frac{C_2}{EI} \quad , \quad w_2\ (x=l) = 0 = \frac{C_4}{EI}$$

$$w_1\ (x=a) - w_2\ (x=a) = 0 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{Pba^3}{6\,l} + C_1 a + C_2 + \frac{Pab^3}{6\,l} + C_3 b - C_4\right)$$

$$w'_1 (x=a) - w'_2 (x=a) = 0 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{Pba^2}{2\,l} + C_1 - \frac{Pab^2}{2\,l} - C_3\right)$$

بحل هذه المعادلات يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1 = \frac{Pa\,b}{6\,l}(2\,b+a) \ : \ C_2 = 0 \ ; \ C_3 = -\frac{Pa\,b}{6\,l}(2\,a+b) \ ; \ C_4 = 0$$

بتبديل هذه القيم في معادلات خط الانعطاف يتم الحصول على المعادلات المطلوبة :

$$w\ (x) = \begin{cases} w_1\ (x) = \dfrac{Pb\,l^2}{6\,EI}\ \dfrac{x}{l}\left(1 - \dfrac{b^2}{l^2} - \dfrac{x^2}{l^2}\right) \ ; \ 0 \leqq x \leqq a \\ w_2\ (x) = \dfrac{Pa\,l^2}{6\,EI}\ \dfrac{(l-x)}{l}\left[1 - \dfrac{a^2}{l^2} - \dfrac{(l-x)^2}{l^2}\right] \ ; \ 0 \leqq x \leqq l \end{cases} \qquad (9\text{-}20)$$

يبلغ الانتقال الشاقولي عند نقطة تطبيق القوة الوحيدة :

$$w\ (x = a) = \frac{Pa^2\,b^2}{3\,EI\,l}$$

يتشكل الانتقال الشاقولي الاعظمي (السهم) في حالة كون a>b في المكان :

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{a\,(l+b)}$$

وهو يبلغ :

$$w\,(x = \bar{x}) = f = \frac{Pb}{9\sqrt{3}EIl}\,[a\,(l+b)]^{3/2}$$

وفي حالة كون b>a يتشكل في المكان :

$$\bar{x} = l - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{b\,(l+a)}$$

وهو يبلغ :

$$w\,(x = \bar{x}) = f = \frac{Pa}{9\sqrt{3}\;EIl}\,[b\,(l+a)]^{3/2}$$

في حالة كون a=b=l/2 فان الانتقال الشاقولي الاعظمي يتشكل في منتصف الجائز (في نقطة تطبيق القوة الوحيدة) وهو يبلغ :

$$f = \frac{Pl^3}{48\,EI}$$

مثال 107 :

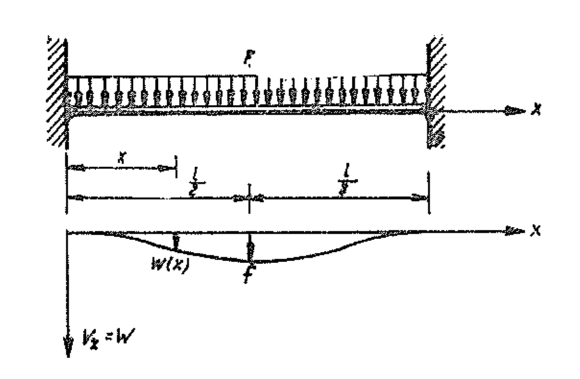
حمل جائز موثوق من كلا طرفيه ، بحمولة خطية موزعة بانتظام (حمولة خطية ثابتة) (شكل 9-14) .

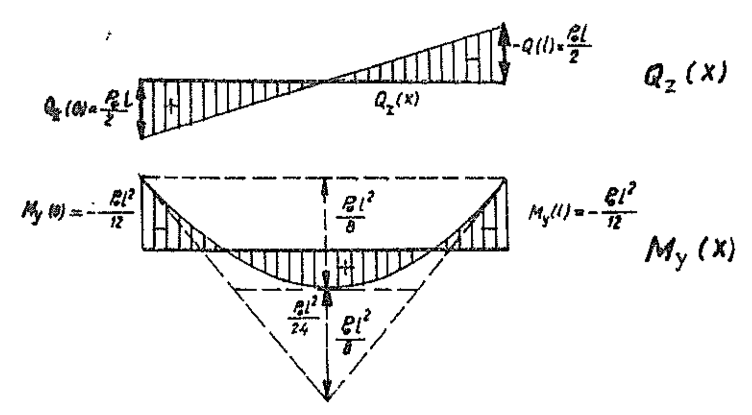
المعطى : $EI = const$, p_0 , l .

المطلوب : حساب ورسم خط الانعطاف وخطوط قيم القطع .

الحل :

باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة لخط الانعطاف وباجراء عدة مكاملات متكررة عليها ينتج :





شكل 9-14

$$E\,I\,w''''(x) = p_0$$

$$E\,I\,w'''(x) = -Q(x) = p_0\,x + C_1$$

$$E\,I\,w''(x) = -M(x) = \frac{p_0}{2}\,x^2 + C_1 x + C_2$$

$$E\,I\,w'(x) = \frac{p_0}{6}\,x^3 + C_1\,\frac{x^2}{2} + C_2\,x + C_3$$

$$E\,I\,w(x) = \frac{P_0}{24}\,x^4 + C_1\,\frac{x^3}{6} + C_2\,\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

لتعيين ثوابت التكامل الاربعة تلزم اربع معادلات .

شروط الاطراف الهندسية :

$$w(x=0) = 0 \;\; ; \;\; w'(x=0) = 0 \;\; ; \;\; w(x=l) = 0 \;\; ; \;\; w'(x=l) = 0$$

في هذا المثال تكفي شروط الاطراف الهندسية لتعيين ثوابت التكامل . بتحقيق المعادلةالتفاضلية

السابقة وتكاملاتها لشروط الاطراف يتم الحصول على ثوابت التكامل :

$$C_1 = -\frac{p_0 l}{2} \; ; \; C_2 = \frac{p_0 l^2}{12} ; C_3 = 0 \; ; \; C_4 = 0$$

بتبديلها في معادلة خط الانعطاف ينتج :

$$w(x) = \frac{p_0 l^4}{24 E I} \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

يبلغ الانتقال الشاقولي ، في منتصف الجائز قيمته الاعظمية التي تساوي :

$$w\left(x = \frac{l}{2}\right) = f = \frac{p_0 l^4}{384 E I}$$

تعطى القوة العرضية من خلال المعادلة التالية :

$$Q(x) = \frac{p_0 l}{2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)$$

وكذلك يعطى عزم الانعطاف بواسطة العلاقة الآتية :

$$M(x) = -\frac{p_0 l}{12} + \frac{p_0 l^2}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

بتبديل $x=0$ و $x=l$ في معادلتي M,Q يتم الحصول على القوى العرضية وعزوم الانعطاف التي تساوي ردود أفعال المساند .

قوى ردود أفعال المساند :

$$Q\,(x = 0) = \frac{p_0 \, l}{2} \quad , \quad -Q\,(x = l) = \frac{p_0 \, l}{2}$$

عزوم الوثاقة :

$$M\,(x = 0) = -\frac{p_0 \, l^2}{12} \quad , \quad M\,(x = l) = -\frac{p_0 \, l^2}{12}$$

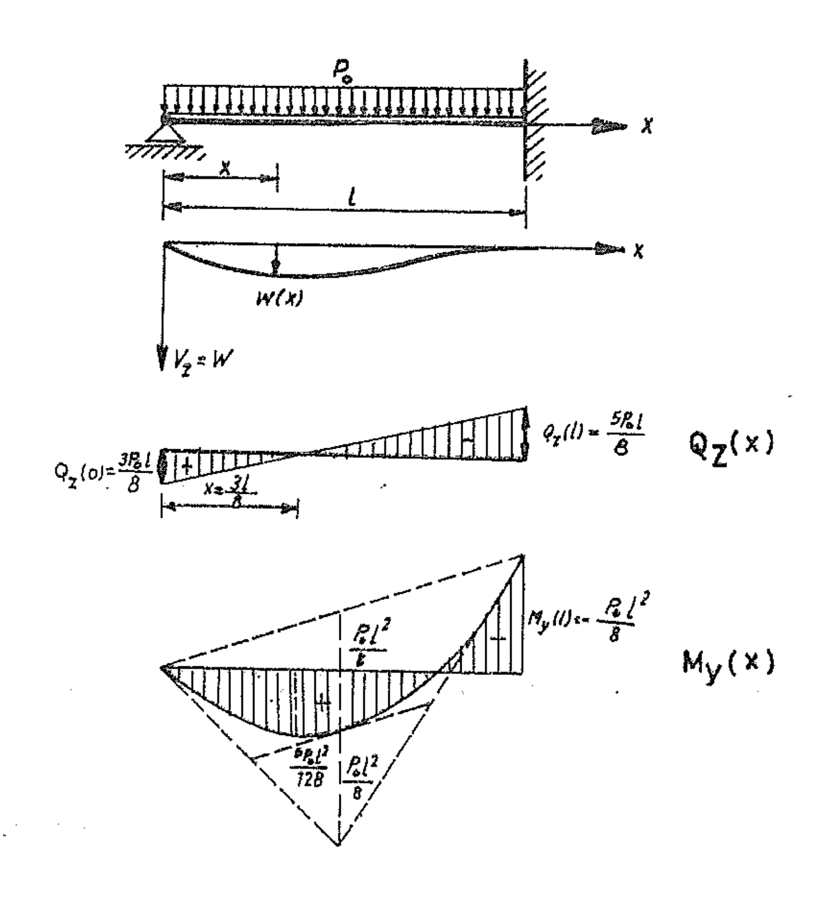
لقد تم في الشكل (9-14) تمثيل خط الانعطاف وخطوط قيم القطع ، مما يؤكد إمكانية ايجاد قيم القطع في الجائز غير المقرر ستاتيكياًبواسطةالعلاقات التفاضلية ودون إستخدام شروطالتوازن.

مثال 108 :

حمل جائز موثوق من طرف ومفصلي متحرك من الطرف الآخر ، بحموله خطية موزعة بانتظام (شكل 9-15) .

المعطى : $EI = const$, p_0 , l .

المطلوب : حساب ورسم خط الانعطاف وخطوط قيم القطع .



شكل 9-15

الحـــل :

لتعيين خط الانعطاف وكذلك خطوط قيم القطع سوف يسلك طريق استخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة لخط الانعطاف .

$$EI\, w''''(x) = p_0$$

$$EI\, w'''(x) = -Q(x) = p_0\, x + C_1$$

$$EI\, w''(x) = -M(x) = \frac{p_0}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$EI\, w'(x) = \frac{p_0}{6} x^3 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI\, w(x) = \frac{p_0}{24} x^4 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

لتعيين ثوابت التكامل تلزم أربع معادلات يتم الحصول عليها بتحقيق المعادلات السابقة لشروط الاطراف التالية :

شروط الاطراف الهندسية :

$$w(x = 0) = 0 \quad ; \quad w(x = l) = 0 \quad ; \quad w'(x = l) = 0$$

شروط الاطراف الستاتيكية :

$$M(x = 0) = 0$$

بتحقيق المعادلة التفاضلية وتكاملاتها لشروط الأطراف يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$w(x = 0) = 0 = \frac{1}{EI} C_4$$

$$M(x = 0) = 0 = -C_2$$

$$w(x = 0) = 0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{p_0 l^4}{24} + \frac{C_1 l^3}{6} + \frac{C_2 l^2}{2} + C_3 l + C_4\right)$$

$$w'(x = l) = 0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{p_0 l^3}{6} + \frac{C_1 l^2}{2} + C_2 l + C_3\right)$$

التي يعطي حلها ثوابت التكامل :

$$C_1 = -\frac{3 p_0 l}{8} \;, \quad C_2 = 0 \;, \quad C_3 = \frac{p_0 l^3}{48} \;, \quad C_4 = 0$$

بتبديل هذه القيم في العلاقات التفاضلية يتم التوصل الى معادلة خط الانعطاف المطلوبة :

$$w(x) = \frac{p_0 l^4}{48\, EI} \; \frac{x}{l} \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3}\right)$$

بما أن معادلة القوة العرضية تمثل بالعلاقة التالية :

$$Q(x) = \frac{p_0 l}{8} \left(3 - 8 \frac{x}{l}\right)$$

فان ردود أفعال المساند تبلغ :

$$Q(x = 0) = \frac{3 p_0 l}{8} \quad , \quad -Q(x = l) = \frac{5 p_0 l}{8}$$

تنعدم القوة العرضية في المكان $\bar{x} = \frac{3}{8} l$ أما عزم الانعطاف :

$$M(x) = \frac{p_0 l^2}{8} \frac{x}{l} \left(3 - 4 \frac{x}{l}\right)$$

فيأخذ في ذلك المكان قيمة الأعظمية الموجبة :

$$M\left(x = \frac{3}{8} l\right) = \frac{9 p_0 l^2}{128}$$

مثـال 109 :

عانى جائزان متساويان في الطول وغير محملان أحدهما ذو استناد مفصلي بسيط وثانيهما موثوق من كلا الطرفين ، هبوطاً مسندياً شاقولياً في نقطة الاستناد $x=l$ مقداره Δ (شكل 9.16).

المعطى : l , Δ , $EI = const$

المطلوب : حساب ورسم خط الانعطاف وخطوط القوة العرضيـة وعزم الانعطاف لكل من الجائزين :

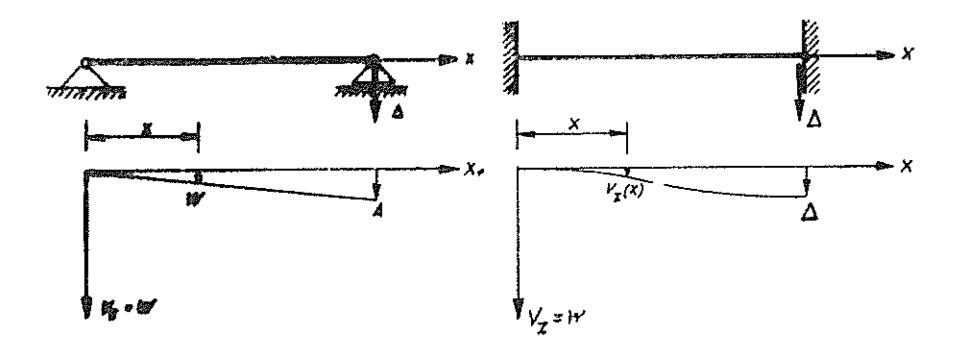
الحـل :

بتحقيق العلاقات التفاضلية التي تصلح لكلا الجائزين (لعدم وجود حمولة عليهما) :

$$E I w''''(x) = 0$$

$$E I w'''(x) = -Q(x) = C_1$$

$$E I w''(x) = -M(x) = C_1 x + C_2$$



شكل 9.16

$$EI\,w'(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI\,w(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

في المرة الاولى لشروط الأطراف الهندسية والستاتيكية للجائز البسيط :

$$w(x=0) = 0 \quad ; \quad w(x=l) = \Delta$$

$$M(x=0) = 0 \quad ; \quad M(x=l) = 0$$

وفي المرة الثانية لشروط الاطراف الهندسية للجائز الموثوق من كلا طرفيه :

$$w(x=0) = 0 \quad ; \quad w(x=l) = \Delta$$

$$w'(x=0) = 0 \quad ; \quad w'(x=l) = 0$$

يتم التوصل للمعادلات التابعة للجائز البسيط التالية :

$$w(x=0) = 0 = \frac{1}{EI} C_4 \; ; \; w(x=l) = \Delta = \frac{1}{EI}\left(\frac{C_1 l^3}{6} + \frac{C_2 l^2}{2} + C_3 l + C_4\right)$$

$$M(x=0) = 0 = -C_2 \quad ; \quad w(x=l) = 0 = -C_1 l - C_2$$

كما يتم التوصل للمعادلات التابعة للجائز الموثوق من كلا طرفيه :

$$w(x=0) = 0 = \frac{1}{EI} C_4 \; ; \; w(x=l) = \Delta = \frac{1}{EI}\left(\frac{C_1 l^3}{6} + \frac{C_2 l^2}{2} + C_3 l + C_4\right)$$

$$w'(x=0) = 0 = \frac{1}{EI} C_3 \; ; \; w'(x=l) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{C_1 l^2}{2} + C_2 l + C_3\right)$$

بحل مجموعتي المعادلات يتم الحصول على ثوابت التكامل من أجل الجائز البسيط :

$$C_1 = C_2 = 0 \quad , \quad C_3 = \frac{EI\Delta}{l} \; ; \; C_4 = 0$$

ومن أجل الجائز الموثوق من كلا الطرفين :

$$C_1 = -\frac{12\,EI\Delta}{l^3} \; : C_2 = \frac{6EI\Delta}{l^2} \; ; \; C_3 = C_4 = 0$$

بتعويض قيم الثوابت في المعادلة التفاضلية وتكاملاتها يتم الحصول على المعادلات المطلوبة ، من أجل الجائز البسيط :

$$w(x) = \frac{\Delta}{l}\, x$$

$$Q(x) = 0$$

$$M(x) = 0$$

ومن أجل الجائز الموثوق من كلا الطرفين :

$$w(x) = \Delta \frac{x^2}{l^2}\left(3 - 2\frac{x}{l}\right)$$

$$Q(x) = \frac{12\,EI}{l^3}\,\Delta$$

$$M(x) = -\frac{6EI}{l^2}\,\Delta\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)$$

تشير هذه العلاقات إلى أن هبوط المساند لا يؤدي في الجيزان المقررة ستاتيكياً (ومن بينها الجائز البسيط) إلا لدوران فى محور القضيب دون أن تتشكل فيه نتيجة لذلك قوى داخلية ، كما تشير أيضا إلى أن هبوط المساند يؤدي في الجيزان غير المقررة ستاتيكياً (ومن بينها الجائز الموثوق من كلا طرفيه) الى تغيرات مرنة مصحوبة بقوى داخلية (هنا قوى عرضية $Q(x)$ وعزوم إنعطاف $M(x)$) . يشير الشكل (9.17) إلى توزيع قيم القطع والتي تأخذ على العموم ، بسبب تناسبها مع صلابة الانعطاف ، قيماً كبيرة .

مثال 110 :

حمل جائز موثوق من طرف ومفصلي متحرك أفقياً من الطرف الآخر بحمولة خطية وقوة وحيدة (شكل 9.18) .

$Q_y(0) = \frac{12EI_{yy}}{l^3}\Delta$ $-Q_z(l) = -\frac{12EI_{yy}}{l^3}\Delta$ $Q_z(x)$

$M_y(0) = -\frac{6EI_{yy}}{l^2}\Delta$ $M_y(l) = -\frac{6EI_{yy}}{l^2}\Delta$ $M_y(x)$

شكل 9.17

المعطى : الابعاد a , l , $EI = const.$ والحمولات q_1 , q_2 , p .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند وخط الانعطاف .

آ ـ باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .

ب ـ باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة .

الحـل :

آ ـ باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .

تختار مجموعة الاحداثيات الممثلة في الشكل (9.18) وبذلك تصلح من أجل كلا المجالـين ، المعادلة التالية :

$$w'' = -\frac{M}{EI}$$

إن الجائز المدروس هو جائز غير مقرر ستاتيكياً من الدرجة الاولى (مرة واحدة غير مقرر ستاتيكياً) .

توابع $M(x)$, $W''(x)$:

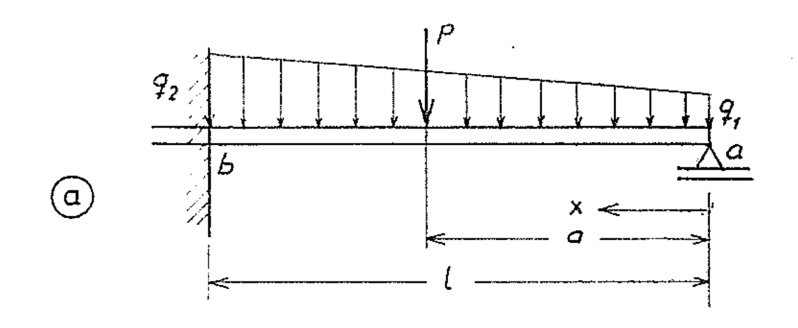
$$q(x) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{l}x$$

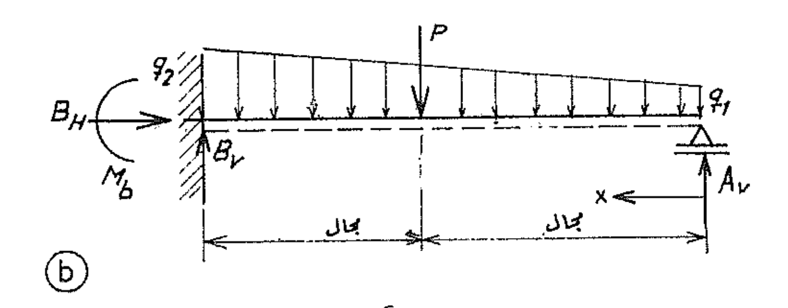
$$M_1(x) = +A_v x_1 - \int_0^{x_1} q(x)\,(x_1 - x)\,dx = A_v x_1 - \left[\frac{q_1}{2}x_1^2 + \frac{(q_2 - q_1)}{6l}x_1^3\right] = -EIw_1''$$

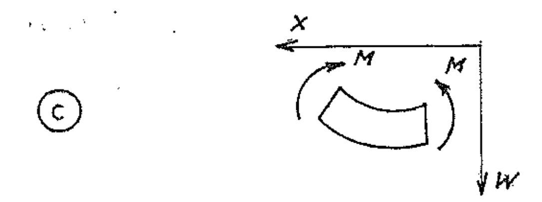
$$M_2(x) = +A_v \cdot x_2 - \left[\frac{q_1}{2}x_2^2 + \frac{(q_2 - q_1)}{6l}x_2^3\right] - P(x_2 - a) = -EIw_2''$$

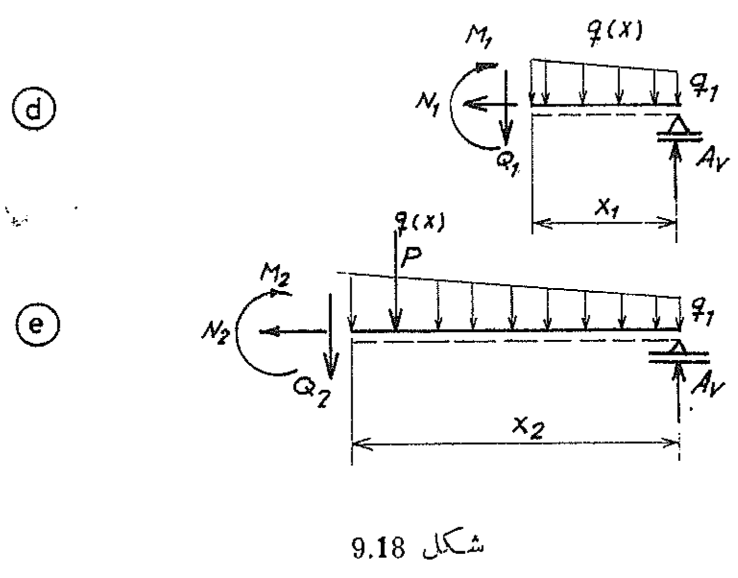
التكاملات :

$$EIw_1' = -\frac{A_v}{2}x_1^2 + \left[\frac{q_1}{6}x_1^3 + \frac{(q_2 - q_1)}{24l}x_1^4\right] + C_1$$


P
q_2
q_1
b
a
x
a
l


P
q_2
B_H
q_1
B_V
M_b
x
A_V


x
M
M
W


M_1
$q(x)$
q_1
N_1
Q_1
A_V
x_1
$q(x)$
P
M_2
q_1
N_2
Q_2
A_V
x_2

شکل 9.18

$$E I w_2' = -\frac{A_v}{2} x_2^2 + \left[\frac{q_1}{6} x_2^3 + \frac{(q_2 - q_1)}{24 l} x_2^4\right] + \frac{1}{2} P (x_2 - a)^2 + C_3$$

$$E I w_1 = -\frac{A_v}{6} x_1^3 + \left[\frac{q_1}{24} x_1^4 + \frac{(q_2 - q_1)}{120 l} x_1^5\right] + C_1 x_1 + C_2$$

$$E I w_2 = -\frac{A_v}{6} x_2^3 + \left[\frac{q_1}{24} x_2^4 + \frac{(q_2 - q_1)}{120 l} x_2^5\right] + \frac{1}{6} P (x_2 - a)^3 + C_3 x_2 + C_4$$

ملاحظة من أجل التكامل : يفضل في حالة الاحداثيات المستمرة المستعملة هنا (كافة الاحداثيات x تبدأ من نقطة واحدة ولها نفس الاتجاه) محاولة زلق متغيرات التكامل بشكـــل مناسب ولبعض الحدود (هنا يتم التكامل لحدود P بالنسبة لـ $d(x_2 - a)$ عوضاً عن dx_2) وذلك للتوصل إلى امكانية تسهيل شكل الثوابت عند امكنة التحول بشكل واضح .

شروط الأطراف وشروط التحول (من مجال لمجال أخر) وحل المعادلات :

$w_1 (x_1 = 0) = 0 \quad ; \quad C_2 = 0$

$w_1'(x_1 = a) = w_2' (x_2 = a) \quad ; \quad C_1 = C_3$

$w_1 (x_1 = a) = w_2 (x_2 = a) \quad ; \quad C_2 = C_4$

$$w_2' (x_2 = l) = 0 ; \quad -A_v \frac{l^2}{2} + q_1 \frac{3}{24} l^3 + q_2 \frac{1}{24} l^3 + P \frac{1}{2} (l - a)^2 + C_3 = 0$$

$$w_2 (x_2 = l) = 0 ; \quad -A_v \frac{l^3}{6} + q_1 \frac{4}{120} l^4 + q_2 \frac{1}{120} l^4 + P \frac{1}{6} (l - a)^3 + C_3 l + C_4 = 0$$

$$C_1 = C_3 = +q_1 l^3 \frac{3}{240} + q_2 l^3 \frac{2}{240} + P l^2 \left(1 - \frac{a}{4l}\right)^2 \frac{a}{l}$$

$$C_2 = C_4 = 0$$

$$A_v = +q_1 l \frac{11}{40} + q_2 l \frac{4}{40} + P \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{a}{2l}\right)$$

يتم تعيين ردود أفعال المساند في النقطة b بتطبيق شروط التوازن على الجسم لـكل :

$$B_H = 0$$

$$B_v = +(q_1 + q_2) \frac{l}{2} + P - A_v = +q_1 l \frac{9}{40} + q_2 l \frac{16}{40} + P \left[1 - \left(1 + \frac{a}{2l}\right)\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2\right]$$

$$M_b = -M_2(x_2 = l) = +q_1 l^2 \frac{2}{6} + q_2 l^2 \frac{1}{6} + Pl\left(1 - \frac{a}{l}\right) - A_v l$$

$$M_b = +q_1 l^2 \frac{7}{120} + q_2 l^2 \frac{8}{120} + A_v l\left(1 - \frac{a}{l}\right)\left[1 - \left(1 + \frac{a}{2l}\right)\left(1 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

خط الانعطاف (الخط المرن) :

$$w_1 = +\frac{q_1 l^4}{240EI}\left[3\left(\frac{x_1}{l}\right) - 11\left(\frac{x_1}{l}\right)^3 + 10\left(\frac{x_1}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x_1}{l}\right)^5\right] +$$

$$+\frac{q_2 l^4}{240EI}\left[2\left(\frac{x_1}{l}\right) - 4\left(\frac{x_1}{l}\right)^3 + 2\left(\frac{x_1}{l}\right)^5\right]$$

$$+\frac{Pl^3}{12EI}\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2\left[3\frac{a}{l}\left(\frac{x_1}{l}\right) - 2\left(1 + \frac{a}{2l}\right)\left(\frac{x_1}{l}\right)^3\right],$$

(من أجل $0 \leqq x_1 \leqq a$)

$$w_2 = +\frac{q_1 l^4}{240EI}\left[3\left(\frac{x_2}{l}\right) - 11\left(\frac{x_2}{l}\right)^3 + 10\left(\frac{x_2}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x_2}{l}\right)^5\right] +$$

$$+\frac{q_2 l^4}{240EI}\left[2\left(\frac{x_2}{l}\right) - 4\left(\frac{x_2}{l}\right)^3 + 2\left(\frac{x_2}{l}\right)^5\right] +$$

$$+\frac{Pl^3}{12EI}\left[\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2\left[3\frac{a}{l}\left(\frac{x_2}{l}\right) - 2\left(1 + \frac{2}{2l}\right)\left(\frac{x_2}{l}\right)^3\right] + 2\left(\frac{x_2}{l} - \frac{a}{l}\right)^3\right]$$

(من أجل $0 \leqq x_2 \leqq l$)

ب ـ باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة .

تختار مجموعة احداثيات جديدة هي $(x, \bar{w})$ حسب الشكل (9.18c) .
العلاقـة التي تربـط بين $\bar{w}$ و w :

$$\bar{w} = -w$$

الحمولة الخطية الموزعة :

$$q(x) = -q_2 - (q_l - q_1)\frac{x}{l}$$

(تصلح هذه المعادلة من اجل x_1 , x_2) .
العلاقات التفاضلية وتكاملاتها :
المجال 1 $(0 \leqq x_1 \leqq a)$:

$$(EI\,\overline{w}_1'')'' = -\,q_1 - (q_2 - q_1)\,\frac{1}{l}\,x_1 = +\,q\,(x)$$

$$(EI\,\overline{w}_1'')' = -\,q_1\,x_1 - (q_2 - q_1)\,\frac{1}{l}\,\frac{x_1^{2}}{2} + D_1 = +\,Q\,(x)$$

$$EI\,\overline{w}_1'' = -\,q_1\,\frac{x_1}{2} - (q_2 - q_1)\,\frac{1}{l}\,\frac{x_1^{3}}{6} + D_1\,x_1 + D_2 = +M(x)$$

$$EI\,\overline{w}_1' = -\,q_1\,\frac{x_1^{3}}{6} - (q_2 - q_1)\,\frac{1}{l}\,\frac{x_1^{4}}{24} + D_1\,\frac{x_1^{2}}{2} + D_2 x_1 + D_3$$

$$EI\,\overline{w}_1 = -\,q_1\,\frac{x_1^{4}}{24} - (q_2 - q_1)\,\frac{1}{l}\,\frac{x_1^{5}}{120} + D_1\,\frac{x_1^{3}}{6}\,\frac{x_1^{2}}{2} + D_3 x_1 + + D_4$$

المجال II : $(a \leqq x_2 \leqq l)$

$$(EI\,\overline{w}_2'')'' = -\,q_1 - (q_2 - q_1)\,\frac{1}{l}\,x_2 = +\,q_2$$

$$(EI\,\overline{w}_2'')' = -\,q_1\,x_2 - (q_2 - q_1)\,\frac{1}{l}\,\frac{x_2^{2}}{2} + D_5 = +Q_2$$

$$EI\,\overline{w}_2'' = -\,q_1\,\frac{x_2^{2}}{2} - (q_2 - q_1)\,\frac{1}{l}\,\frac{x_2^{3}}{6} + D_5\,(x_2 - a) + D_6 = +M_2$$

$$EI\,\overline{w}_2' = -\,q_1\,\frac{x_2^{3}}{6} - (q_2 - q_1)\,\frac{1}{l}\,\frac{x_2^{4}}{24} + D_5\,\frac{1}{2}(x_2 - a)^2 + D_6(x_2 - a) + D_7$$

$$EI\,\overline{w}_2 = -\,q_1\,\frac{x_2^{4}}{24} - (q_2 - q_1)\,\frac{1}{l}\,\frac{x_2^{5}}{120} + D_5\,\frac{1}{6}\,(x_2 - a)^3 + D_6\,\frac{1}{2}\,(x_2 - a) +^{2}$$

$$+\,D_7\,(x_2 - a) + D_8$$

(من اجل تكاملات D_5 و D_6 ينبغي العودة ثانية للملاحظة المنوه عنها في الطلب آ ـ من هذه المسألة) .

شروط الاطراف وشروط التحول وحل المعادلات :

$M_1\,(x_1 = 0) = 0 \quad ; \quad D_2 = 0$

$\overline{w}_1\,(x_1 = 0) = 0 \quad ; \quad D_4 = 0$

$Q_1\,(x_1 = a) = Q_2\,(x_2 = a) + P \;;\; D_1 = D_5 + P$

$$M_1(x_1=a) = M_2(x_2=a) \quad ; \quad D_1 a + D_2 = D_6$$

$$\bar{w}_1'(x_1=a) = \bar{w}_2'(x_2=a) \; ; \quad D_1 \frac{a^2}{2} + D_2 a + D_3 = D_7$$

$$\bar{w}_1(x_1=a) = \bar{w}_2(x_2=a) \; ; \quad D_1 \frac{a^3}{6} + D_2 \frac{a^2}{2} + D_3 a + D_4 = D_8$$

$$\bar{w}'_2(x_2=l) = 0 \qquad ; -q_1 l^3 \frac{3}{24} - q_2 l^3 \frac{1}{24} + D_5 \frac{1}{2}(l-a)^2 + D_6(l-a) + D_4 = 0$$

$$\bar{w}_2(x_2=l) = 0 \qquad ; \quad q_1 l^4 \frac{4}{120} - q_2 l^4 \frac{1}{120} + D_5 \frac{1}{6}(l-a)^3 + D_6 \frac{1}{2}(l-a)^2 + D_7(l-a) + D_8 = 0$$

$$D_1 = +q_1 l \frac{11}{40} + q_2 l \frac{4}{40} + P\left(1-\frac{a}{l}\right)^2 \left(1+\frac{a}{2l}\right) \quad ; \quad D_2 = 0$$

$$D_3 = -q_1 l^3 \frac{3}{240} - q_2 l^3 \frac{2}{240} - P l^2 \left(1-\frac{a}{l}\right)^2 \frac{a}{4l} \quad ; \quad D_4 = 0$$

$$D_5 = D_1 - P \qquad ; \quad D_6 = D_1 a$$

$$D_7 = D_1 \frac{a^2}{2} + D_3 \qquad ; \quad D_8 = D_1 \frac{a^3}{6} + D_3 a$$

بهذه الثوابت يتم الحصول مرة ثانية على نفس نتيجة الطلب آ ـ ، لكن باشارة معاكسة :

$$\bar{w}_1 = -w_1 \quad ; \quad \bar{w}_2 = -w_2$$

بواسطة الاشتقاق يمكن الحصول على ردود أفعال المساند كما يمكن الحصول عليها أيضاً ، وهو الأسهل ، بتبديل الثوابت في العلاقات الموجودة :

$$A_v = + Q(x_1=0) = +(EIw_1'')'(x_1=0) = D_1$$

$$B_v = -Q(x_2=l) = +(q_1+q_2)\frac{1}{2} + P - D_1$$

$$M_b = -M_2(x_2=l) = +q_1 l^2 \frac{2}{6} + q_2 l^2 \frac{1}{6} + Pl\left(1-\frac{a}{l}\right) - D_1 l$$

تتطابق هذه النتيجة أيضاً مع النتيجة التي تم الحصول عليها في آ - .

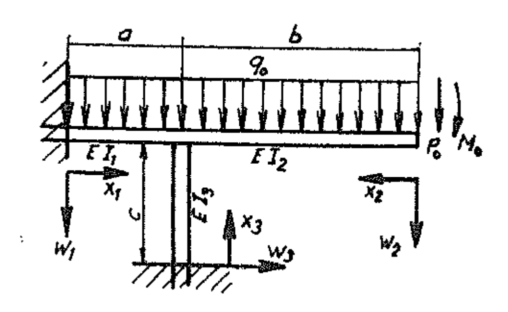
مثال 111 :

حمل الجائز المتفرع بحموله خطية موزعة بانتظام وبقوة وعزم وحيدين شكل (9.19) .

المعطى : الابعاد a , b , c والصلابات $EI_1 = EI_2$, EI_3 والحمولات P_0 , M_0 , q_0 .

المطلوب :

كتابة شروط الاطراف التابعة للقيم w', w في مجموعة الاحداثيات المعطاة .



شكل 9.19

الحل :

$$w_1(x_1 = 0) = 0 \quad ; \quad w_1'(x_1 = 0) = 0$$

$$w_1(x_1 = a) = 0 \quad ; \quad w_1'(x_1 = a) = +w_3'(x_3 = c)$$

$$w_2(x_2 = b) = 0 \quad ; \quad w_2'(x_2 = b) = -w_3'(x_3 = c)$$

$$w_3(x_3 = 0) = 0 \quad ; \quad w_3'(x_3 = 0) = 0$$

$$w_3(x_3 = c) = 0$$

تكفي هذه المعادلات لتعيين التسعة المجاهيل التالية :

٢ ثوابت تكامل لكل مجال = ٦ مجاهيل .

(نقطة الانطلاق : معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية من أجل w (x)) .

٣ ردود افعال غير مقررة ستاتيكياً = ٣ مجاهيل .

مثال 112 :

حمل جائز موثوق من طرف ومفصلي متحرك أفقياً من الطرف الآخر بحمولة وحيدة P وبحمولة موزعة q تؤثر على رقعة منه (شكل 9.20) .

المطلوب : كتابة شروط الاطراف اللازمة لمعالجة خط الانعطاف بواسطة المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة .

الحل :

$$M''(x) = -q(x); \qquad w''(x) = -\frac{M(x)}{EJ(x)}.$$

P q(X)

X_1 X_2 X_3

I II III

$w = 0$	$w_1 = w_2$	$w_2 = w_3$	$w = 0$
$w' = 0$	$\varphi_1 = \varphi_2$	$\varphi_2 = \varphi_3$	$M = 0$
	$M_1 = M_2$	$M_2 = M_3$	
	$Q_1 = P + Q_2$	$Q_2 = Q_3$	

شكل 9.20

مثال 113 :

يلزم تغطية الفراغ الموجود بين جدارين يبعدان عن بعضها البعض مسافة $l_0 = 5{,}00$ m (شكل 9.21) ، بعوارض خشبية مقطعها العرضي مستطيل الشكل ، وتبعد الواحدة عن الاخرى مسافة $e = 0{,}80$ m . ينبغي تصميم سقف التغطية المذكور من أجل (لتحمل) حمولة موزعة على السقط الافقي (Grundriβ) توزيعاً منتظماً تبلغ شدتها $q_t = 300$ kp/m² (تتألف هـذه الحمولة من حمولة استفادة مضافا اليها الوزن الذاتي) .

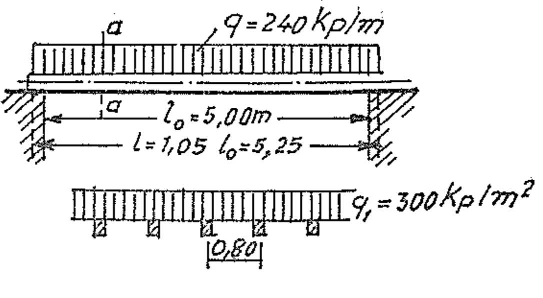
المعطى :

$E = 100\,000$ kp/cm², zul $\sigma_b = 115$ kp/cm²; $q_t = 300$ kp/m²; $e = 0{,}80$; $l_0 = 5{,}00$ m

المطلوب : تعيين ابعاد المقطع العرضي للعوارض الخشبية شريطة :

١ ـ ان لا يتعدى الاجهاد الموجود (الفعلي) vorh σ قيمة اجهاد الانعطاف المسموح لخشب الزان zul σ_b .

٢ ـ ان لا يتعدى الانتقال الاعظمي f قيمة الانتقال المسموح zul $f = l/300$.



شكل 9.21

الحل :

في حالة وضع الجيزان على الجدران مباشرة وبسبب عدم تحقيق تلك السطوح لشروط الاستناد بشكل جيد فان طول الاستناد l ينبغي ان يزيد على فتحة الجائز l_0 بمقدار 5 % (هـذا ما تمليه النظم والمواصفات الألمانية) . ففي الحالة المبحوثة في هذا المثال يبلغ إذاً طـول الاستناد القيمة التالية :

$$l = 1,05\, l_0 = 1,05 . 5,00 = 5,25 \text{ m}$$

تنقل كل من العوارض الداخلية اليها حمولة موزعة بانتظام على شكل شريحة طولها l وعرضها e=0,80 m . بذلك تبلغ الحمولة التي تؤثر على متر واحد من طول الجائز القيمة التالية :

$$q = q_0 . 1 . e = 300 . 1 . 0,80 = 240 \text{ kp/m}$$

بالاستفادة من هذه القيمة فان عزم الانعطاف الاعظمي الذي يتشكل في العارضة (التي تعتبر جائزاً بسيطاً) يبلغ القيمة التالية :

$$\max M = \frac{ql^2}{8} = \frac{240 . 5,25^2}{8} = 827 \text{ kp m} = 827\,00 \text{ kp cm}$$

يلعب الانتقال الشاقولي الاعظمي في الجيزان الطويلة الدور الاول في تصميم المقطـع العرضي ، حيث تتخطى فيها الانتقالات الشاقولية الاعظمية الموجودة (الفعلية) قيمة الانتقال المسموح قبل ان تبلغ الاجهادات الموجودة (الفعلية) قيمة الاجهاد المسموح ، كما في هذا المثال .

لكن الاجهاد الاعظمي الموجود في الجيزان القصيرة هو الذي يلعب الدور الاول في تصميـم المقطع العرضي حيث تتخطى فيه الاجهادات الاعظمية الموجودة (الفعلية) قيمة الاجهادالمسموح وذلك قبل ان تبلغ الانتقالات الشاقولية الموجودة قيمة الانتقال المسموح .

بما أن هذا الجائز يعتبر بالنسبة للخشب طويلا لذلك سوف يتم في البداية تحقيق الطلب الثاني ومن اجل ذلك ينبغي ان تتحقق العلاقة التالية :

$$f \leqq zul\ f = \frac{l}{300} = \frac{525}{300} = 1{,}75 \text{ cm}$$

لقد تم في المثال (103) حساب الانتقال الاعظمي لجائز بسيط محمل بحمولة موزعة بانتظام والبالغ:

$$f = \frac{5 \max M \cdot l^2}{48 E I} \leqq 1{,}75 \text{ cm}$$

من هذه العلاقة يتم تعيين عزم عطالة المقطع العرضي اللازم :

$$erf\ I = \frac{5 \max M \cdot l^2}{1{,}75 . 48 . E} = \frac{5 \cdot 8{,}27 \cdot 10^4 \cdot 5{,}25^2 \cdot 10^4}{1{,}75 \cdot 48 \cdot 10^5} = 13600 \text{ cm}^4$$

باختيار المقطع العرضي 12/24 الذي يبلغ عزم عطالته :

$$I = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13800 \text{ cm}^4$$

يرى ان الطلب الثاني اصبح محققاً . يعاد الآن حساب الانتقال الشاقولي الأعظمي الموجود بعد ان تم اختيار المقطع العرضي الذي يبلغ عزم عطالته $I = 13800 \text{ cm}^4$ ، ويتم ذلك اعتماداً على النسبة والتناسب وذلك لان الانتقالات الشاقولية تتناسب عكساً مع عزوم العطالة . من اجل $I = 13600 \text{ cm}^4$ فان الانتقال الشاقولي يبلغ $zul\ f = 1{,}75 \text{ cm}$ والآن يفتش عن الانتقال الشاقولي الأعظمي الذي يتبع عزم العطالة $vorh\ I = 13800 \text{ cm}^4$ وهو يبلغ :

$$vorh\ f = \frac{zul\ I}{vorh\ I}\ zul\ f = \frac{13600}{13800} \cdot 1{,}75 = 1{,}73 \text{ cm} < zul\ f$$

والآن سوف يتم التأكد من تحقيق المقطع العرضي للمطلب الاول . بالاستعانة بالعزم المقاوم :

$$W_{yy} = \frac{I_{yy}}{h/2} = \frac{13800}{12} = 1150 \text{ cm}^2$$

يتم التوصل لمعرفة قيمة اجهاد الانعطاف الأعظمي الموجود :

$$vorh\ \sigma = \frac{\max M}{W_{yy}} = \frac{82700}{1150} = 72 \text{ kp/cm}^2 < zul\ \sigma_b$$

وهذا يؤكد ايضا أن المقطع العرضي 12/24 كاف لتحمل الحمولات المذكورة .

٩ ـ ٤ التأثير الحراري (الفعل الحراري)

عرض قضيب موجود في بداية الأمر تحت تأثير درجة حرارة ثابتة t الى تأثير حراري غير منتظم ، حيث عرضت جهته السفلى الى درجة الحرارة t_u وجهته العليا الى درجة الحرارة t_o عندئذ يتشكل باتجاه المحور z (عرضياً على محور القضيب) توزيعاً حرارياً خطياً يعبر عنه ، بالاستعانة بالقيم التالية :

$$T_0 = \frac{t_0 + t_u}{2} \quad , \quad \Delta t = t_u - t_0 \qquad (9\text{-}21)$$

بواسطة المعادلة الآتية (شكل 9.22) :

$$\overline{t}(z) = T_0 + \frac{\Delta t}{h} z \qquad (9\text{-}22)$$

وبذلك فان التغيير الحراري ، الناتج عن الانتقال من حالة البداية t الى حالة النهاية $\overline{t}(z)$ لأي سطح z=const يبلغ :

$$\overline{t}(z) - t = (T_0 - t) + \frac{\Delta t}{h} z \qquad (9\text{-}23)$$

عندما تكون $\Delta t = 0$ فان الحرارة في كل مكان من القضيب تكون ثابتة ، عندئذ تعاني محاور القضيب (الياف القضيب) استطالات او انكماشات (تقاصرات) مستقلة عن z وذلك حسبما تكون درجة الحرارة المؤثرة أكبر أو أصغر من الصفر . وعندما لا تتغير درجة الحرارة في المستوي z=0 ، اي ان $T_0 = t$ عندئذ يصبح الفرق الحراري :

$$\overline{t}(z) - t = \frac{\Delta t}{h} z \qquad (9\text{-}24)$$

كما أن الاستطالة تبلغ :

$$d\overline{x} - dx = \alpha_t [\overline{t}(z) - t] dx = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} z \, dx \qquad (9\text{-}25)$$

تعاني محاور القضيب (آلياف القضيب) ، الواقعة في المستوي .z=const التي كان طولها dx ، تغيراً نسبياً طولياً (تمدداً) مقداره :

$$\overline{\varepsilon}_{xx}(z) = \frac{d\overline{x} - dx}{dx} = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} z \qquad (9\text{-}26)$$

من هذه العلاقة وبعد اخذ المعادلة (9.1) بعين الاعتبار يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\frac{1}{\rho} = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \tag{9-27}$$

التي تربط بين انحناء القضيب $1/\rho$ وبين الفرق الحراري Δt . تبقى التغييرات (المرنة) من اجل التغييرات الحرارية الصغيرة صغيرة ايضاً بحيث يمكن الكتابة :

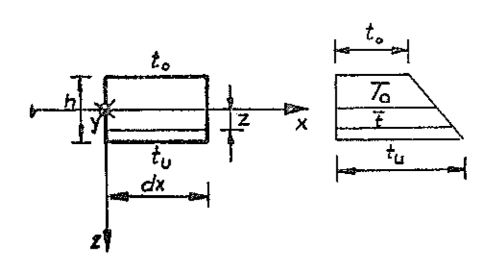
$$\frac{1}{\rho} = -w'' \tag{9-28}$$

وبذلك يتم التوصل لخط الانعطاف الناتج عن تأثير الفرق الحراري ، من خـــلال المعادلة التفاضلية التالية :

$$\bar{w}''(x) = -\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \tag{9-29}$$

عندما يكون عامل التمدد الحراري الخطي (عامل التغير النسبي الخطي الحراري) α_t ثابتاً فان العلاقة السابقة تعطي ، بعد المكاملة المتكررة ، ما يلي :

$$\left.\begin{aligned} \bar{w}'(x) &= -\alpha_t \frac{\Delta t}{h} x + C_1 \\ \bar{w}(x) &= -\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \end{aligned}\right\} \tag{9-30}$$



شكل 9.22

في الجيزان ذات الاستناد المقرر ستاتيكياً يمكن بشكل معين ايجاد ثوابت التكامل التي تظهر في تلك المعادلة . سيتم ايضاح ما ذكر في خلال مثاليين . اما خط الانعطاف الناتـج عن عزم الانعطاف والتغيرات الحرارية دفعة واحـدة فيتم الحصول عليـه بجمـع العلاقتين (9.11) و (9-29) هكذا :

$$w''(x) = -\frac{M}{EI} - \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \qquad (9\text{-}31)$$

٢ ـ ٢ أمثـــلة

مثال 114 :

عرض جائز بارز (ظفر) لتغيير حراري خطي غير منتظم (شكل 9.23) .

المعطى : l , α_t , Δt , h .

المطلوب ، ايجاد خط الانعطاف .

الحل :

معادلة خط الانعطاف وتكاملاتها :

$$\bar{w}'' = -\alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

$$\bar{w}' = -\alpha_t \frac{\Delta t}{h} x + C_1$$

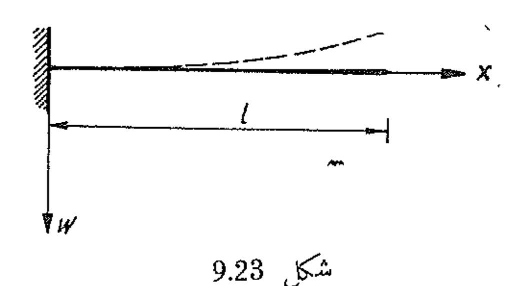
$$\bar{w} = -\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

شروط الاطراف الهندسية :

$$\bar{w}(x=0) = 0 \quad ; \quad \bar{w}'(x=0) = 0$$

بتحقيق العلاقات لشروط الاطراف يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = 0$$



شكل 9.23

خط الانعطاف :

بتبديل ثوابت التكامل يتم الحصول على خط الانعطاف :

$$\overline{w}(x) = -\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{x^2}{2} \tag{9.32}$$

يتشكل الانتقال الشاقولي الاعظمي عند النهاية الحرة للقضيب وهو يبلغ :

$$\overline{w}(x=l) = -\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} \tag{9.33}$$

مثال 115 :

عرض جائز بسيط لتأثير تغيير حراري خطي غير منتظم (شكل 9-24) .

المعطى : $h, \Delta t, \alpha_t, l$.

المطلوب : حساب خط الانعطاف .

الحـــل :

المعادلة التفاضلية لخط الانعطاف وتكاملاتها :

$$\overline{w}''(x) = -\alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

$$\overline{w}'(x) = -\alpha_t \frac{\Delta t}{h} x + C_1$$

$$\overline{w}(x) = -\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

شروط الأطراف الهندسية :

$$\overline{w}(x=0) = 0 \quad , \quad \overline{w}(x=l) = 0$$

بتحقيق العلاقات السابقة لشروط الأطراف يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1 = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} \quad , \quad C_2 = 0$$

بتبديل ثوابت التكامل يتم الحصول على علاقة خط الانعطاف :

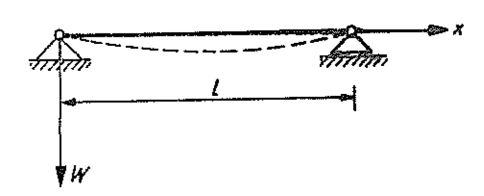
$$\overline{w}(x) = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

يتشكل الانتقال الشاقولي الاعظمي في منتصف الجائز وهو يبلغ :

$$\bar{w}\left(x = \frac{l}{2}\right) = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{8}$$

أما ميل المماس عند كل من نقطتي الاستناد فيساوي :

$$\bar{w}'(x=0) = -\bar{w}'(x=l) = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} \qquad (9\text{-}34)$$



شكل 9 24

يلاحظ من هذين المثالين بأن تعرض الجيزان ذات الاستناد المقرر ستاتيكياً الى تأثير تغيير حراري يؤدي الى تشكل خط انعطاف ولكنها تبقى بالرغم من ذلك خالية من الاجهادات . نتيجة اعاقة التغييرات الناتجة عن التأثير الحراري تتشكل في الجيزان ذات الاستناد غير المقرر ستاتيكياً اجهادات حرارية . سيشار لطريقة تعينها من خلال المثالين التاليين .

مثـال 116 :

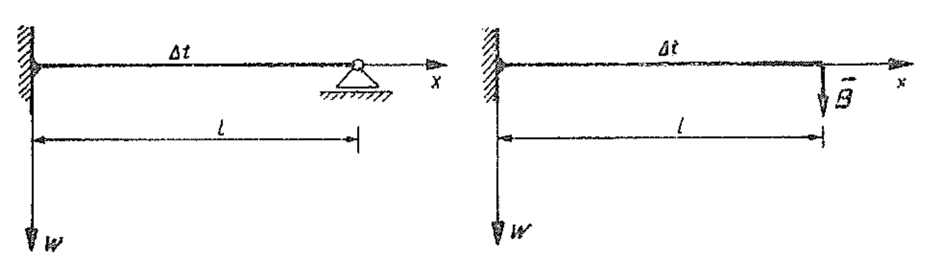
عرض جائز موثوق من طرف ومفصلي متحرك أفقياً من الطرف الآخر ومقطعه العرضي ثابت ، الى تأثير تغيير حراري غير منتظم على طوله . ان الفرق الحراري بين الجهة السفلى والجهةالعليا هو Δt (شكل 9-25a) .

المعطى : $h , \Delta t , \alpha_t , l$.

المطلوب : حساب الاجهادات المتشكلة عن التأثير الحراري غير المنتظم (الاجهادات الحرارية).

الحـــل :

لحساب الاجهادات الحرارية المتشكلة ، يحذف المسند الأيمن المتحرك أفقياً ويستعاض عنه برد فعله الشاقولي $\bar{B}$ (شـكل 9 25b) ، عنـــدئذ يبلغ الانتقال الشاقولي لنهـــاية القضيب التي



شكل 9-25

أصبحت الآن حرة (نهاية جائز بارز) نتيجة للتأثير الحراري Δt حسب العلاقة (9.33) كما يلي :

$$-\alpha_l \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2}$$

كما أن هذه النهاية (. نقطة النهاية الحرة) سوف تقوم أيضاً بانتقال شاقولي نتيجة لتأثير قوة رد الفعل $\bar{B}$ لوحدها على الجائز البارز وهو يساوي حسب العلاقة (C من المثال 100) القيمة التالية :

$$\bar{B} \frac{l^3}{3 \, EI_{yy}}$$

لعدم سماح المسند المتحرك أفقياً لنهاية القضيب (الفعلي) المتصلة فيه من القيام بالحركةالشاقولية يتم التوصل للشرط الهندسي التالي :

$$-\alpha_l \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} + \bar{B}\frac{l^3}{3 \, EI_{yy}} = 0$$

من هذه العلاقة يتم تعيين رد الفعل $\bar{B}$:

$$\bar{B} = \frac{3}{2} \frac{E \, I_{yy}}{l} \alpha_l \frac{\Delta t}{h}$$

بتطبيق شرط توازن العزوم على الجزء الايمن المقتطع من الجائز يتم الحصول على العلاقة الآتية :

$$\bar{M}_y (x) + \bar{B} (l - x) = 0$$

منها يتم التوصل لعزم الانعطاف (ممثلاً على شكل تابع) :

$$\overline{M}_y'(x) = -\frac{3}{2}\,\frac{E\,I_{yy}}{l}\,\alpha_t\,\frac{\Delta t}{h}\,(l - x)$$

وبذلك تبلغ الاجهادات الحرارية القيمة التالية :

$$\sigma_{xx}\ (x\ ,\ z) = \frac{\overline{M}_y\ (x)}{I_{yy}}\,z = -\,\frac{3}{2}\,\frac{E\,\alpha_t}{l}\,\frac{\Delta t}{h}\,(l - x)\ z$$

من هذه العلاقة يستخلص الى ان جهة القضيب ذات درجة الحرارة المنخفضة تتشـكل فيها اجهادات شد . بجمع خط الانعطاف الناتج عن القوة $\overline{B}$:

$$\frac{\overline{B}\,l^3}{6\,E\,I_{yy}}\,\frac{x^2}{l^2}\left(3\,-\,\frac{x}{l}\right)$$

والانتقال الشاقولي الناتج عن التأثير الحراري Δt :

$$-\alpha_t\,\frac{\Delta t}{2}\,\frac{x^2}{h}$$

يتم التوصل الى خط انعطاف الجائز النهائي ممثلا بالعلاقة التالية :

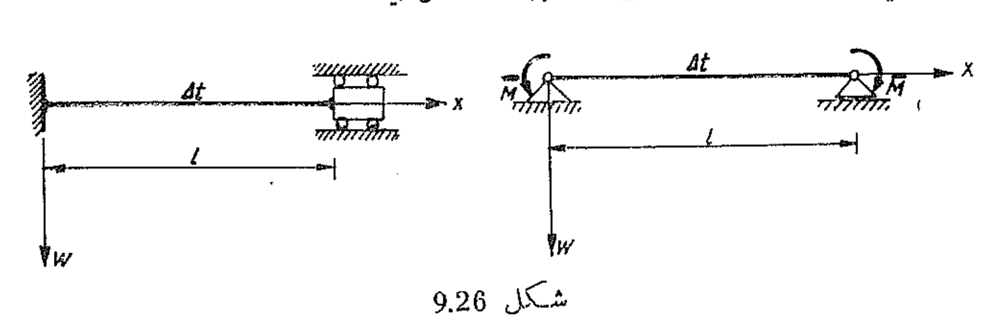
$$w\ (x) = \frac{l^2}{4}\,\alpha_t\,\frac{\Delta t}{h}\,\frac{x^2}{l^2}\left(1\,-\,\frac{x}{l}\right)$$

مثـال 117 :

عرض جائز موثوق من كلا طرفيه ومقطعه العرضي ثابت الى تأثير تغيير حراري خطي غـير منتظم بحيث يكون Δt هو الفرق الحراري بين الجهة السفلى والجهة العليا (شكل 9.26a).

المعطى : $h\ ,\ \Delta t\ ,\ \alpha_t\ ,\ l$.

المطلوب : ايجاد خط الانعطاف وتعيين الاجهادات الحرارية .



شكل 9.26

الحـل :

لحل هذه المسألة غير المقررة ستاتيكياً يستعاض عن الوثاقات بمفاصل ثم تؤثر في تلك المفاصـل بعزوم الوثاقة $\overline{M}$ الفعلية (شكل 9-26 b) . نتيجة للتأثير الحراري الخطي غير المنتظم لوحده تقوم الماسات لنهايات القضيب حسب العلاقة (9-36) بالدورانات :

$$\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} \qquad \text{وكذلك} \qquad - \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2}$$

بينما تقوم نفس الماسات نتيجة تأثير عزوم الوثاقـــة $\overline{M}$ لوحدها ، حسب العلاقة (9 20 a) بالدورانات .

$$- \frac{\overline{M}\, l}{2\, E\, I_{yy}} \qquad \text{وكذلك} \qquad \frac{\overline{M}\, l}{2\, E\, I_{yy}}$$

لعدم سماح المساند الموثوقة في الحائز الفعلي لنهايات القضبان بالدوران ينبغي اذاً أن يتـــحقق الشرط الهندسي :

$$\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} - \frac{\overline{M}\, l}{2\, E\, I_{yy}} = 0$$

ومنه يتم التوصل لعزوم الوثاقة :

$$\overline{M} = E\, I_{yy}\, \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

التي تؤدى في القضيب الى توزيع عزم انعطاف ثابت :

$$\overline{M}_y \; (x) = - \overline{M} = - E I_{yy} \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

وبذلك فان الاجهادات الحرارية تبلغ :

$$\overline{\sigma}_{xx}(z) = - E\, \alpha_t \frac{\Delta t}{h} z$$

ان هذه الاجهادات مستقلة عن x . تتشكل في الجهـة ذات الحرارة المنخفضة اجهـادات شادة بجمع (بتنضد) الانتقالات الشاقولية :

$$- \frac{\overline{M} l^2}{2EI_{yy}} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

و

$$\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

وبذلك يتم التوصل لخط الانعطاف :

$$w(x) = 0$$

٩ ـ ٦ طريقة التحميل بمخططات العزوم (استخدام مطابقة مور لايجاد خط الانعطاف حسابياً)

لقد استخرجت في علم سكون الاجسام الحاملة علاقات تربط بين شدة الحمولة الموزعة وبين القوة العرضية وعزم الانعطاف والتي سيتم فيما يلي اعادة كتابتها :

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad ; \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

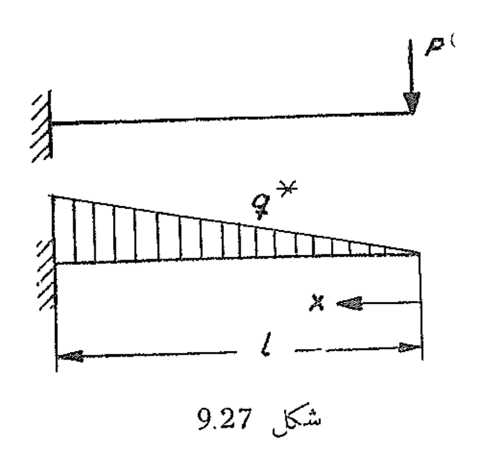
كما قد تم هناك أيضاً بحث طرائق ايجاد القوة العرضية وعزم الانعطاف انطلاقاً من الحمولة ، حسابياً (تحليلياً) وتخطيطياً . بامعان النظر في العلاقتين التاليتين :

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x) \tag{9.34}$$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \tag{9-35}$$

يتبين بوضوح التطابق الرياضي بينهما عندما توجد هناك طريقة سهلة يمكن بواسطتها انطلاقاً من الحمولة q حساب القوة العرضية Q وعزم الانعطاف M ، فلابد اذاً من وجود طريقة يمكن تطبيقها لحساب خط الانعطاف (الخط المرن) اعتماداً على M/EI المعلومة . تنص هذه الطريقة على انه يكفي الاستعاضة في المعادلة (9.34) عن الحمولة q بحمولة وهمية $q^* = M/EI$ ثم اتباع نفس الطريق الذي تم اتباعه في علم السكون ، للتمكن هنا أيضا من حساب قيم القطع الوهمية Q^* و M^* التي تتشكل في النقطة ذات الاحداثي x من الجائز (والتي تنتج كما ذكر عن تطبيق الحمولة الوهمية q^*) . ان العزم الوهمي M^* الذي يتم الحصول عليه ، هو حسب

العلاقة (9.35) نفس الانتقال الشاقولي في النقطة x من الجائز ، كما ان القوةالعرضية الوهمية Q^* في النقطة x تساوي ميل المماس على خط الانعطاف في تلك النقطة . يسمى التطابق الموجود بين المعادلتين (9.34) و (9.35) **بتطابق مور** وعليه يرتكز بناء الطريقة الحسابية والطريقة التخطيطية لتعيين خط الانعطاف . ستتم في البداية معالجة الطريقة الحسابية فقط . يفضل استخدام هذه الطريقة عندما يكون الانتقال الشاقولي في أمكنة معينة من الجائز هو المطلوب ايجاده ، لكن عندما يكون خط الانعطاف بكامله هو المطلوب تعيينه يفضل اتباع الطريق التخطيطي . لتسهيل تعلم طريقة مطابقة مور سوف يلجأ لبعض الأمثلة مع اعطاء بعض الاضافات والملاحظات التي تخص شروط الاطراف . لايجاد خط انعطاف الجائز الممثل في الشكل (9.27) سوف يلجأ مبدئياً لتحميل الجائز الفعلي بالحمولة الوهمية $q^* = M/EI$. حسب ما ذكر أنفاً ينبغي ان يكون العزم M^* في النقطة x الذي يتشكل نتيجة لتطبيق هذه الحمولة ، مساوياً للانتقال الشاقولي w في تلك النقطة .



شكل 9.27

لانعدام العزم الوهمي M^* في النقطة $x=0$ من الجائز الممثل في الشكل (9.27) ، ينبغي ايضاً ان ينعدم الانتقال الشاقولي في تلك النقطة ، لكن هذا مناف للواقع وهو غير صحيح وبما أن للعزم الوهمي M^* في النقطة $x=l$ قيمة (أي لا يساوي الصفر) ينبغي اذاً وجود انتقال شاقولي هناك وهذا أيضاً مناف للواقع وغير صحيح . بسبب هذه التناقضات يستنتج أن تحميل الجائز الفعلي بالحمولة الوهمية q^* لا يؤدي لخط الانعطاف مما يتطلب اعادة النظر فيه والتفتيش عن الطريق الصحيح ما دام المبدأ صحيحاً . ان السبب في كل هذه التناقضات والاخطاء يعود الى ان شروط اطراف المعادلة (9.34) تختلف عن شروط اطـــراف المعادلة (9.35) ، لذلك ينبغي تطبيق الحمولة الوهمية q^* على جائز وهمي تتطابق شروط أطرافه مع شروط اطراف خط

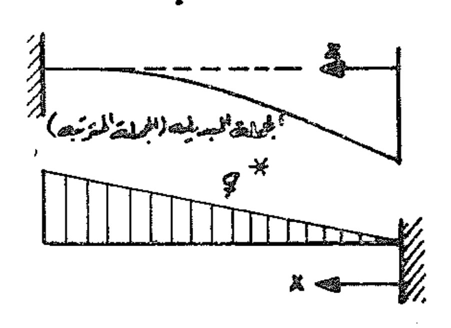
الانعطاف (ويسمى **جائز الاستعاضة** أو الجائز البديل) . فمثلاً ينبغي ان تتحقق في جائزالاستعاضة العائد للجائز المثل في الشكل (9-27) شروط الاطراف التالية :

$x = 0 \;:\; M^* \neq 0$ أي $w \neq 0$

$x = 0 \;:\; Q^* \neq 0$ أي $w' \neq 0$

$x = l \;:\; M^* = 0$ أي $w = 0$

$x = l \;:\; Q^* = 0$ أي $w' = 0$



شكل 9-28

يرى بوضوح ان جائز الاستعاضة المثل في الشكل (9-28) يحقق شروط الاطراف المذكورة . يشير الشكل (9-29) لبعض جيزان الاستعاضة .

نتيجـــة :

ان خط انعطاف قضيب مستقيم يساوي خط عزم الانعطاف لجملة الاستعاضة (M^*) عندما تحمل بحمولة وهمية (q^*) تتألف من حاصل قسمة عزم انعطاف القضيب على صلابته على الانعطـاف ($q^* = M/EI$) .

لتعيين جائز الاستعاضة يفضل اتباع الملاحظات التالية :

الجملة الفعلية	جملة الاستعاضة (الجملة البديلة)
الانتقال الشاقولي w	عزم الانعطاف M
ميل المماس على خط الانعطاف w'	القوة العرضية $Q = M'$
القيمة السالبة لتغيير المماس لكل واحدة طول من القضيب $-w'' = \frac{M}{EI}$	حمولة محور القضيب لكل واحدة طول من محور القضيب $-M'' = q$
قفزة في الانتقال الشاقولي	تأثير عزم وحيد

خط الانعطاف w للجملة الفعلية

P P max w $\varphi \neq 0$

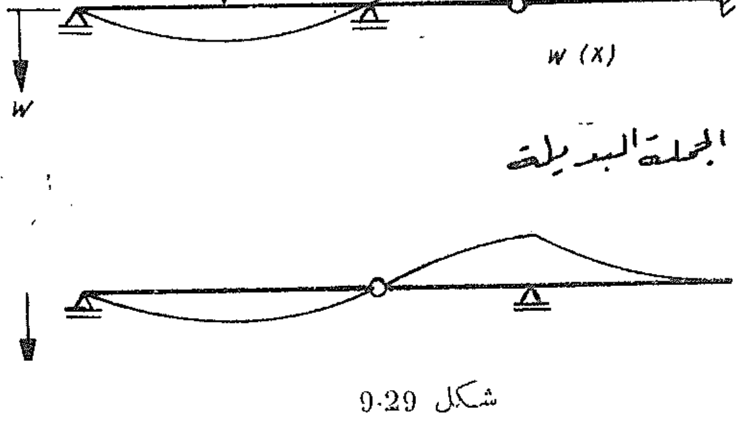
$w = 0$ $\varphi \neq 0$ w $w = 0$ $\varphi = 0$

خط عزم الانعطاف η للجملة البديلة

max η $\eta' \neq 0$

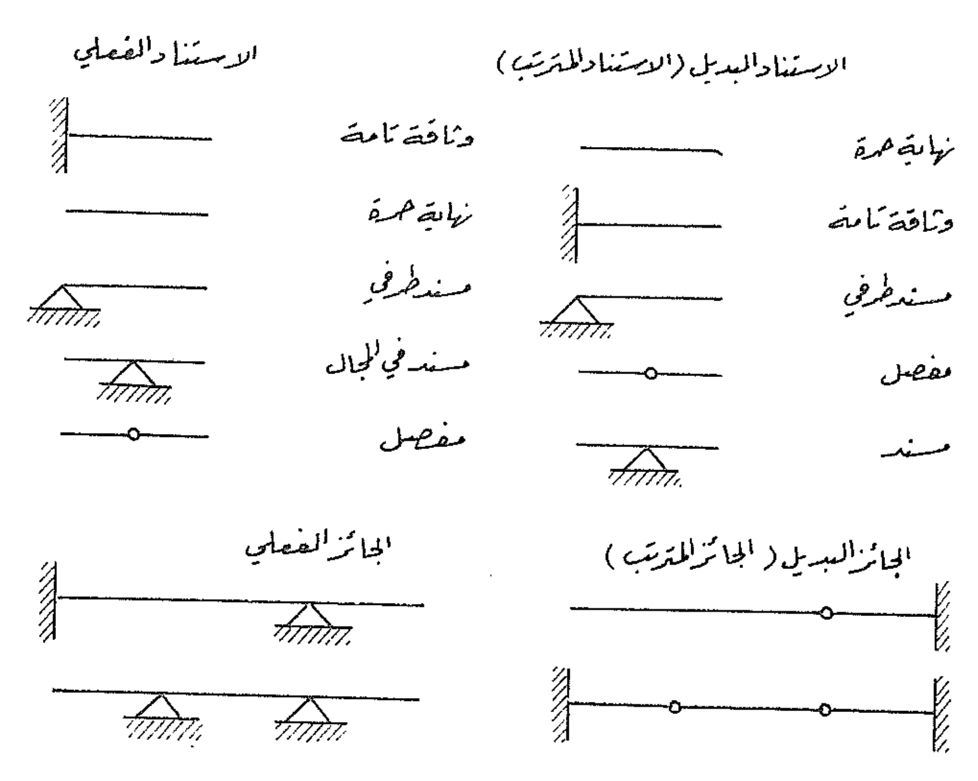
$\eta = 0$ $\eta' \neq 0$ η $\eta = 0$ $\eta' = 0$

الجملة الفعلية



شكل 9.29

يتم تعيين شروط الاطراف بشكل عام من خلال نوع مساند الجائز وبذلك يمكن القـول بأن مسنداً معيناً من الجائز الفعلي يقابل مسنداً معيناً من جائز الاستعاضة . لقـد تم في الشكل (9.30) تمثيل أهم مساند جائز الاستعاضة كما تم هناك أيضاً رسم بعض جمل الاستعاضة .



شكل 9.30

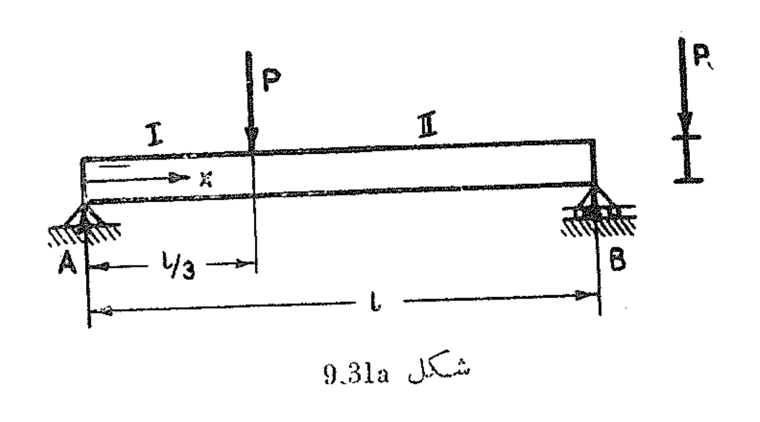
ينبغي دائماً الانتباه الى ان الحمولة الوهمية *q لاتطبق على الجملة الفعلية بل على جملة الاستعاضة . لتنظيم إشارة العزم تستخدم هنا أيضاً نفس الطريقة المتبعة في علم السـكون . اذا تم الحصول على عزم انعطاف موجب عندئذ ينبغي أن تتجه *q باتجاه الانتقال الشاقولي w الموجب وهـذا يعني ، حسب الطريقة المتبعة في هذا الكتاب ، أنها تتجه الى الاسفل . لتفادي الوقوع في خطأ يفضل رسم اشارة (إتجاه) *q على مخطط جائز الاستعاضة .

مثـال 117 :

حمل جائز بسيط مسند في النقطتين a , b بحمولة وحيدة P (شكل 9,31a) .

المعطى : P , l , EI=const. .

المطاوب : حساب الانتقال الشاقولي عند نقطة تطبيق القوة الوحيدة باتباع طريقة التحميل بمخطط العزم (طريقة مطابقة مور) .



شكل 9.31a

الحـل :

يحسب في البداية توزيع عزم الانعطاف في الجائز الفعلي :

$$A = \frac{2}{3}\ P \quad , \quad B = \frac{1}{3}\ P$$

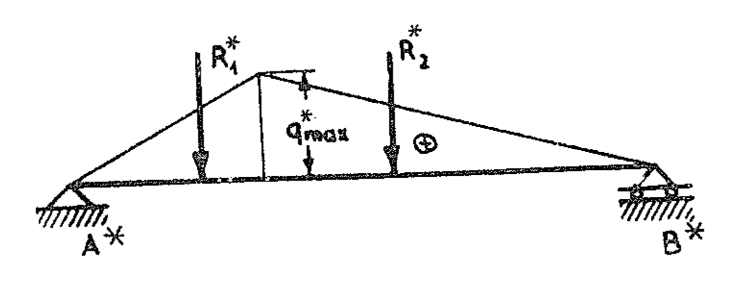
$$M_1 = \frac{2}{3}\ Px \qquad ; \quad 0 \leqq x \leqq \frac{l}{3}$$

$$M_2 = Ax - P\left(x - \frac{l}{3}\right) = \frac{p\,l}{3} - \frac{P\,x}{3}\ ; \qquad \frac{l}{3} \leqq x \leqq l$$

بالطبع يتشكل عزم الانعطاف الاعظمي عند نقطة تطبيق القوة $x=l/3$ وهو يساوي :

$$\max M = \frac{2}{9}\ P\,l$$

يحمل جائز الاستعاضة (الجائز البديل) بسطح العزم وتعتبرعليه كحمولة جديدة (شكل 9.31 b).



شكل 9.31 b

تبلغ القيمة العظمى لشدة الحمولة الوهمية :

$$\max q^* = \frac{\max M}{E I} = \frac{2 P l}{9 E I}$$

لحساب ردود أفعال المساند في جائز الاستعاضة ، تستبدل الحمولة الخطيـــة المثلثية بالمحصلات R^*_2 , R^* :

$$R^*_1 = \frac{1}{3} \frac{\max q^*}{2} = \frac{P l^2}{27 EI}$$

$$R^*_2 = \frac{2 l}{3} \frac{\max q^*}{2} = \frac{2 P l^2}{27 EI}$$

اما ردود افعال المساند فيتم الحصول عليها بتطبيق شروط التوازن :

$$\Sigma M_a = 0 : \quad B^* l - R_2^* \frac{5 l}{9} - R_1^* \frac{2 l}{9} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : A^* + B^* - R_1^* - R_2^* = 0$$

بحل هاتين المعادلتين ينتج :

$$B^* = \frac{4}{81} \frac{P l^2}{E I} = w'_b$$

$$A^* = \frac{5}{81} \frac{P l^2}{E I} = w'_a$$

هذه القيم تمثل في نفس الوقت ميل المماسات على خط الانعطاف عند نقاط الاستناد . انالانتقال الشاقولي في النقطة $x=l/3$ من الجائز الفعلي المحمل بالحمولة q يساوي عزم الانعطاففي النقطة المقابلة لتلك النقطة من جائز الاستعاضة المحمل بالحمولة q^* :

$$w\left(x = \frac{l}{3}\right) = M^*\left(x = \frac{l}{3}\right) = A^* \frac{l}{3} - R_1^* \frac{l}{9} = \frac{5}{243} \frac{Pl^3}{E I} - \frac{1}{243} \frac{Pl^3}{E I}$$

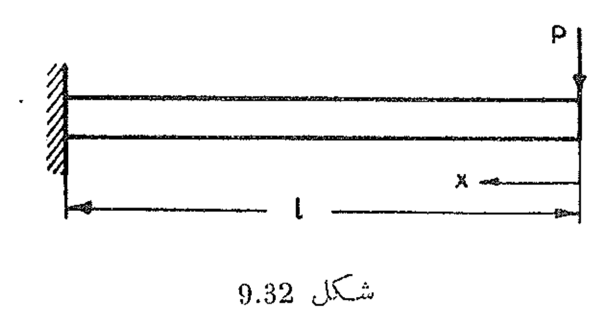
$$w\left(x = \frac{l}{3}\right) = \frac{4}{243} \frac{P l^3}{E I}$$

مثـال 118 :

حمل جائز بارز (ظفر) بقوة وحيدة P تؤثر على نهايته الحرة (شكل 9.32) .

المعطى : P , l , $EI=const.$.

المطلوب : ايجاد معادلة خط الانعطاف (الخط المرن) بالاستعانة بمطابقة مور .



شكل 9.32

الحل :

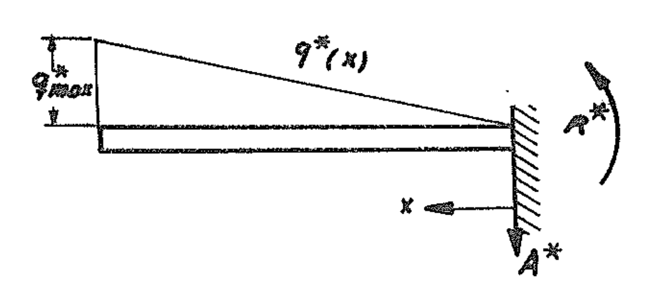
ان الانتقال الشاقولي في النقطة x ، حسب مطابقة مور ، يساوي عزم الانعطاف المتشكل في تلك النقطة من جائز الاستعاضة والناتج عن تحميله بالحمولة الوهمية :

$$q^*(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

بالاستعانة بالعزم $M(x)=-Px$ يتم التوصل للحمولة الوهمية :

$$q^*(x)=-\frac{Px}{EI}$$

تطبق هذه الحمولة على جائز الاستعاضة العائد للجائز الفعلي (شكل 9.33) .



شكل 9.33

يتم اجراء بقية الحساب تماماً كما في المسائل الستاتيكية المدروسة في علم السكون . لتعيين تابع خط انعطاف الجائز الفعلي ، ينبغي حساب توزيع عزم الانعطاف الناتج عن الحمولة الوهمية q^*

لجائز الاستعاضة الممثل في الشكل (33 9) . أما الناتج عن ذلك الحساب فهو الانتقال الشاقولي.
تبلغ ردود أفعال المساند في جائز الاستعاضة :

$$A^* = \frac{1}{2} \max\ q^* \, l \quad , \quad M_a{}^* = \max q^* \cdot \frac{1}{2} \frac{2\,l}{3}$$

بتبديل :

$$\max\ q^* = \frac{P\,l}{E\,I}$$

في العلاقات السابقة يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$A^* = \frac{P\,l^2}{2\,EI} \quad , \quad M_a{}^* = \frac{P\,l^3}{3\,EI}$$

بما أن $M_a{}^*$ هو عزم الانعطاف عند النقطة $x=0$ من جائز الاستعاضة الناتج عن تحميله بالحمولة q^* فهو يمثل إذاً في نفس الوقت الانتقال الشاقولي في تلك النقطة . وبما ان A^* هي القـــوة العرضية عند النقطة $x=0$ الناتجة عن تحميل جائز الاستعاضة بالحمولة q^* فهي تمثـــل إذاً في نفس الوقت ، حسب مطابقة مور ، ميل المماس على خط الانعطاف عنـــد النهاية الحرة للجائز الفعلي . يبلغ توزيـع العزم (تابـع العزم) الناتج عن تأثير q^* :

$$M^*(x) = M_a{}^* - A^* x + q^* \frac{x}{2} \frac{x}{3} = w(x) \quad , \quad q^* = \frac{Px}{E\,I}$$

$$w(x) = \frac{P\,l^3}{3\,E\,I} - \frac{P\,l^2}{2\,EI} x + \frac{P\,x^3}{6\,E\,I}$$

٩ ـ ١٠ اجراء مطابقة مور تخطيطياً

يفضل تعيين خط انعطاف الجيزان المعقدة بواسطة الطريقة التخطيطية . ان وجـه الاختلاف الوحيد بين هذه الطريقة وبين الطريقة التحليلية المشتقة عن مطابقة مور هو أن عزوم الانعطاف هنا تعيين بواسطة مضلع القوى والمضلع الحبلي بينما تعين هناك بواسطة الطرق التحليلية المعتادة (طريقة القطع أو طريقة العلاقات التفاضلية) . لقد أضحت الطريقة التخطيطية لايجـاد خط الانعطاف التي سنقوم بشرحها آنفاً بالنسبه لطريقة الماتريسات (التي يفضـــل استعمالها في حالة توفر حاسب الكتروني) طريقة قديمة ولكنها بالرغم من ذلك ما تزال تستعمل بكثرة . تفترض

هنا معرفة انشاء المضلع الحبلي ومضلع القوى بشكل جيد . فما يلي سوف يتم تمثيل خطوات الحل وبالامكان تتبعها من خلال الامثلة (119 حتى 123) :

١ ـ يرسم الجائز المعطى بمقياس معين • يستعاض عن الحمولات الموزعة بحمولة أو عدة حمولات وحيدة . يختار مقياس للاطوال يرمز له بالرمز m_L (المقياس = الطول المرسوم / الطول الفعلي) على سبيل المثال فان المقياس $m_L = 1/10$ يعني أن 1 cm في الرسم يكافيء 10 cm في الحقيقة .

٢ ـ يرسم مضلع القوى للحمولات المعطاة . ترسم هذه القوى بمقياس قوى يرمز له بالرمز m_k على سبيل المثال $m_k = 1$ cm/100 kp .

٣ ـ يختار لمخطط القوى قطباً ، بعد ذلك ترسم الاشعة القطبية . يرمز لبعد القطب عن القوى بالرمز H_1 . ترقم الاشعة القطبية ابتداء من الصفر وإلى الاعلى .

٤ ـ يرسم المضلع الحبلي ، هذا يعني أن الاشعة القطبية تنقل الى مخطط المكان .

ملاحظة : كل شعاع قطبي يصل ، في مخطط المكان ، بين حاملي قويين مع بعض فانه يمر ، في مضلع القوى ، من نقطة تقاطعها .

أخيراً يرسم خط الاغلاق . اثناء القيام بذلك ينبغي الانتباه إلى وجوب كون عزم الانعطاف في نهايات الجائز (عندما لا تؤثر هناك عزوم وحيدة) وفي المفاصل مساويا للصفر ، أي أن تراتيب المضلع الحبلي الواقعة تحتها (والتي تكافئها) مساوية للصفر ، كما ينبغي الانتباه إلى أن خط الاغلاق بين المساند يتم دائماً بشكل خطي . إن السطح المحصور بين خط الاغلاق وبين الاشعة القطبية هو سطح العزم . لتعيين إشارة العزم تختار نقطة ما من الجائز يسهل معرفة إشارتها بالايضاح ، ثم ترسم هذه الاشارة على المخطط .

٥ ـ يحمل جائز الاستعاضه بسطح العزم الذي تم الحصول عليه ويعتبر كحمولة وهمية q^* . يعيين الآن توزيع العزم في جائز الاستعاضة الناتج عن تحميله بالحمولة الوهمية q^* وهو يساوي حسب مطابقة مور الانتقال الشاقولي w للجائز الفعلي . سوف يدخل العامل EI فيما بعد بعين الاعتبار .

٦ ـ يقسم سطح الحمولة الوهمية الى سطوح جزئية ثم تعيين مساحاتها . يختار مقياس للسطوح m_F . تؤخذ مساحة كل سطح جزئي وتعتبر كقوة وحيدة تؤثر على جائز الاستعاضة ، في مركز ثقل ذلك السطح الجزئي (على سبيل المثال مساحة السطح الاول F_1 تطبق كقوة وحيدة

في مركز ثقل السطح الجزئي الاول والخ) . إذا كان العزم موجباً (حمولة جائز الاستعاضة الوهمية) ينبغي ان تكون القوى الوحيدة المكافئة لها موجبة ايضاً وهذا يعني أن ترسم أشعة القوى بالاتجاه الموجب للانتقال w .

٧ - يرسم مضلع قوى ، للقوى الوهمية الوحيدة ، تماما كما تم في الخطوة ٢ - ويختار له قطباً بعده هو H_2 (H^*) ثم ترسم الاشعة القطبية وترقم .

٨ - يرسم المضلع الحبلي وخط الاغلاق تماما كما تم في الخطوة ٤ - .

٩ - ان تراتيب المضلع الحبلي الذى تم الحصول عليه في الخطوة السابقة هي الانتقالات الشاقولية للجائز (دون النظر لمقاييس الرسم) .

يظهر الخط المرن في الرسم كمضلع منكسر وذلك بسبب الاستعاضة عن الحمولات الوهمية الموزعة بحمولات وحيدة . يزداد التطابق بين المضلع الذي يتم الحصول عليه وبين خط الانعطاف كلما ازداد عدد السطوح الجزئية الناتجة عن تقسيم سطح التحميل الوهمي .

يتحقق الانتقال الشاقولي بدقة على حدود السطوح الجزئية (الحدود الواقعة بين السطوح الجزئية) وذلك لتساوي العزم الناتج عن الحمولة الموزعة والعزم الناتج عن الحمولات الوحيدة هناك . كما تتحقق هناك ايضاً ميول المماسات على خط الانعطاف . يرمز للانتقال الشاقولي المقروء من الرسم بالرمز s_w وبذلك يتم الحصول على الانتقال الشاقولي الفعلي بتقسيم تلك القيمة على مقياس الرسم m_w :

$$\left.\begin{aligned} m_w &= \frac{m_L{}^3 m_k m_M EI}{H_1\,H_2} = (m_M{}^*) \\ w &= \frac{s_w}{m_w} \end{aligned}\right\} \qquad (9\ 36)$$

يتم الحصول على الميل الحقيقي للماس على خط الانعطاف بتقسيم القوة العرضية المقروءة من الرسم والتي سيرمز لها بالرمز s'_w بمقياس الرسم m'_w :

$$\left.\begin{aligned} m_w{}' &= \frac{m_L{}^2 m_k m_F EI}{H_1} \\ w' &= \frac{s_w{}'}{m_w{}'} \end{aligned}\right\} \qquad (9.37)$$

سوف يتم البرهان على صحة المعادلات (9.36) و (9.27) في المثال 123 .

مثـال 119 :

حمل جائز بسيط ، مقطعه العرضي مستطيل الشكل ومسند في النقطتين a , b بحمولتين P_1 و P_2 شكل (9 34a).

المعطى :

$b = 2$ cm , $P_2 = 350$ kp , $P_1 = 250$ kp , $l_2 = 60$ cm , $l_1 = 20$ cm, $l = 100$cm, . $E = 2,1 \,.\, 16^6$ kp/cm^2 , $h = 3$cm ,

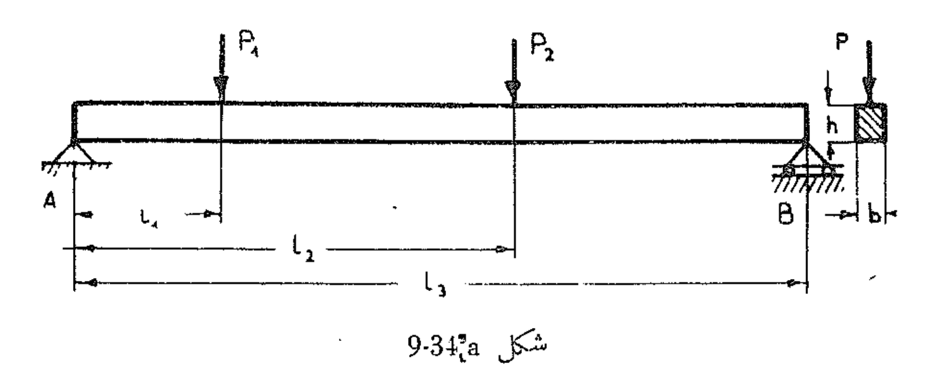
المطلوب : تعيين

١ ـ خط الانعطاف (الخط المرن) .

٢ ـ الانتقال الشاقولي الاعظمي .

٣ ـ ميل المماس على خط الانعطاف عند نقاط الاستناد .

باستخدام طريقة مور التخطيطية .



شكل 9-34a

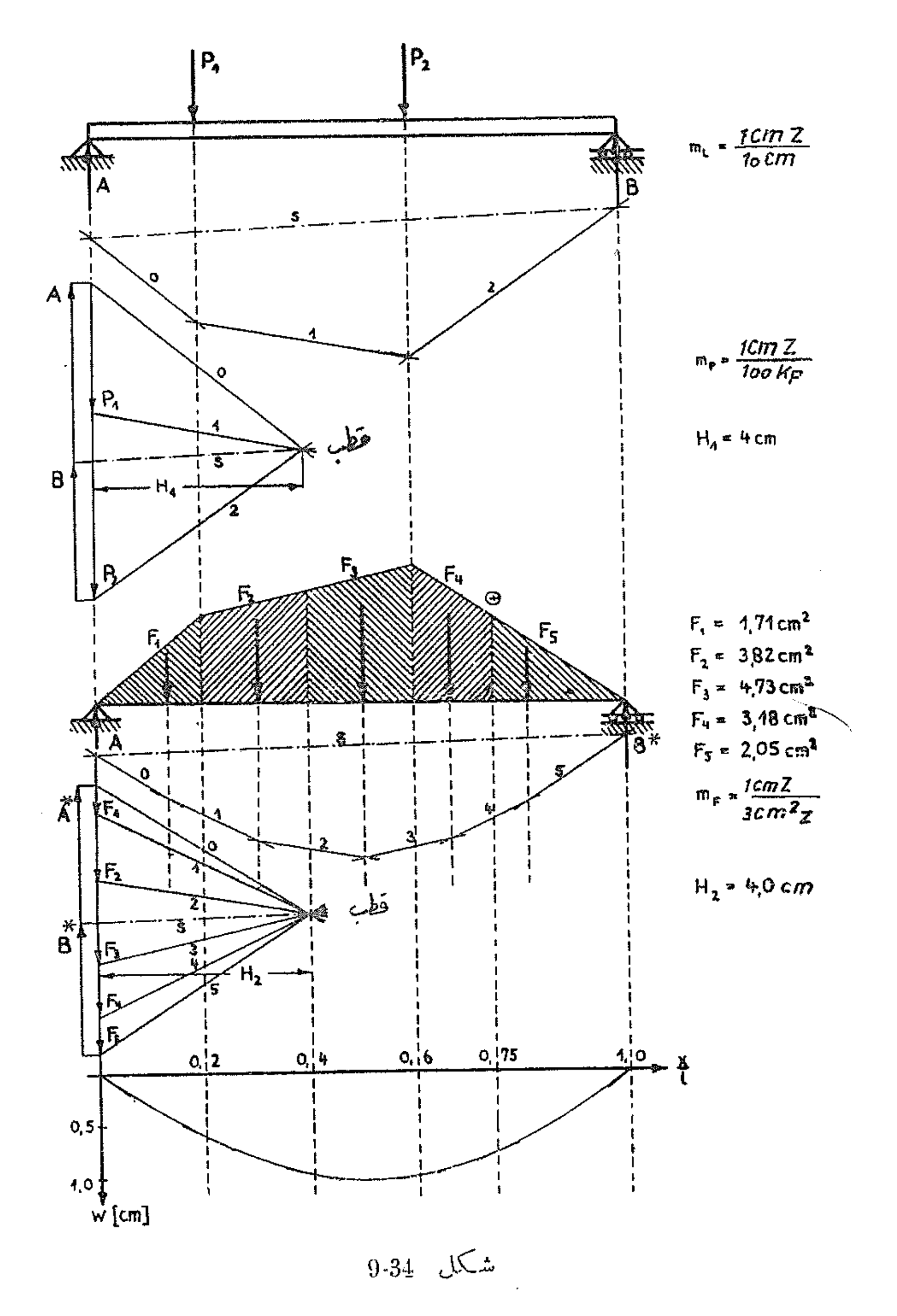
الحل :

لقد تم في الشكل (9.34) انشاء خط الانعطاف باستخدام مطابقة مور . يبلغ مقياس الانتقال الشاقولي في هذه الحالة (العلاقة 9 36) القيمة التالية :

$$m_w = \frac{m_L{}^3\; m_k\; m_F\; E\,I}{H_1\; H_2} = \frac{2.1 \,.\, 10^6 \,.\, 2 \,.\, 3^3}{10^3 \,.\, 100 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 4 \,,\, 12}\; \frac{cm\ Z}{cm}$$

(حيث تعني cm Z واحد سنتيمتر في الرسم). كما يبلغ مقياس ميل المماس على خط الانعطاف (العلاقة 9 37) القيمة الآتية :

$$m'_w = \frac{m_L{}^2\; m_k\; m_F\; E\,I}{H_1} = \frac{2,1 \,.\, 10^6 \,.\, 2 \,.\, 3^3}{10^2 \,.\, 100 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 12} \qquad cm\ Z$$



شكل 9-34

من الشكل (9.34) تقرأ قيمة الانتقال الشاقولي الاعظمي :

$$\max\ s_w = 2{,}05 \quad cm\,Z$$

وبذلك يبلغ الانتقال الشاقولي الاعظمي القيمة التالية :

$$\max w = \frac{\max s_w}{M_w} = 2{,}05 \cdot 0{,}51 = 1{,}04 \text{ cm}$$

ان ميل الماس على خط الانعطاف عند نقاط الاستناد يساوي القوة العرضية الوهمية في تلك النقاط مقسومة على مقياس الرسم m'_w . كما ان القوى العرضية الوهمية عند النقاط b , a تساوي ردود افعال المساند الوهمية . تؤخذ ردود أفعال المساند A^* , B^* من مضلع القوى الوهمي الذي تم رسمه من أجل القوى الوهمية F_1 حتى F_5 . يبلغ ميل الماس على خط الانعطاف عند النقاط b , a القيمة التالية :

$$s_{wa}' = 2{,}6 \text{ cm Z} \quad ; \quad s_{wb}' = 2{,}5 \text{ cm Z}$$

بالاستعانة بمقياس الرسم m'_w يتم اذاً الحصول على ميل الماس على خط الانعطاف عندنقاطالاستناد :

$$w_a' = \frac{s_{wa}'}{m_w'} = 2{,}6 \cdot 0{,}0127 = 0{,}033 \quad ; \; w_a' = 1{,}89^\circ$$

$$w_b' = \frac{s_{wb}'}{m_w'} = 2{,}5 \cdot 0{,}0127 = 0{,}032 \quad ; \; w_b' = 1{,}83^\circ$$

مثال 120 :

حمل الجائز المفصلي الممثل في الشكل (9.35) بحمولتين وحيدتين P_1 , P_2 وبحمولة موزعة بانتظام q تؤثر على رقعة من الجائز .

المعطى :

$l_5 = 300$ cm , $l_4 = 240$ cm , $l_3 = 165$ cm , $l_2 = 45$ cm , $l_1 = 30$ cm

. $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kp/cm^2 , $q = 13{,}5$ kp/cm , $P_2 = 1000$ kp , $P_1 = 500$ kp ,

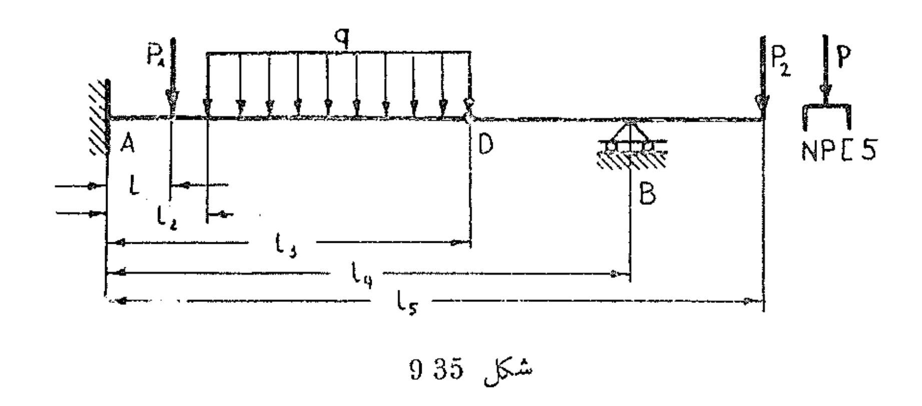
المطلوب : تعيين

١ ـ خط الانعطاف (الخط المرن) .

٢ ـ الانتقال الشاقولي عند نقطة التمفصل d .

٣ ـ ميل الماس على خط الانعطاف عند نقطة التمفصل d .

باستخدام طريقة مور التخطيطية .



شكل 9 35

الحـل :

تبلغ محصلة القوة الموزعة q القيمة التالية :

$$R = q\,(l_3 - l_2) = 13{,}5 \,.\, 120 = 1620 \text{ kp}$$

سوف يتم تقسيم هذه الحمولة الى قوتين وحيدتين متساويتين هما :

$$R_1 = 810{,}0 \text{ kp} \quad ; \quad R_2 = 810{,}0 \text{ kp}$$

بالاستعانة بالقوى P_1 , P_2 , R_1 , R_2 سوف يتم رسم خط الانعطاف باستخدام مطابقة مور (شكل 9.36) .

بتبديل مقاييس الرسم المستخدمة في الشكل (9.36) في العلاقات (9.36) , (9.37) يتم تعيين مقياس الانتقال الشاقولي ومقياس ميل المماس :

$$m_w = \frac{m_L{}^3\, m_k\, m_F\, E\,I}{H_1\, H_2} = \frac{2.1\,.\,10^6\,.\,9{,}12}{30^3\,.\,500\,.\,0{,}33\,.\,3{,}5\,.\,3{,}5} \quad \frac{\text{cm Z}}{\text{cm}}$$

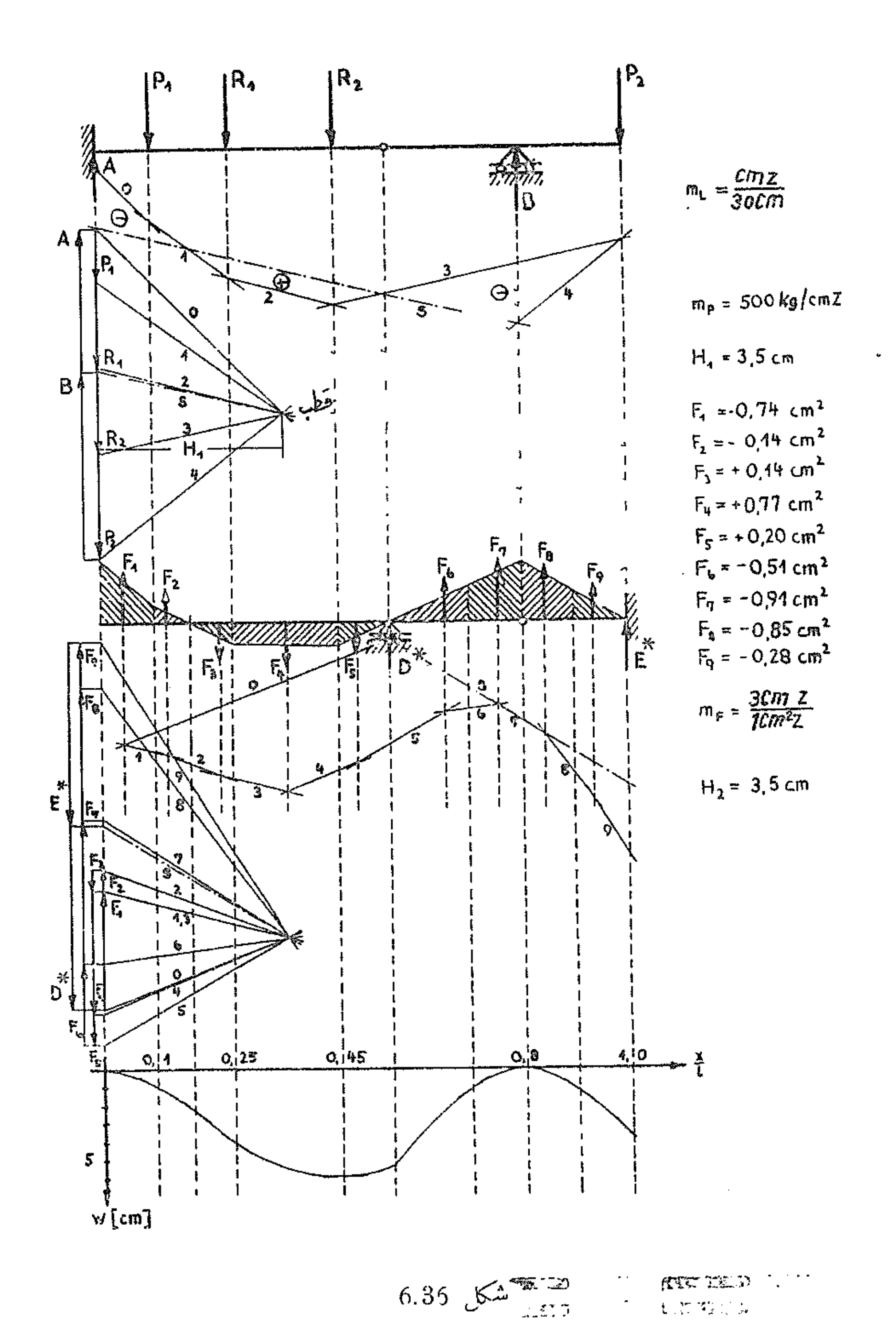
$$m_w = \frac{1}{2{,}85}\,\frac{\text{cm Z}}{\text{cm}}$$

$$m_w{}' = \frac{m_L{}^2\, m_k\, m_F\, EI}{H_1} = \frac{2.1\,.\,10^6\,.\,9{,}12}{30^2\,.\,500\,.\,0{,}33.3{,}5} \quad \text{cm Z}$$

$$m_w{}' = \frac{1}{0{,}0274}\ \text{cm Z}$$

من الشكل (9 36) تتم قراءة الانتقال الشاقولي لنقطة التمفصل d التالية :

$$s_{wd} = 1{,}81 \text{ cm Z}$$



شكل 6.36

وبذلك فان الانتقال الشاقولي لنقطة التمفصل d يبلغ :

$$w_d = \frac{s_{wd}}{m_w} = 1,81 \cdot 2,85 = 5,16 \text{ cm}$$

تبلغ القوة العرضية الوهمية الواقعة على يسار المفصل d مباشره، الذي أصبح حسب مطابقة مور مسنداً وحيد القيمة (مسند متحرك افقياً) في جائز الاستعاضة ، القيمة التالية :

$$s_{wdl}' = (F_1+F_2+F_3+F_4+F_5) \cdot m_F = 0{,}23 \cdot 3 = 0{,}69 \text{ cm Z}$$

أما القوة العرضية الوهمية الواقعة على يمين المفصل d (أو بالاحرى المسند المتحرك الوهمي) فتبلغ :

$$s_{wdr}' = (F_1+F_2+F_3+F_4+F_5) \cdot m_F + s_D^* = 0{,}23 \cdot 3 + 3{,}50 = 4{,}19 \text{ cmZ}$$

وبذلك يبلغ ميل المماس على خط الانعطاف في نقطة التمفصل :

آ ـ النقطة الواقعة على يسار المفصل مباشرة :

$$w_{dl}' = \frac{s_{wdl}'}{m_w'} = 0{,}69 \cdot 0{,}0274 = 0{,}0189 \ ; \ w'_{dl} = 1{,}08^\circ$$

ب ـ النقطة الواقعة على يمين المفصل مباشرة :

$$w_{dr}' = \frac{S_{wdr}}{m_w} = 4{,}19 \cdot 0{,}0274 = 0{,}115 \quad ; \quad w_{dr}' = 6{,}56^\circ$$

من الملاحظ ان للماس على خط الانعطاف عند نقطة التمفصل d قيمتين وهــذا شيء صحيح ومعقول وذلك لأن خط انعطاف الجائز ، يحتوي على العموم عند نقطة التمفصل على انكسار .

مثـال 121 :

حمل جائز بسيط مقطعه العرضي دائري الشكل ولكنه متغير على طول الجائز ، بحمولة وحيدة P (شكل 9.37) .

المعطى :

$. l_2 = 27{,}5 \text{ cm} , l_1 = 20\text{cm} , d_3 = 3{,}0\text{cm} , d_2 = 4{,}0\text{cm} , d_1 = 3{,}5\text{cm} , P = 500\text{kp}$

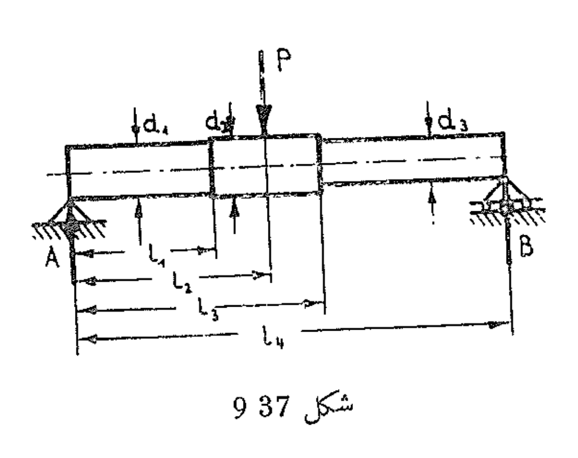
$. E = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 , \ l_4 = 60\text{cm} , l_3 = 35 \text{ cm}$

المطلوب : تعيين

١ ـ خط الانعطاف (الخط المرن) .

٢ ـ الانتقال الشاقولي الاعظمي .

٣ – ميل المماس على خط الانعطاف عند نقطتي الاستناد .
وذلك باستخدام مطابقة مور التخطيطية .



شكل 9 37

الحل :

بانشاء المضلع الحبلي الاول الممثل في الشكل (9.38) يتم التوصل لتوزيع عزم الانعطاف على طول الجائز الفعلي . للحصول على خط الانعطاف ينبغي الآن تحميل جائز الاستعاضة بالحمولة الوهمية $q^*=M/EI$. بما ان صلابة انعطاف الجيزان التي تمت معالجتها في الامثلة 119 و 120 كانت ثابتة على طول الجائز لذلك لم يلزم ، اثناء تعيين مقاييس رسم الانتقال الشاقولي وميل المماس على خط الانعطاف ، اخذها بعين الاعتبار . لكن عزم عطالة الجائز المدروس في هذا المثال متغير لذلك ينبغي اعتبار ذلك وتتم معالجته بالشكل التالي :

يفترض بكل بساطة ان للجائز نفس المقطع العرضي « عزم عطالة الجائز ثابت » . وبهذا الافتراض تكون عزوم العطالة قد غيرت بشكل كبير وبما يساوي العوامل التالية :

$$x_1 = \frac{I_c}{I_1} \text{ ، } x_2 = \frac{I_c}{I_2} \text{ ، } x_3 = \frac{I_c}{I_3}$$

بتغيير عزوم العطالة هذا التغيير الكبير فان الحمولات الوهمية q^* التي يحمل بها جائز الاستعاضة تتغير بشكل كبير ايضاً $(q^*=M/EI)$. ان تغيير عزوم العطالة والحمولة الوهمية الناتج عن الافتراض العفوي السابق غير مسموح به ولذلك ينبغي اعادة اعتبار ذلك ثانية . سوف يتم هنا اعتبار التغيير ضمن مخطط عزم الانعطاف وذلك بنفس المقدار وفي الامكنة التي تغيرت فيها عزوم العطالة بما يساوي العامل x . في هذا المثال سوف يعاد الجائز المعطى الذي يتغير

عزم عطالته الى جائز ذو مقطع عرضي ثابت وقطره d_2 « عزم عطالته I_2 ثابت » وبذلك تبلغ عوامل التحويل القيم التالية :

$$x_1 = \frac{\pi\, d_2{}^4 \,.\, 64}{64\, \pi\, d_1{}^4} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 = \left(\frac{4}{3,5}\right)^4 = 1,72$$

$$x_2 = \frac{\pi d_2{}^4 \,.\, 64}{64 \,.\, \pi\, d_2{}^4} = \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3,18$$

بواسطة هذه القيم يمكن الآن رسم سطح عزم الانعطاف المختزل الذي يمثل الحمولة الوهمية لجائز الاستعاضة والذي يتم بالاعتماد عليه ايجاد خط الانعطاف المطلوب (شكل 9.38) .

لحساب مقاييس رسم الانتقال الشاقولي وميل المماس على خط الانعطاف ينبغي استخدام عزم العطالة I_2 .

$$m_w = \frac{m_L{}^3\, m_k\, m_F\, EI^2}{H_1\, H_2} = \frac{2,1 \,.\, 10^6 \,.\, \pi \,.\, 4^4}{5^3 \,.\, 100 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 4,5.64} = \frac{1}{0,064}\ \frac{cmZ}{cm}$$

$$m_w' = \frac{m_L{}^2\, m_k\, m_F\, EI_2}{H_1} = \frac{2,1 \,.\, 10^6 \,.\, \pi \,.\, 4^4}{5^2 .100 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 64} = \frac{1}{0,0028}\ \frac{cmZ}{cm}$$

من الرسم تقرأ ، بالنسبة للانتقال الشاقولي ، القيمة التالية :

$$max\ s_w = 2,2\ cmZ$$

وبذلك فان الانتقال الشاقولي الفعلي يبلغ :

$$max\ w = \frac{max\ s_w}{m_w} = 2,2 \,.\, 0,064\ cm = 0,141\ cm$$

لحساب ميل المماسات على خط الانعطاف عند المساند تلزم معرفة القوى العرضية الوهمية في تلك النقاط والتي تساوي في نفس الوقت ردود أفعال المساند الوهمية التي يتم من اجلها من الشكل(9.38)قراءة القيم التالية :

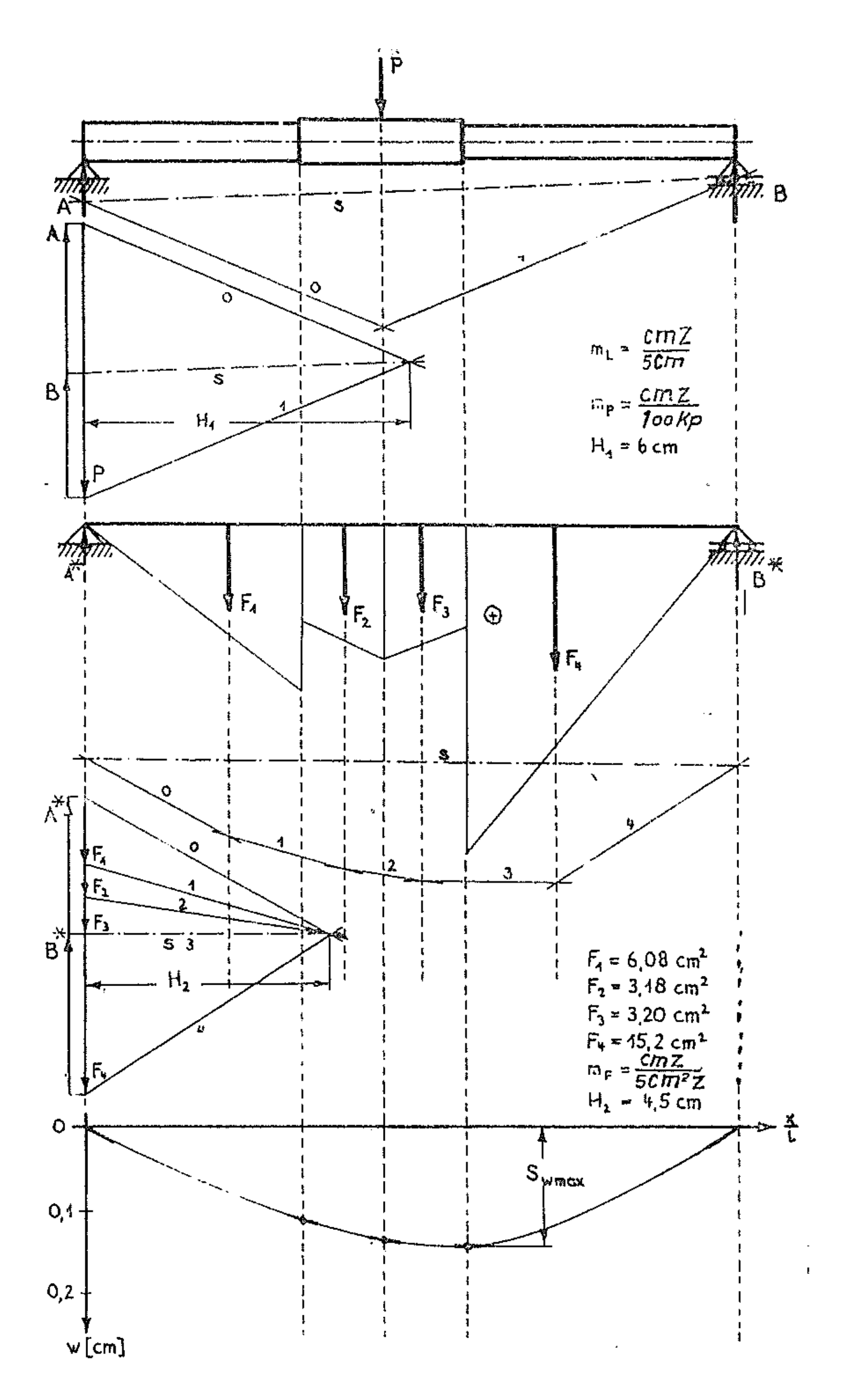
$$s_{wa}' = 2,5\ cm\ Z$$

$$s_{wa}' = 3,0\ cm\ Z$$

بادخال مقياس الرسم بعين الاعتبار يتم تعيين القيم الفعلية :

$$w_a' = 2,5 \,.\, 0,0028 = 0,0070\ ;\ w_a' = 0,40^\circ$$

$$w_b' = 3,0 \,.\, 0,0028 = 0,0084\ ;\ w_b' = 0,48^\circ$$



P
A
B
s
o
1
A
B
P
H₁
$m_L = \frac{cmZ}{5cm}$
$m_P = \frac{cmZ}{100Kp}$
$H_1 = 6$ cm
A*
B*
F₁
F₂
F₃
F₄
⊕
s
o
1
2
3
4
s 3
H₂
$F_1 = 6{,}08$ cm²
$F_2 = 3{,}18$ cm²
$F_3 = 3{,}20$ cm²
$F_4 = 15{,}2$ cm²
$m_F = \frac{cmZ}{5cm^2Z}$
$H_2 = 4{,}5$ cm
0
0,1
0,2
w [cm]
$\frac{x}{L}$
S_{wmax}

شكل 9.38

مثال 122 :

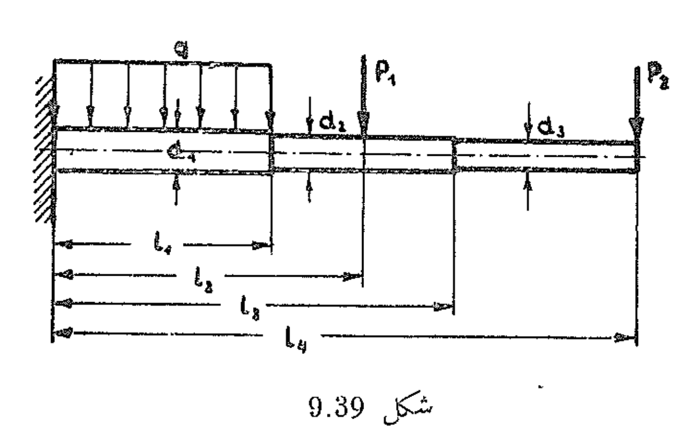
حمل جائز بارز (ظفر) مقطعه العرضي دائري الشكل ويتغير ثلاث مرات على طول الجائز ، بحمولةموزعة q تؤثر على رقعة منه وحمولتين وحيدتين p_1 , p_2 (شكل 9.39) .

المعطى : $P_1 = 15$ kp , $P_2 = 10$ kp , $q = 0{,}8$ kp/cm , $d_1 = 3$ cm , $d_2 = 2{,}5$ cm

$d_3 = 2$ cm , $l_1 = 50$ cm , $l_2 = 75$ cm , $l_3 = 95$ cm , $l_4 = 125$ cm ,

$E = 2{,}1 . 10^6$ kp/cm^2 .

المطلوب : تعيين خط الانعطاف وكذلك الانتقـال الشاقولي الاعظمي بالاستعانـة بطابقـة مور التخطيطية .



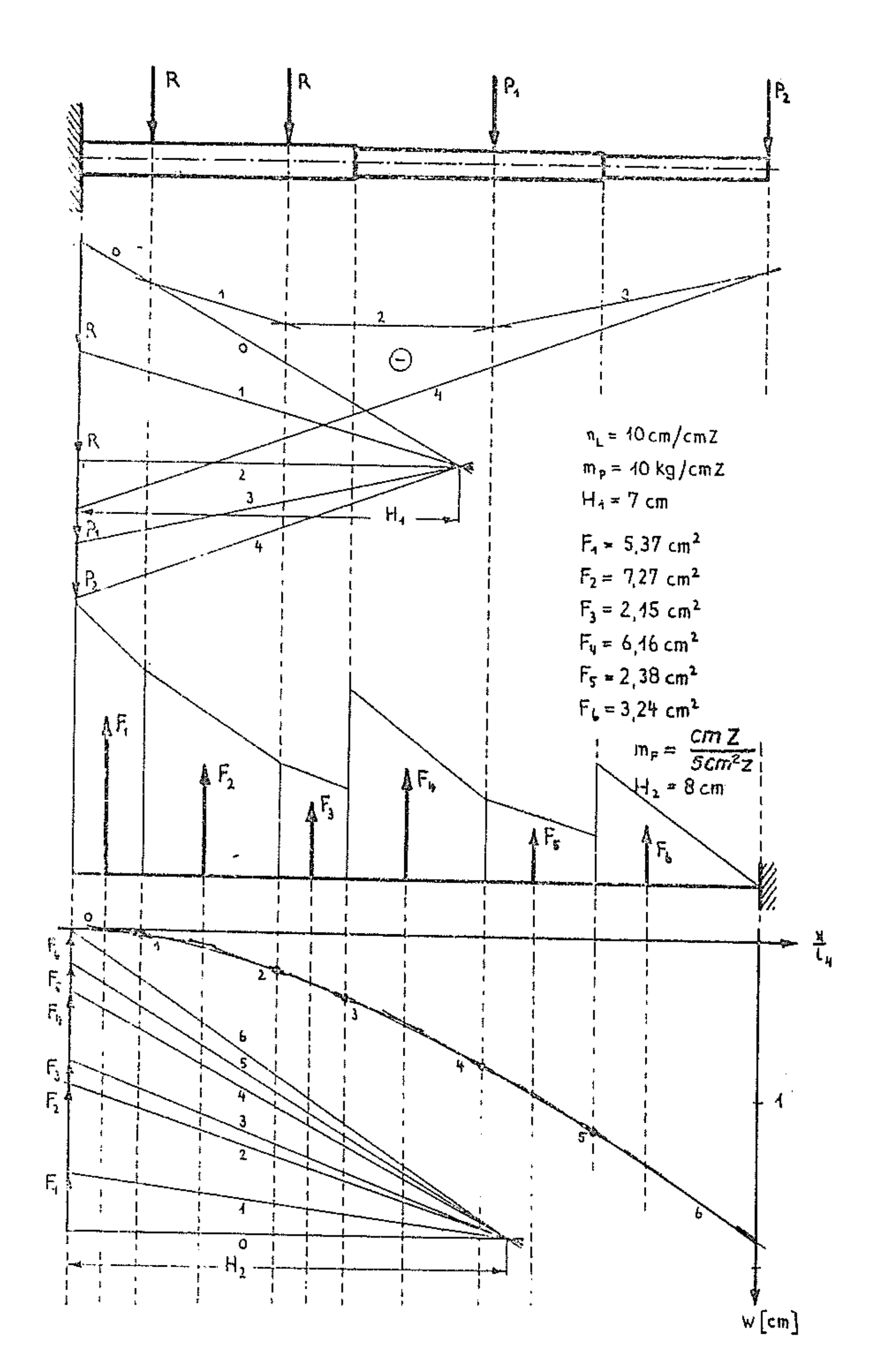
شكل 9.39

الحل :

يستعاض في هذا المثال عن الحمولة الموزعة بحمولتين وحيدتين قيمة كل منها R . تبلـغ قيمـة محصلة الحمولة الموزعة $q\,l_1 = 40$ kp وبذلك تبلغ كل من قوتي الاستعاضة $R = 20$ kp . وبهذا يصبح تعيين سطح عزم الانعطاف بالطريقة التخطيطية ممكناً (شكل 9.40) . بما ان عزوم عطالة الجائز متغيرة لذا سوف يختزل الجائز ويستعاض عنه بجائز عزم عطالته ثابت وقطره d_1 (سوف يعاد الجائز الى جائز عزم عطالته ثابت ونصف قطره d_1) . لذا ينبغي تكبير سطوح عزوم الانعطاف في كل من المجالين 3,2 وذلك بمقدار العوامل :

$$\varkappa_2 = \frac{\pi d_1{}^4 64}{64 . \pi . d_2{}^4} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2{,}5}\right)^4 = 2{,}08$$

$$\varkappa_3 = \frac{\pi d_1{}^4 . 64}{64 . \pi . d_3{}^4} = \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 5{,}1$$



R
R
P_1
P_2
n_L = 10 cm/cmZ
m_P = 10 kg/cmZ
H_1 = 7 cm
F_1 = 5,37 cm²
F_2 = 7,27 cm²
F_3 = 2,15 cm²
F_4 = 6,16 cm²
F_5 = 2,38 cm²
F_6 = 3,24 cm²
m_F = cm Z / 5cm²z
H_2 = 8 cm
H_1
H_2
F_1
F_2
F_3
F_4
F_5
F_6
w [cm]

شكل 9.40

ينبغي الآن حساب مقاييس الرسم بالاستعانة بعزم المطالة $I_1 = \pi d_1{}^4/64$:

$$m_w = \frac{m_L{}^3 m_k\ m_F\ EI_1}{H_1\ H_2} = \frac{2{,}1.10^6 . \pi . 3^4}{10^3 . 10 . 5 . 7 . 8 . 64} = \frac{1}{0{,}34}\ \frac{cm\ Z}{cm}$$

من الشكل (9.40) يستطاع قراءة الانتقال الشاقولي الاعظمي :

$$\max s_w = 5{,}4\ cm\ Z$$

الذي يبلغ في الحقيقة :

$$\max w = 5{,}4 . 0{,}34 = 1{,}84\ cm$$

لقد تم في الشكل (9.40) تمثيل خط الانعطاف بدقة .

مثال 123:

حمل جائز ممتد الطرف بحمولتين وحيدتين متساويتين P (شكل 9.41) .

المعطى : P , EI_0 , a .

المطلوب : تعيين خط انعطاف الجائز بالطريقة التخطيطية .

الحل :

تختار القيم التالية :

$$H_1 = 3{,}0\ cm\ ;\ m_L = \frac{1{,}5\ cm}{a}\ ,\ m_k = \frac{2{,}0 cm}{p}$$

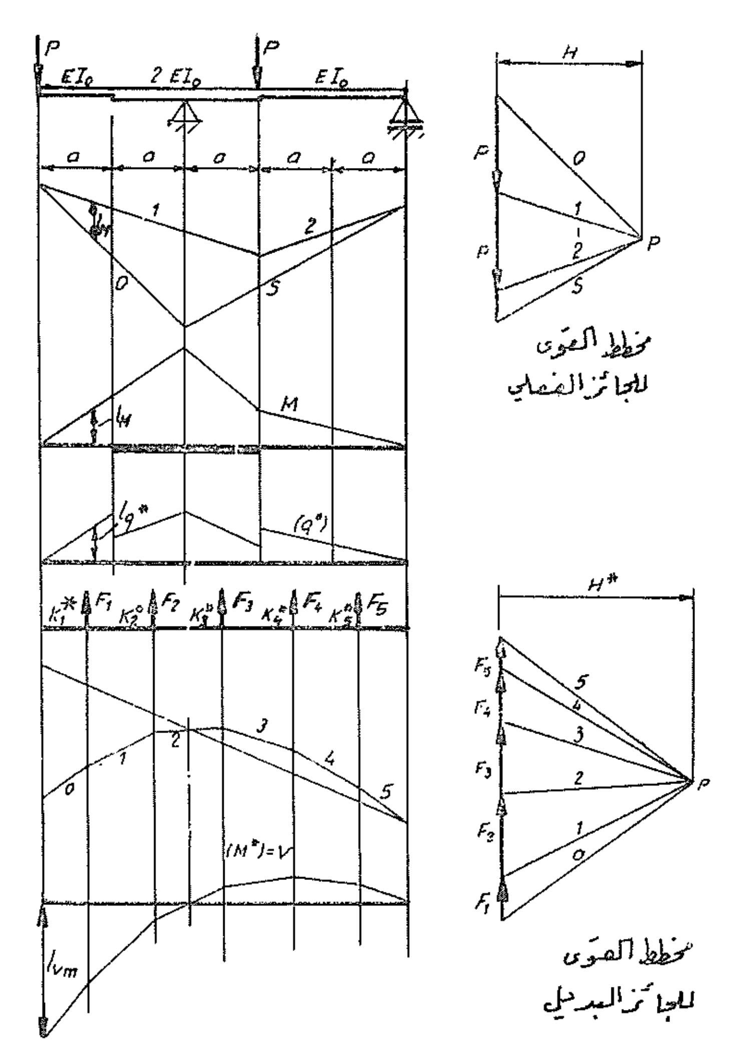
بواسطة هذه القيم يتم الحصول على مخطط القوى وسطح العزم الذي سيعاد رسمه ثانيـة بشكل مستقيم لزيادة الايضاح . استناداً الى القيم السابقة فان مقياس العزم يبلغ :

$$m_M = \frac{1{,}0\ cm}{pa}$$

بما أن القيمة EI_0 معلومة لذلك يمكن رسم سطح الحمـولة الوهميه q^* مباشرة . أما مقياسة فيبلـغ :

$$mq^* = 1{,}0\ cm\ \frac{EI_0}{Pa}$$

يقسم السطح q^* الى سـطوح جزئية ثم تحسب مساحة كل منها وتعوض كقوة في مركز ثقل السطح الجزئي التابع لها . بعد ذلك يعاد اختيار القيم التالية :



شكل 9.41

$$H_2 = 4{,}0 \text{ cm} \;;\; m_F = \frac{1{,}5\text{cm}}{\text{cm}^2}$$

بواسطة هـذه القيم يتم رسم مخطط القوى وسطح العزم لجائز الاستعاضة . بعد ذلك يعاد رسم سطح العزم بشكله المستقيم والذي يمثل بالتقريب خط الانعطاف . أما مقياس الانتقال الشـاقولي فيبلغ القيمة التالية :

$$m_w = \frac{E\,I_0}{3{,}0\text{cm}.\,4{,}0\text{cm}}\;\frac{2{,}0\text{cm}}{P}\;\frac{1{,}5\text{cm}}{\text{cm}^2}\;\frac{(1{,}5\,\text{cm})^3}{a^3} = 0{,}845\;\frac{E\,I_0}{P_a{}^3}$$

يتشكل الانتقال الشاقولي الاعظمي في النهاية الحرة للجائز . من الشكل (9-41) تقـرأ القيمة التالية :

$\max s_w \approx 2{,}75$ cm

بتقسيم هذه القيمة على مقياس الرسم يتم الحصول على القيمة الفعلية:

$$\max w = \frac{\max s_w}{m_w} \approx 3{,}26 \ \frac{Pa^3}{EI_0}$$

مثـــال 124 :

يطلب البرهان على صحة مقاييس الرسم للانتقالات الشاقولية (العلاقة 9-36) وميول المماسات على خط الانعطاف (العلاقة 9-37) .

الحـــــل :

سوف يرمز لكافة القيم المقروءة من الرسم ، هذا يعني القيم الممثلةفي الشكل بالـ cm Z (cm في الرسم) بالاحرف s مذيلة بالدليل المناسب . يبلغ عزم الانعطاف في النـقطة x من الجائز البسيط الممثل في الشكل (9-42 a) والمحمل بحمولة وحيدة القيمة التالية :

$$M(x) = A \cdot x$$

بالامكان التعبير عن القيم A , x الموجودة في المعادلة السابقة من خلال القيم المقروءة من الرسم ومقاييس الرسم وهي تبلغ :

$$A = m_k s_A \quad ; \quad x = m_L s_L$$

بذلك يأخذ عزم الانعطاف الشكل التالي :

$$M(x) = s_A s_x m_k m_x \qquad (9\text{-}38)$$

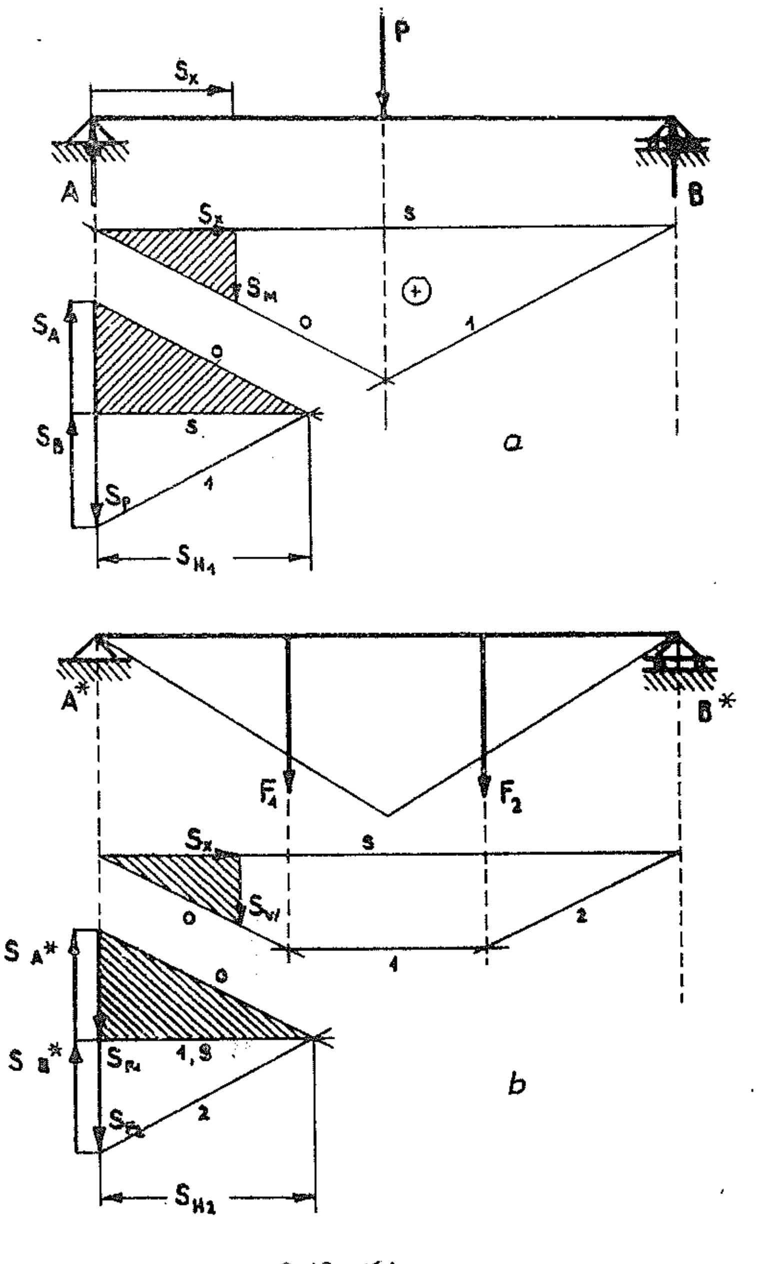
ان كلا المثلثين المهشرين في الشكل (9.42) متشابهين ومن ذلك ينتج :

$$\frac{s_A}{s_{H_1}} = \frac{s_M}{s_x} , \ s_A = \frac{s_M s_{H_1}}{s_x} \qquad (9\text{-}39)$$

بتبديل s_H حسب العلاقة ,(9-39) في العلاقة (9-38) ينتج :

$$M(x) = s_M s_{H_1} \frac{1}{m_k} \frac{1}{m_l}$$

يعطي ترتيب المضلع الحبلي الممثل في الشكل (9.42) عزم الانعطاف . بتعريف مقيـــاس لرسم عزوم الانعطاف :



شكل 42-9

$$M = s_W \; \frac{1}{m_M}$$

يتم الحصول على ما يلي :

$$m_M = m_k \; m_L \; \frac{1}{s_{H_1}}$$

حسب مطابقة مور فان الانتقال الشاقولي في النقطة x (شكل 9.4) يبلغ :

$$w(x) = A^* . x$$

يستعاض عن القيم A^* , x الموجودة في العلاقة السابقة بالقيم المقروءة من الرسم ومقاييس الرسم:

$$A^* = s_A^* \frac{1}{m_j}$$

$$x = s_x \frac{1}{m_L}$$

وبذلك ينتج :

$$w(x) = s_A^* s_x \frac{1}{m_L} \frac{1}{m_j}$$

ان المثلثين المؤشرين في الشكل (9 43 b) متشابهين . وبذلك ينتج :

$$\frac{s_A^*}{s_{H2}} = \frac{s_w}{s_x}$$

$$s_A^* = \frac{s_{H2}\, s_w}{s_x}$$

بالاستعاضة عن s_A^* في معادلة w (x) الاخيرة ينتج :

$$w(x) = s_{H2}\, s_w \frac{1}{m_L} \frac{1}{m_j}$$

بواسطة العلاقة التالية :

$$w(x) = s_w \frac{1}{m_w}$$

والعلاقة التي سبقتها يتم تعريف مقياس رسم الانتقالات الشاقولية :

$$m_w = m_L\, m \quad \frac{1}{s_{H2}}$$

يظهر في هذه العلاقة مقياس الرسم m_j ، وهو يصلح مقياساً لرسم الحمولات الوهمية المتحدة F_i. تحسب قيم F_i بعد غض النظر عن العامل عديم الواحدة كجداء الاطوال x والحمـــولات الوهمية q^* :

$$F = s_F \frac{1}{m_j} = s_x \frac{1}{m_L} s_M \frac{1}{m_H} / EI$$

من هذه المعادلة يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\frac{1}{m_j} = \frac{s_x s_M}{s_{F\,i}} : \frac{EI}{m_L m_M}$$

يمثل الاصطلاح $s_x s_M / s_{F\,i}$ الذي تتضمنه العلاقة السابقة مقياس السطوح m_F الذي تم استخدامه حتى الآن وبذلك تأخذ العلاقة السابقة شكلها النهائي التالي :

$$m_j = \frac{m_L{}^3\, m_k m_F\, EI}{m_F\, s_{dI}}$$

أما مقياس رسم الانتقالات الشاقولية فيصبح بالشكل التالي :

$$m_w = \frac{m_L{}^3 m_k m_F EI}{s_{H1}\; s_{H2}}$$

وأما مقياس رسم ميل المماس على خط الانعطاف فهو يساوي نفس القيمة التي تم الحصول عليها تحت الرمز m_{II} :

$$m_{w'} = \frac{m_L{}^2 m_k m_F EI}{s_{H1}}$$

لقد تم في الامثلة 119 حتى 123 تسمية الابعاد القطبية الاختصار بـ H_1 , H_2 .

٩ ـ ١١ طريقة الاستمرار وطريقة الماتريسات للانعطاف المستقيم في القضبان الموشورية

سوف يتم في هذه الفقرة استخدام مجموعة الاحداثيات المعرفة في الشكل (9 5) . في حالة كون $q = const$, $EI = const.$ فان المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة لخط الانعطاف تأخذ الشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned}
EIw'''' &= q = +q \\
EIw''' &= -Q = +q\,x + C_1 \\
EIw'' &= -M = +q\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2 \\
EIw' &= EI\varphi = +q\,\frac{1}{6}\,x^3 + C_1\frac{1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \\
EIw &= +\,q\frac{1}{24}x^4 + C_1\frac{1}{6}\,x^3 + C_2\frac{1}{2}x^2 + C_3 x + C_4
\end{aligned}\right\} \qquad (9.40)$$

سوف تطلق على مجال صلاحية المعادلات (المكان المحصور بين وضعي عدم استمرار)باختصار كلمة مجال فقط وهو يحدد بواسطة الاحداثيات $x=0$, $x=l$ سوف يذيل المقطع العرضي $x=0$ باعتباره بداية المجال (مدخل المجال) بالدليل e كما سيذيل المقطع العرضي $x=l$ باعتباره نهاية المجال (مخرج المجال) بالدليل a . يطلق على القيم الاربعة w , φ , M , Q اسم قيم الحالة (قيم القطع + قيم التغيير) للقضيب المعطى وذلك لانها تعين حالة التغيير وحالة الاجهاد في ذلك القضيب .

يمكن بسهولة التعبير عن الثوابت $C_1 \cdots C_4$ بواسطة قيم الحالة التابعة لبداية المجال (مدخل المجال) :

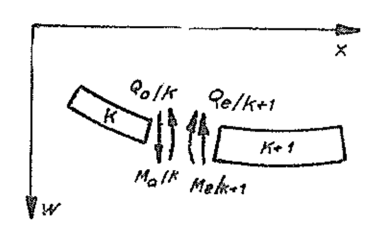
$$C_1 = -Q_e \; ; \; C_2 = -M_e \; ; \; C_3 = EI\varphi_e \; ; \; C_4 = EIw_e$$

وبذلك يستطاع التعبير عن قيم الحالة الثابتة لنهاية المجال(قيم النهاية او قيم المخرج) بواسطة قيم الحالة التابعة لبداية المجال (قيم البداية او قيم المدخل) هكذا :

$$\left.\begin{aligned}
w_a &= w_e + \varphi_e l - M_e \frac{l^2}{2EI} - Q_e \frac{l^3}{6EI} + q \frac{l^4}{24\,EI} \\
\varphi_a &= + \varphi_e + M_e \frac{l}{EI} + Q_e \frac{l^2}{2EI} + q \frac{l^3}{6EI} \\
M_a &= + M_e + Q_e l + q \frac{1}{2} l^2 \\
Q_a &= + Q_e + q l
\end{aligned}\right\} \qquad (9.41)$$

على العموم يقع على جوار نهاية المجال (مخرج المجال) المدروس مجال آخر تتطابق قيم بدايته (قيم مدخله) مع قيم النهاية (قيم المخرج) المحسوبة مؤخراً . لو رمز للمجال المدروس في البداية بالحرف k والمجال المجاور له بالحرف $k+1$ لتم الحصول على العلاقات التالية (شكل 944) :

$$\left.\begin{aligned}
w_{e/k+1} &= w_{a/k} \\
\varphi_{e/k+1} &= \varphi_{a/k} \\
M_{e/k+1} &= M_{a/k} \\
Q_{e/k+1} &= Q_{a/k}
\end{aligned}\right\} \qquad (9.42)$$



شكل 9.44

عندما يتكرر استعمال المعادلات (9.41) , (9.42) يستطاع تمثيل قيم الحالة كاملة لاي مجـال من خلال قيم الحالة الاربعة التابعة لبداية المجال (لمدخل المجال) الاول ويتم ذلك بالتنقـــل بواسطة المعادلات (9.41) , (9.42) من مجال لمجال آخر وبذلك تنقل قيم بداية المجال الأول الى المجالات الاخرى . تحدد اثنتان من قيم البداية الاربعة للمجال الاول بواسـطة شروط الاطراف اما القيمتين المتبقيتين فتنتقل كعوامل مجهولة الى المجـال الاخير مارة بكل المجالات ومتخطيـة كافة الحسـابات . حين بلوغ المجـال الاخير تعين هـاتين القيمتين بواسـطة شرطي الاطراف هنـاك . غالباً ما تسبب الشروط الجـانبيـة (على سبيل المثـال مكان استناد) اثنـاء الحل الى تنـاوب العوامـل المجهـولة ، لذلك ينبغي في نهاية الحسـاب حل معادلتين بمجهولين (لا علاقة لعدد المجالات بدرجة عدم التقرير الستاتيكي وكذلك لا علاقة لها بعدد المجالات) . تصلح تلك العلاقات من أجل الانعطاف المستقيم في القضبان المستمرة غير المتفرعة فقط اما في الحالات الاخرى فينبغي اجراء التعديل اللازم على المعادلات ، لكن طبيعة الطريقة وخطواتهـا تبقى كما هي بدون تغير . يطلق على هذه الطريقة المستخدمة لحساب قيم الحالة اسم طريقة الاستمرار . لكن اذا استخدمت فيها الكتابة الماتريسية لتعبير عن المعادلات (9.41) و (9.42) من أجل ترتيبها وتنسيقها عندئذ يطلق عليها اسم الطريقة الماتريسية (طريقة المرتبات ، طريقة المصفوفات) . الماتريس هي عبارة عن مخطط عددي مستطيل الشكل (وفي بعض الحـــالات الخاصة مربعة الشكل) ولها ، في الرياضيات ، قواعد حسابية خاصة .

ان قاعدة ضرب الماتريسات المستعملة هنا بكثرة والـــتي يعبر عنها بشـــكل مختصر كالتالي : ضرب السطر (الخط الافقي) بالعمود (الخط الشاقولي) ، تفهم بالشكل الآتي : يضرب الحد n من سطر (خط افقي) عائد للماتريس الاولى مع الحد n من عمود (خط شاقولي) عائد للماتريس الثانية بعد ذلك تجمع كل الجداءات الجزئية الناتجة من ضرب السطر (الخط الافقي) مـــع العمود (السطر الشاقولي) . لزيادة الايضاح سوف يحل مثـــال بسيط يشرح ضرب ماتريسين عددين مع بعض :

$$\begin{pmatrix}1&7&3\\2&4&8\\5&9&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&6\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1\cdot4+7\cdot0+3\cdot1)&(1\cdot0+7\cdot6+3\cdot2)\\(2\cdot4+4\cdot0+8\cdot1)&(2\cdot0+4\cdot6+8\cdot2)\\(5\cdot4+9\cdot0+6\cdot1)&(5\cdot0+9\cdot6+6\cdot2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&48\\16&40\\26&66\end{pmatrix}$$

تأخذ المعادلات (9-41) بطريقة الكتابة الماتريسية الشكل التالي :

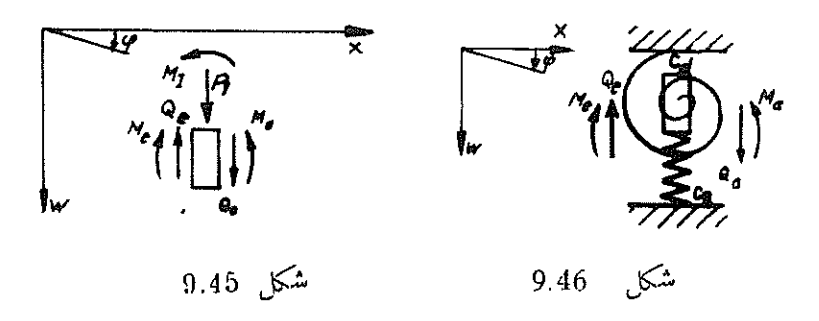
$$\begin{bmatrix}w_a\\ \varphi_a\\ -M_a\\ -Q_a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&l&l^2/2EI&l^3/6EI\\0&1&l/EI&l^2/6EI\\0&0&1&l\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_e\\ \varphi_e\\ -M_e\\ -Q_e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}l^4/24EI\\ l^3/6EI\\ l^2/2\\ l\end{bmatrix}q \qquad (9\ 43)$$

ماتريس العمود ماتريس النقل ماتريس العمود ماتريس العمود

Spaltenmatrix Uebertragungsmatrix Spaltenmatrix Spaltenmatrix

تشير تسمية ماتريس النقل الى ان هـــذه الماتريس تقوم بنقل قيم البداية (قيم المدخـــل) الى نهاية المجال (قيم المخرج) . تتعلق ماتريس النقل من صفات الجائز فقط ولكنها لا تتعلق مطلقاً من الحمولات (اي انها مستقلة عن الحمولات). بواسطة المعادلة الماتريسية (9-43) يـــتم حساب كل الجيزان المستقيمة المحملة بانعطاف مستقيم والتي لا تحتوي على حمولات وحيدة (حمولات مركزة) . لكن في حالة وجود حمولات وحيدة تلزم ، علاوة على المعادلة الماتريسية، إضـافة معادلات إضافية .

يشير الشـــكل (9.45) الى قطعة صغيرة جداً من الجائز وتؤثر عليهـــا حمولات وحيدة M_1 , P_1 .



شكل 9.45 شكل 9.46

من الشكل (9.45) يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$w_a = w_e \ , \ \varphi_a = \varphi_e \ , \ M_a = M_e - M_1 \ , \ Q_a = Q_e - P_1$$

التي يعبر عنها بشكل ماتريسي ، هكذا :

$$\begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ M_a \\ Q_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_e \\ \varphi_e \\ M_e \\ Q_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_1 \\ -P_1 \end{bmatrix} \qquad (9\cdot44)$$

في كثير من الحالات تلزم المعادلة الماتريسية التابعة للمسند المـــرن . يشير الشكل (9.46) الى مسند مرن قصير جداً(تخطيطي)،ثابت نابضه C_q (نابض عرضي) و C_d (نابض دوراني)، وبامعان النظر فيه يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\begin{bmatrix} w_a \\ Q_a \\ M_a \\ Q_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_d & 1 & 0 \\ C_q & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_e \\ \varphi_e \\ M_e \\ Q_e \end{bmatrix} \qquad (9\cdot45)$$

من اجل الحالات الاخرى التي يحتمل ان تصادف المهندس في حياته العملية يمكن الحصول على المعادلة الماتريسية التابعة لها باتباع نفس الطريق . يفضل اثناء التطبيق العملي للطريقة الماتريسية اتباع التمثيل عديم الواحدة . للتمكن من القيام بذلك يلزم إختيار قيم نسب ، تنسب القيم اليها ، هنا ستختار القيم التالية كقيم نسب :

الطول l_c وصلابة الانعطاف $(EI)_c$، بعد ذلك يستعاض عن القيم ذات الواحدات بقيـــم عديمة الواحدات :

$$\overline{w} = \frac{w}{l_c} \;,\; \overline{\varphi} = \varphi \;,\; \overline{M} = \frac{M\, l_c}{(EI)_c} \;,\; \overline{Q} = \frac{Q l_c^{\,2}}{(EI)_c} \;,\; \overline{q} = \frac{q l_c^{\,3}}{(EI)_c}$$

أما بقية القيم عديمـة الواحدة (التي تظهر في ماتريس النقل عديمة الواحدة) فهي :

$$\lambda = \frac{l}{l_c} \;,\; \varepsilon = \frac{(EI)_c}{EI} \;,\; \overline{C}_d = \frac{C_d\, l_c}{(EI)_c} \;,\; \overline{C}_q = \frac{C_q\, l_c^{\,3}}{(EI)_c}$$

بعد القيام بما ذكر فان المعادلات (9 43) , (9.44) , (9 45) تأخذ الشكل التالي :
قطعة مرنة من جائز :

$$\begin{bmatrix} \overline{w}_a \\ \overline{\varphi}_a \\ -\overline{M}_a \\ -\overline{Q}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \varepsilon\frac{\lambda^2}{2} & \varepsilon\frac{\lambda^3}{6} \\ 0 & 1 & \varepsilon\lambda & \varepsilon\frac{\lambda^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_e \\ \overline{\varphi}_e \\ -\overline{M}_e \\ -\overline{Q}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon\frac{\lambda^4}{24} \\ \varepsilon\frac{\lambda^3}{6} \\ \frac{\lambda^2}{2} \\ \lambda \end{bmatrix} \overline{q} \qquad (9\cdot16)$$

حمولة وحيدة :

$$\begin{bmatrix} \overline{W}_a \\ \overline{\varphi}_a \\ \overline{M}_a \\ \overline{Q}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{W}_e \\ \overline{\varphi}_e \\ \overline{M}_e \\ \overline{Q}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\overline{M}_1 \\ -\overline{P}_1 \end{bmatrix} \qquad (9\ 47)$$

مسند مرن :

$$\begin{bmatrix} \overline{W}_a \\ \overline{\varphi}_a \\ \overline{M}_a \\ \overline{Q}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{C}_d & 1 & 0 \\ C_q & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{W}_e \\ \overline{\varphi}_e \\ \overline{M}_e \\ \overline{Q}_e \end{bmatrix} \qquad (9\cdot48)$$

مثال 125 :

حمل الجائز الممثل في الشكل (9.47) بحمولة وحيدة وحمولة موزعة تؤثر على رقعة منه .

المعطى :

$l_1 = 0{,}8\, l_2 \ , \ l_3 = 1{,}2\, l_2$

$E\,I_1 = 0{,}4\, E\,I_2 = E\,I_3$

$q\, l_2 = 0{,}6\, P$

المطلوب : حساب قيم الحالة (قيم القطع وقيم التغير) عند نقاط عدم الاستمرار في الجائز .

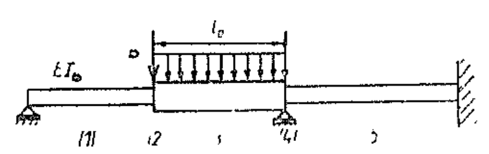
الحل :

إختيار قيم النسب $E\,I_c = E\,I_1 \ , \ l_c = l_2$

تقسيم الجائز الى مجالات وترقيمها حسب الشكل (9 48) .

سيتم اجراء الحل بواسطة الجدولين التاليين .

سوف تكتب القيم المعلومة λ , ε , q او بالاحرى $\overline{M}_1$ و $\overline{P}_1$ وماتريسات النقل التابعة للمجالات في الطرف الايسر من الجدول . اما ترتيب السطور (الخطوط الافقية) والاعمدة (الخطوط الشاقولية) فيتطابق تماما مع الترتيب الموجود في المعادلات (9,46) حتى (9.48) . يستخدم السطر الخامس من الجدول لتدقيق الحسابات وهو يساوي مجموع الاعداد الموجودة في



1 مجال	1	$-0,800000$	$+0,320000$	$+0,085333$	0
$\lambda = 0,800$	0	1	$+0,800000$	$+0,320000$	0
$\varepsilon = 1,000$	0		1	$+0,800000$	0
$\bar{q} = 0$	0			1	0
	$-1,000000$	$+1,800000$	$-2,120000$	$+2,205333$	0
2 حمولة	1	0	0	0	0
$\bar{M}_l = 0$	0	1	0	0	0
$\bar{P}_l = +\bar{P}$	0	0	1	0	0
	0	0	0	1	$+1,000000\bar{P}$
	$+1,000000$	$+1,000000$	$+1,000000$	$+1,000000$	$+1,000000\bar{P}$
3 مجال	1	$+1,000000$	$+0,200000$	$+0,066667$	$+0,010000\bar{P}$
$\lambda = 1,000$	0	1	$+0,400000$	$+0,200000$	$+0,040000\bar{P}$
$\varepsilon = 0,400$	0	0	1	$+1,000000$	$+0,300000\bar{P}$
$\bar{q} = 0,600\ \bar{I}$	0	0	0	1	$+0,600000\bar{P}$
	$-1,000000$	$+2,000000$	$+1,600000$	$+2,266667$	$+0,950000\ \bar{P}$
4 مسند					
$\bar{W}_e = \bar{W}_a = 0$	$Q_{el} =$		$-2,848101\ \bar{\varphi}_{el} - 0,121308\bar{P}$		
5 مجال	1	$+1,200000$	$+0,720000$	$+0,288000$	0
$\lambda = 1,200$	0	1	$+1,200000$	$+0,720000$	0
$\varepsilon = 1,000$	0	0	1	$+1,200000$	0
$\bar{q} = 0$	0	0	0	1	0
	$+1,000000$	$+2,200000$	$+2,920000$	$+3,208000$	0

جدول 1 9

السطور الاربعة التي فوقه (= مجموع الاعمدة). سوف تكتب قيم الحالة لنهاية المجالات (قيم المخرج) في الطرف الايمن من الجدول .

تتطابق قيم البداية (قيم المدخل) للمجال k مع قيم النهاية (قيم المخرج) للمجال (k - 1) . لقد دونت قيم البداية للمجال الاول في أعلى الجدول على اليمين وذلك بالشكل التالي (دون ان يكون كل شيء مكتوباً) :

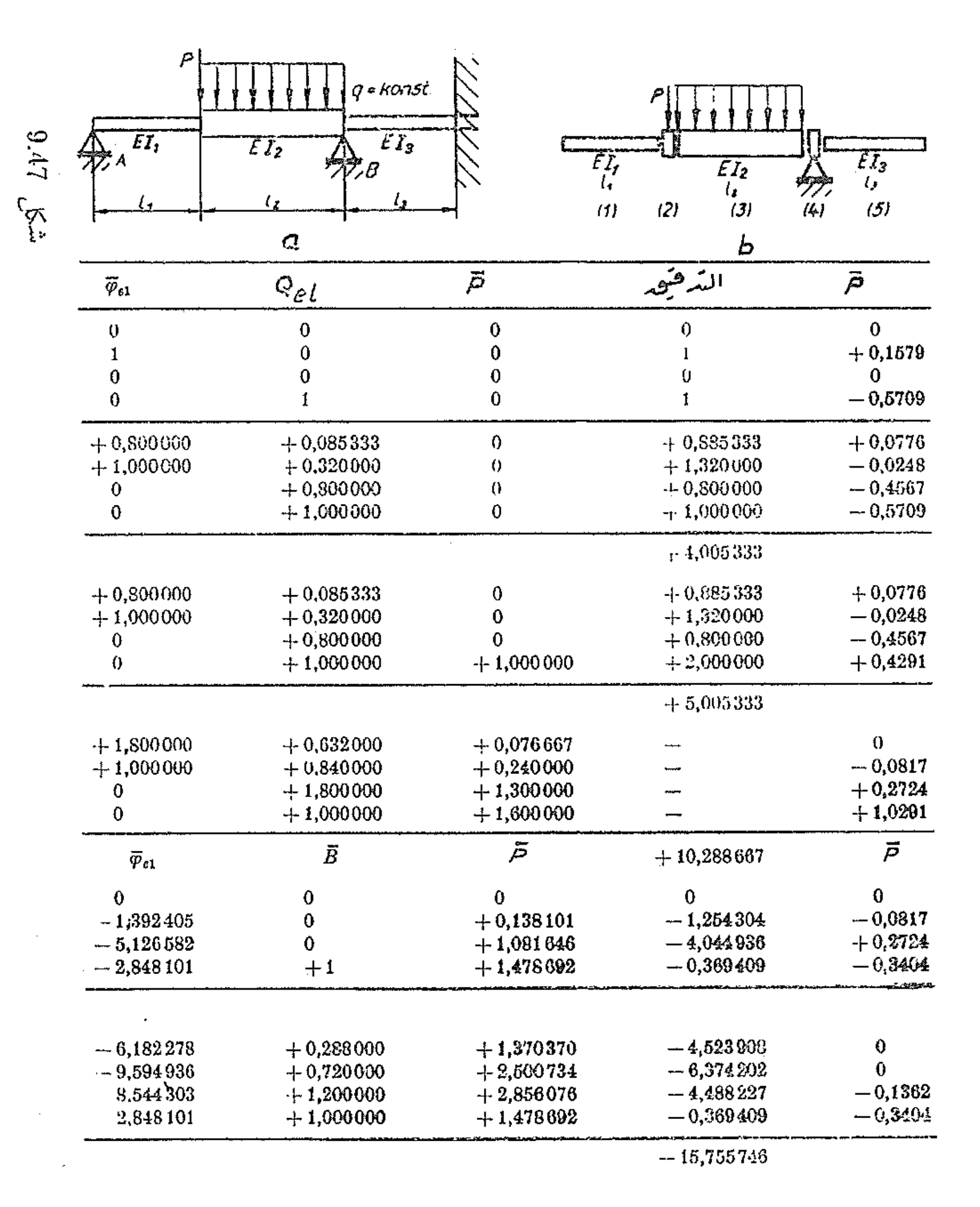
$$\bar{W}_{e1} = 0\ .\ \bar{\varphi}_{e1} + 0\ .\ \bar{Q}_{e1} + 0\ .\ \bar{P}$$

$$\bar{\varphi}_{e1} = 1\ \ \bar{\varphi}_{e1} + 0\ .\ \bar{Q}_{e1} + 0\ .\ \bar{P}$$

$$\bar{M}_{e1} = 0\ .\ \bar{\varphi}_{e1} + 0\ .\ \bar{Q}_{e1} + 0\ .\ \bar{P}$$

$$\bar{Q}_{e1} = 0\ .\ \bar{\varphi}_{e1} + 1\ .\ \bar{Q}_{e1} + 0\ .\ \bar{P}$$

شكل 9.47



$\bar{\varphi}_{e1}$	Q_{el}	$\bar{P}$	التدقيق	$\bar{P}$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	+ 0,1579
0	0	0	0	0
0	1	0	1	− 0,5709
+ 0,800000	+ 0,085333	0	+ 0,885333	+ 0,0776
+ 1,000000	+ 0,320000	0	+ 1,320000	− 0,0248
0	+ 0,800000	0	+ 0,800000	− 0,4567
0	+ 1,000000	0	+ 1,000000	− 0,5709
			+ 4,005333	
+ 0,800000	+ 0,085333	0	+ 0,885333	+ 0,0776
+ 1,000000	+ 0,320000	0	+ 1,320000	− 0,0248
0	+ 0,800000	0	+ 0,800000	− 0,4567
0	+ 1,000000	+ 1,000000	+ 2,000000	+ 0,4291
			+ 5,005333	
+ 1,800000	+ 0,632000	+ 0,076667	—	0
+ 1,000000	+ 0,840000	+ 0,240000	—	− 0,0817
0	+ 1,800000	+ 1,300000	—	+ 0,2724
0	+ 1,000000	+ 1,600000	—	+ 1,0291
$\bar{\varphi}_{e1}$	$\bar{B}$	$\bar{P}$	+ 10,288667	$\bar{P}$
0	0	0	0	0
− 1,392405	0	+ 0,138101	− 1,254304	− 0,0817
− 5,126582	0	+ 1,081646	− 4,044936	+ 0,2724
− 2,848101	+ 1	+ 1,478692	− 0,369409	− 0,3404
− 6,182278	+ 0,288000	+ 1,370370	− 4,523908	0
− 9,594936	+ 0,720000	+ 2,500734	− 6,374202	0
8.544303	+ 1,200000	+ 2,856076	− 4,488227	− 0,1362
2,848101	+ 1,000000	+ 1,478692	− 0,369409	− 0,3404
			− 15,755746	

جدول 9.2

بينما يكون عامـــل الحمولة (معامل الحمولة) $\bar{F} = P\, l_c^2 / (EI'_c$ معلوما فان القيم $\bar{\varphi}_{e1}$ و $\bar{Q}_{e1}$ ما تزال في البداية مجهولة . ويستخدم العمود (الخط الشاقولي) الرابـــع من الطرف الايمن للجدول لتدقيق النتائج ويحتوي في سطوره الاربعة الاولى «مجموع السطور» (لكل مجال) . بعد ذلك سوف تكتب النتائج (معبراً عن ذلك من خلال $\bar{F}$ فقط) في العمود الخـامس من

الطرف الايمن للجدول . أما الحساب الفعلي فيبتدأ الان . وهــــو يتألف بصورة رئيسية من تتابع للماتريسات . حسب القاعدة الحسابية المتبعة في ضرب الماتريسات والتي تنص على :ضرب السطر (من الطرف الايسر) بالعمود (من الطرف الايمن)، سوف يتم في البداية حســاب قيم النهايات للمجال الاول ثم تكتب (حسب الترتيب المتبع هــنا) عند نقطة تقاطـع السطر والعمود المستخدمين. على سبيل المثال يتم الحصول على العدد 0,320 000 من :

$$0 . 0 + 1 . 0 + 0,800\,000 . 0 + 0,320\,000 . 1$$

يتألف تدقيق الحساب الذي تم التنويه عنه فيما سبق والذي تم اتباعه اثناء حساب قيم النهــاية من ضرب كل عدد من مجموع الاعمدة (الطرف الايسر من الجدول) مع اعداد مجموع السطور (الطرف الايمن من الجدول) شريطة الانتباه في كل الحالات الى ان العدد الخامس من مجموع السطور هو العدد 1 . تكتب النتيجة (كما هو الحال دائماً) عند نقطة تقاطع اتجاهات الحساب. ينبغي الحصول على نفس النتيجة فيما لو جمعت كافة حدود مجموع قيم النهاية التي تم حسابها مؤخراً. من أجل المجال الاول من المثال فان ذلك الكلام يعني :

$$+ 1,000000 . 0 + 1,800\,000 . 1 + 2,120\,000 . 0 + 2,205\,333 . 1 = + 4,005\,333$$

و

$$+ 0,885\,333 + 1,320\,000 + 0,800\,000 + 1,000\,000 \qquad = + 4,005\,333$$

يؤكد تطابق النتيجتين صحة ضرب الماتريسات (لكن هذا التدقيق ليس بالكاف ، فالوقـوع في خطئين متعاكسين يزول في النتيجة ، أما احتمال الوقوع في مثل هذا الخطأ وخاصة في الاعداد ذات الارقام الكثيرة المستخدمة هنا فضئيل جداً) . بحساب مطابق للذي تم في المجال الاول يتم الحساب في المجالات 2 , 3. لكن المجال 4 يأخذ وضعاً خاصــــاً لان العملية في المجــال المذكور لم تعد مجرد ضرب ماتريسي بل اصبحت استعاضة مجهول بمجهول آخر . يوجــــد في متناول اليد للمجال الرابع الشرط :

$$\overline{w}_{e_4} = \overline{w}_{a_3} = 0$$

وهذا يعني ان :

$$+ 1,800000 . \overline{\varphi}_{e1} + 0,632\,000 . Q_{e1} + 0,076667 . \overline{P} = 0$$

وبهذا يتم استقصاء Q_{e1} (كما يمكن ايضاً استقصاء $\overline{\varphi}_{e1}$) :

$$\overline{Q}_{e1} = - 2,848101 . \overline{\varphi}_{e1} - 0,121\,308 . \overline{P}$$

لكن باختفاء المجهول $\overline{Q}_{e1}$ يظهر بنفس الوقت مجهولاً جديداً ألا وهو رد الفعل B الممثل بالشكل عديم الواحدة التالي :

$$\overline{B} = B \frac{l_c^2}{EI_c}$$

بهذا تصبح جميع قيم النهاية للمجال 4 قابلة للتمثيل من خلال القيم $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{\varphi}_{e1}$. لتدقيق هذه العملية الحسابية لا توجد هناك أية ولهذا السبب ينبغي معالجتها بكل حذر .

يتم حساب المجال 5 كما تم في المجالات 1 , 2 , 3 . في نهاية المجال الاخير يتم ، بفضل شروط الاطراف ، التوصل لمعادلتين من أجل $\overline{\varphi}_{e1}$ ، $\overline{B}$.

$$\overline{w}_{a5} = 0 = -6{,}182\,278 \cdot \overline{\varphi}_{e1} + 0{,}288\,000 \,.\, \overline{B} + 1{,}370\,370 \,.\, \overline{P}$$

$$\overline{\varphi}_{a5} = 0 = -9{,}594\,536 \cdot \overline{\varphi}_{e1} + 0{,}729\,000 \,.\, \overline{B} + 2{,}500\,731 \,.\, \overline{P}$$

بحل هاتين العلاقتين يتم تعيين المجهولين المطلوبين :

$$\overline{\varphi}_{e1} = +\,0{,}157862 \,.\, \overline{P}$$

$$\overline{B} = -\,1{,}369\,525 \,.\, \overline{P}$$

وبالاستعاضة عن $\overline{\varphi}_{e1}$ بقيمتها ينتج :

$$\overline{Q}_{e1} = -\,0{,}570915 \,.\, \overline{P}$$

هكذا يستطاع ، في كل الامكنة ، الاستعاضه عن العوامل $\overline{\varphi}_{e1}$ ، $\overline{Q}_{e1}$, $\overline{B}$ بالقيمة المعلومة $\overline{P}$ وبذلك يتم التوصل للنتائج الموجودة في العمود الاخير من الجدول. بعد الانتهاء من العمليات الحسابية يصبح ، على سبيل المثال ، الميل على خط إنعطاف الجائز عند نقطة الاستناد b بالشكل التالي :

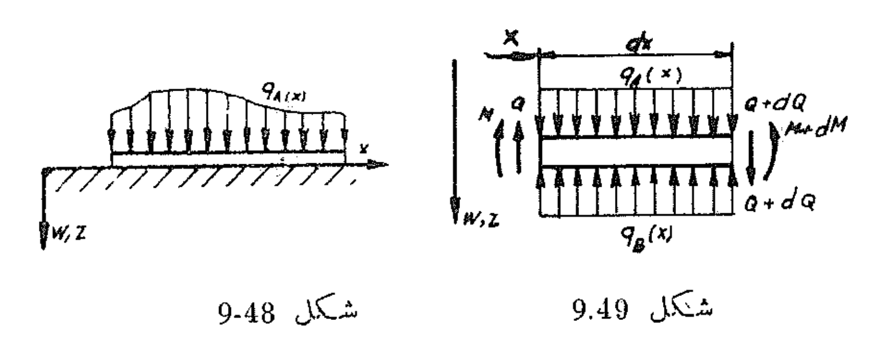
$$\varphi_b = \overline{\varphi}_b = \overline{\varphi}_{a3} = \overline{\varphi}_{a4} = -\,0{,}0817$$

ملاحظات على تقنية الحساب :

يتطلب الضرب الماتريسي القيام بعمليات الضرب والجمع بصورة مستمرة ، فاذا استعملت لهذه الغاية آلة حاسبة كهربائية فلا حاجة للكتابة اكثر مما يحتوي هذا الجدول (فلقد صمم الجدول لهذه الغاية) أما اذا لم تتوفر في متناول اليد إلا مسطرة حاسبة فقط فلا مفر من الكتابة الجانبية . ان اسرع طريقة لحساب الجيزان المعقدة جداً هي الطريقة الماتريسية في حالة توفر حاسب الكتروني (وهذا ما يستخدم بكثرة في الوقت الحاضر) فبفضلها يزول كل عمل كتابي.

٩ ـ ١٢ الجائز ذو الاستناد المرن (ذو الاضطجاع المرن)

إذا استند جائز مستقيم استناداً مرناً ، عندئذ تتألف الحمولة الكلية التي تؤثر على الجائز من حدين اولهما q_A ويمثل الحمولة الموزعة التي تؤثر من الخارج وثانيها q_B ويمثل الحمولة الموزعة التي يعيدها الاستناد .



شكل 9-48   شكل 9.49

بمقارنة الاشكال (9.48) , (9 49) مع بعض ينتج :

$$q = q_A - q_B \qquad (9\text{-}49)$$

بتبديل هذه العلاقة في المعادلة (9 19) يتم الحصول ، من اجل الاستنادالمرن، على العلاقةالتالية:

$$(EIw'')'' + q_B\,(x) = q_A\,(x) \qquad (9\text{-}50)$$

تتعلق الحمولة الموزعة q_B من الخـواص المرنة للاستناد ومن انتقال الجائز $w\,(x)$ ومن شكل سطح التماس بين الجائز والاستناد . في بعض الحالات يمكن استخدام تقريب بسيط جداًولكنه يصلح للاستعمال ، هكذا :

$$q_B = k\,w \qquad (9\text{-}51)$$

(تعتبر هذه العلاقة اكثر العلاقات استخداما وتفترض ان الانتقال الشاقولي والحمولة المـــوزعة تتناسب طرداً مع بعض) . حيث ان k هو ثابت الاستناد (ثابت الاضطجاع ، عدد الاستناد). بتطبيق هذه الفرضية فان المعادلة التفاضلية للجائز ذو الاستناد المرن (ذو الاضطجاع المرن) تأخذ الشكل التالي :

$$(EIw'')'' + kw = q_A \qquad (9\text{-}52)$$

بمعرفة الانتقال الشاقولي لها يتم تعيين قيم القطع وذلك باستخدام العلاقات (9.18) و (9.19) .

مثال 126 :

يستند الجائز الممثل في الشكل (9 50) على 2 N نابض تبعد عن بعضها نفس المسافة (الصغيرة) بحيث يمكن الكتابة $k=N.c/l$.

المعطى :

$$q_A = q_0 = \text{const.} \quad , \quad EI = \text{const.} \quad , \quad k = \frac{N \cdot c}{l}$$

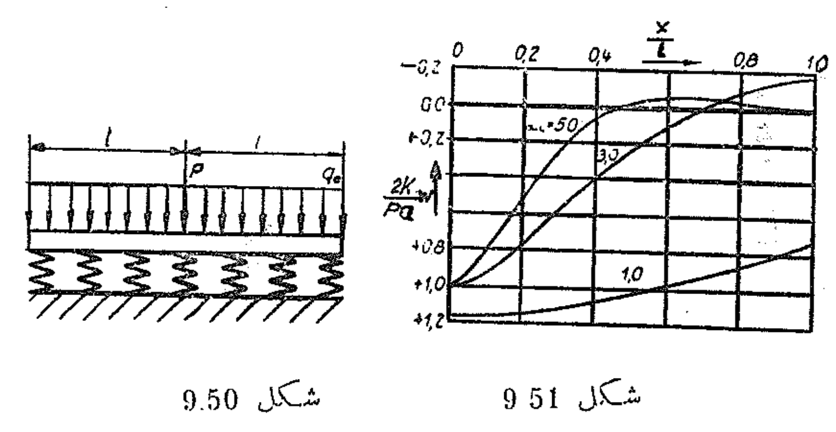
المطلوب : حساب الانتقال الشاقولي (x) w .

الحل :

تأخذ المعادلة التفاضلية (9 52) عندما تكون EI=const الشكل التالي :

$$w'''' + \frac{k}{EI} w = \frac{q_0}{EI}$$

(هذه المعادلة تمثل معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الرابعة) .



شكل 9.50 شكل 9 51

باستخدام الاختصار التالي :

$$\frac{k}{EI} = 4\,\alpha^4$$

يصبح حل المعادلة التفاضلية السابقة ، هكذا :

$$w = C_1 \cosh \alpha x \cos \alpha x + C_2 \cosh \alpha x \sin \alpha x +$$

$$+ C_3 \sinh \alpha x \cos \alpha x + C_4 \sinh \alpha x \sin \alpha x + \frac{q_0}{k}$$

(يتم التأكد من صحة هذه النتيجة بالتعويض في المعادلة التفاضلية) .

شروط الاطراف (x تبدأ من المنتصف) :

$$w'(x=0)=0 \quad , \quad Q(x=0)=+\frac{1}{2}P \;, \quad M(x=l)=0 \quad , \quad Q(x=l)=0$$

بتحقيق حل المعادلة التفاضلية لشروط الاطراف وبالأستعانــــة بالعلاقات (9.17) , (9.18, يتم التوصل لأربعة معادلات ، يعطي حلها قيم ثوابت التكامل :

$$C_1=+\frac{P}{8\alpha^3 EI}\;\frac{\cosh^2\alpha l+\cos^2\alpha l}{\cosh\alpha l\sinh\alpha l+\cos\alpha l\sin\alpha l}$$

$$C_2=+\frac{P}{8\alpha^3 EI}$$

$$C_3=-\frac{P}{8\alpha^3 EI}$$

$$C_4=-\frac{P}{8\alpha^3 EI}\;\frac{\sinh^2\alpha l+\sin^2\alpha l}{\cosh\alpha l\sinh\alpha l+\cos\alpha l\sin\alpha l}$$

بادخال ما يلي :

$$\frac{P}{8\alpha^3 EI}=\frac{P\alpha}{2k}$$

في حل المعادلة التفاضلية بعين الاعتبار وتبديل الثوابت يتـــم الحصول على علاقة الانتقال الشاقولي التالية :

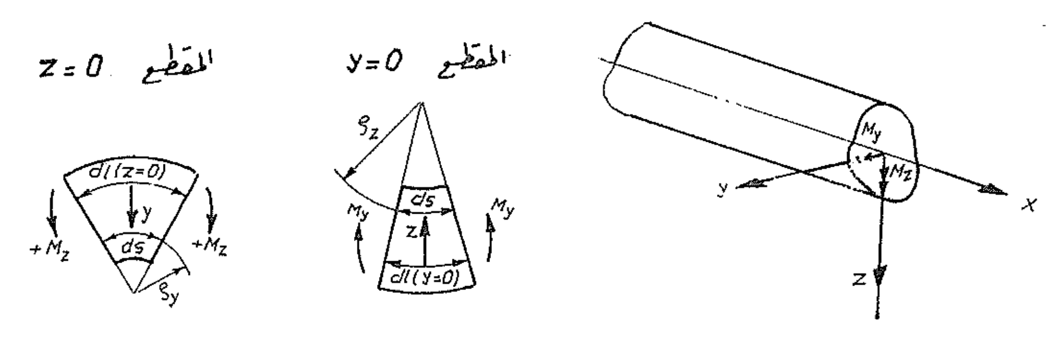
$$w=\frac{q_0}{k}+\frac{P\alpha}{2k}\Big[\frac{(\cosh^2\alpha l+\cos^2\alpha l)\cosh\alpha x\cos\alpha x-(\sinh^2\alpha l+\sin^2\alpha l)\sinh\alpha x\sin\alpha x}{\cosh\alpha l\sinh\alpha l+\cos\alpha l\sin\alpha l}$$

$$+\cosh\alpha x\sin\alpha x-\sinh\alpha x\cos\alpha x\Big]$$

لزيادة الايضاح فلقد تم في الشكل (9.51) تمثيل منحنيات w (x) التابعة للقيم $q_0=0$; 3,0,5,0 , $\alpha l=1{,}0$. ليلاحظ انه في حالة الاستناد (الاضطجـاع) القاسي (harter Bettung) (بالنسبة لصـلابة الجائز) (هذا يعني انه عندما تكون قيم αl كبيرة) فان التغيرات الكبيرة تظهر على مقربة من الحمولة فقط .

٩ - ١٣ الانعطاف المنحرف للقضبان الموشورية

تصلح الفقرات السابقة (٩ - ١ حتى ٩ - ١٣) لحساب التغيرات في حالة الانعطاف المستقيم أما الان فسوف تتم دراسة الانعطاف المنحرف للقضبان الموشورية . تتفق علاقات هـذا الفصل مع العلاقات المقابلة لها التي تتضمنها الفقرة ٩-١ باختلاف واحد هو ان مجموعة المحاور الاحداثية y , z لا تحتاج لان تكون هنا محاور عطالة رئيسية .



شكل 9.52

حسب الشكل (9.52) تصلح :

من أجل y=0 العلاقة التالية :

$$dl\ (y = 0) = ds\left(1 + \frac{z}{\rho_z}\right)$$

ومن اجل z=0 تصلح العلاقة الآتية :

$$dl\ (z = 0) = ds\left(1 + \frac{y}{\rho_y}\right)$$

أما من اجل أية محاور احداثية y , z فتصلح العلاقة التالية :

$$dl = ds\left(1 + \frac{y}{\rho_y} + \frac{z}{\rho_z}\right) \tag{9-53}$$

التغير النسبي الطولي (التمدد) :

$$\varepsilon_x = \frac{dl - ds}{ds} = \frac{dl}{ds} - 1 = \frac{y}{\rho_y} + \frac{z}{\rho_z} \tag{9-54}$$

الاجهاد (قانون هوك) :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\left(\frac{v}{\rho_y} + \frac{z}{\rho_z}\right) \qquad (9\text{-}55)$$

عزوم الانعطاف :

$$M_y = +\iint_F \sigma_x \, z\, dF = +E\left[\frac{1}{\rho_y}\iint_y yz\, dF + \frac{1}{\rho_z}\iint_z z^2\, dF\right] \qquad (9\text{-}56a)$$

$$M_z = +\iint_F \sigma_x \, y\, dF = E\left[\frac{1}{\rho_y}\iint_y y^2\, dF + \frac{1}{\rho_z}\iint_z yz\, dF\right] \qquad (9\text{-}56b)$$

بحل هاتين المعادلتين بالنسبة للقيم $1/\rho_y$, $1/\rho_z$ يتم التوصل للعلاقات التالية :

$$+\frac{1}{\rho_y} = \frac{-M_y I_{yz} - M_z I_{yy}}{E(I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} \qquad (9\text{-}57a)$$

$$+\frac{1}{\rho_z} = \frac{+M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{E(I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} \qquad (9\text{-}57b)$$

حيث **ان** I_{yz} , I_{zz} , I_{yy} هم عزوم العطالة للسطح F وهي قيم معلومة .

ان العلاقات السابقة هي معادلات خط الانعطاف (الخط المرن) للقضيب الموشوري في حالة الانعطاف المنحرف وهي تتضمن داخلها على معادلة الانعطاف المستقيم (9.4) باعتباره حالة خاصة.

تعريف الانتقالات :

v هو انتقال محور القضيب بالاتجاه الموجب للمحور y و

w هو انتقال محور القضيب بالاتجاه الموجب للمحور z .

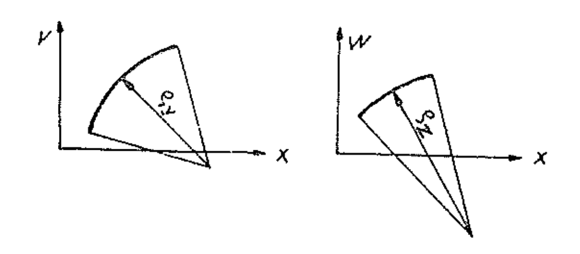
بهذا وحسب الشكل (9.52) ينتج الشكل (9.53) وبذلك ينتج :

$$v'' \approx -\frac{1}{\rho_y} = \frac{+M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{E(I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} \qquad (9\text{-}58a)$$

$$w'' \approx -\frac{1}{\rho_z} = \frac{-M_y I_{zz} - M_z I_{yz}}{E(I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} \qquad (9\text{-}58\ b)$$

مثـال 127 :

حمل جائز بارز (حامل بارز ، ظفر) مقطعه العرضي على شكل حرف L ، بحمولة وحيـدة تؤثر على نهايته الحرة (شكل 9.54) .

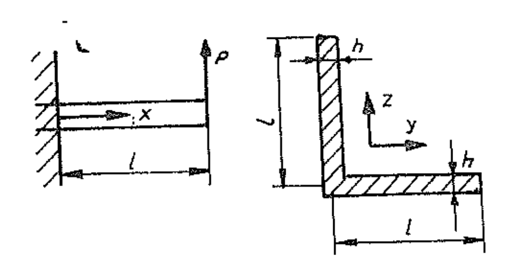


شكل 9.53

المعطى : الأبعاد حسب المخطط والحمولة P وعامل المرونة E .

المطلوب : حساب انتقال نقطة تأثير القوة P .

ملاحظة : القوة P تؤثر في مركز قص القطع العرضي ، اي لايتشكل في المقطع العرضي فتل. وكذلك تتحقق في المقطع العرضي $h<<1$.



شكل 9.54

الحـــل :

تثبت المحاور الاحداثية y , z كما يشير الشكل 9.54 .

عزوم الانعطاف :

$$M_y = - P\,(l-x) \quad ; \quad M_z = 0$$

عزوم العطالة :

$$I_y = I_{zz} = \frac{5}{24}\,l^3\,h \quad ; \quad I_{yz} = -\,\frac{3}{24}\,l^3\,h$$

بذلك تأخذ المعادلات التفاضلية (9 58) الشكل التالي :

$$v'' = +\,\frac{9}{2}\,\frac{P}{E\,l^3\,h}\,(l-x) \quad ; \quad w'' = +\,\frac{15}{2}\,\frac{P}{E\,l^3\,h}\,(l\ \ x)$$

شروط الاطراف :

$$v'(x=0)=0\ ;\ v(x=0)\ ;\ w'(x=0)=0\ ;\ w(x=0)=0$$

تعطي مكاملة المعادلات التفاضلية ، بعد تحقيقها لشروط الاطراف ، النتائج التالية :

$$v=+\frac{9}{2}\frac{P}{E\,l^3\,h}\left[\frac{1}{2}l\,x^2-\frac{1}{6}x^3\right]$$

$$w=+\frac{15}{2}\frac{P}{E\,l^3\,h}\left[\frac{1}{2}l\,x^2-\frac{1}{6}x^3\right]$$

من هذه العلاقات يتم التوصل ، بعد تبديل $x=l$ ، الى انتقال نقطة تطبيق القوة :

$$v_p=+\frac{9}{2}\frac{P\,l^3}{3\,E\,l^3\,h}=+\frac{9}{2}\frac{P}{3\,E\,h}$$

$$w_p=+\frac{15}{2}\frac{P\,l^3}{3\,E\,l^3\,h}=+\frac{15}{2}\frac{P}{3\,E\,h}$$

من هذه النتيجة يتبين ان الانتقال الناظمي على مستوي التحميل والانتقال باتجاه الحمولة هما من نفس المرتبة . للمقارنة سوف يتم حساب الانتقالات التي يعانيها بروفيـــل فولاذي على شكل حرف T له نفس ابعـاد المقطع العرضي السابق . بواسطة $I_{yy}=(5\ 24)\ (24\ 5)\ l^3\ h$ يتم التوصـل للقيم التالية :

$$w_p=\frac{24}{5}\frac{P\,l^3}{3\,E\,l^3\,h}=\frac{24}{5}\frac{P}{3\,E\,I}\ ;\quad v_p=0$$

بتقسيم انتقالي المقطعين العرضيين بالاتجاه z على بعض يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\frac{15}{2}:\frac{24}{5}=\frac{25}{16}$$

٩ ـ ١٤ الانعطاف المستقيم في القضبان المنحنية

فيما يلي سوف تتم دراسة جائز تتناظر فيه كافة الابعاد الهندسية والحمولات المؤثرة عليه بالنسبة لمستوي واحد كما وان خطه المركزي يرسم في المستوي المذكور قوساً دائرياً نصف قطره R_2 . ليكن المقطع العرضي للقضيب المدروس ثابت باتجاه ψ . يشير الشـكل (9.55) الى عنصرين

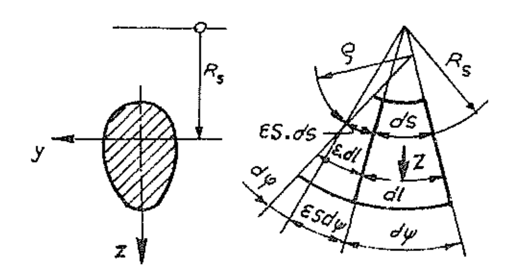
أحدهما قبل التغير (قبل تطبيق الحمولة) وثانيها بعد التغير (بعد تطبيق الحمولة) . من هذا الشكل يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$d\,l = (R_s + z)\, d\,\psi$$

$$\varepsilon\, d\,l = \varepsilon_s (R_s + z)\, d\,\psi + z\, d\varphi$$

منها ينتج :

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \frac{d}{d\psi}\,\frac{z}{R_s + z} \qquad (9\text{-}59)$$



شكل 9.55

أما قانون هوك فيأخذ ، بعد إدخال العلاقة (59 9) فيه بعين الاعتبار ، الشكل التالي :

$$\sigma = E\,\varepsilon = E\,\varepsilon_s + E\,\frac{d\varphi}{d\psi}\cdot\frac{z}{R_s + z} \qquad (9\text{-}60)$$

ردود أفعال القطع (قيم القطع) :

$$N = +\int_F \sigma\, dF = E\,\varepsilon_s \int_F dF + E\,\frac{d\varphi}{d\psi}\int_F \frac{z}{R_s + z}\, dF \qquad (9\text{-}61)$$

$$M = +\int \sigma\, z\, dF = E\,\varepsilon_s \int z dF + E\,\frac{d\varphi}{d\psi}\int \frac{z^2}{R_s + z}\, dF \qquad (9\text{-}62)$$

ان النقطة ذات الاحداثيات $y=0$, $z=0$ هي مركز ثقل سطح المقطع العرضي F . من اجلها تصلح العلاقة التالية :

$$\int_F z\, dF = 0 \qquad \text{(العزم الستاتيكي)}$$

علاوة على ذلك ورغبة في الاختصار سوف يتم اجراء الاختصار التالي :

$$\int_F \frac{z^2}{1 + \frac{z}{R_s}} dF = Y \qquad (9\text{-}63)$$

بذلك ينتج :

$$\int_F \frac{z}{R_s + z} dF = \frac{1}{R_s} \int_F \frac{z (R_s + z) - z^2}{R_s + z} dF = - \frac{Y}{R_s^2}$$

بعد اخذ هذه المعادلات بعين الاعتبار وبعد حل العلاقات (9 61) , (9 62) بالنسبة للقيم ε_s و $d\varphi/d\psi$ يتم التوصل للنتيجة التالية :

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = + \frac{M}{EY} R_s \qquad (9\text{-}64)$$

$$\varepsilon_s = + \left(N + \frac{M}{R_s}\right) \frac{1}{EF} \qquad (9\ 65)$$

بتبديل هذه العلاقات في العلاقة (9.60) يتم التوصل لمعادلة الاجهاد :

$$\sigma = \left(N + \frac{M}{R_s}\right) \frac{1}{F} + \frac{M}{Y} \frac{z}{1 + \frac{z}{R_s}} \qquad (9\text{-}66)$$

لحساب نصف قطر الانحناء ρ للحالة المتغيرة سوف يعاد النظر في الشكل (9.55) ثانية :

$$(1 + \varepsilon_s)\, ds = R_s (1 + \varepsilon_s)\, d\psi = \rho\, (d\psi + \varepsilon_s\, d\psi + d\varphi)$$

من هذه العلاقة وبواسطة :

$$\varepsilon_s << 1$$

يتم التوصل لما يلي :

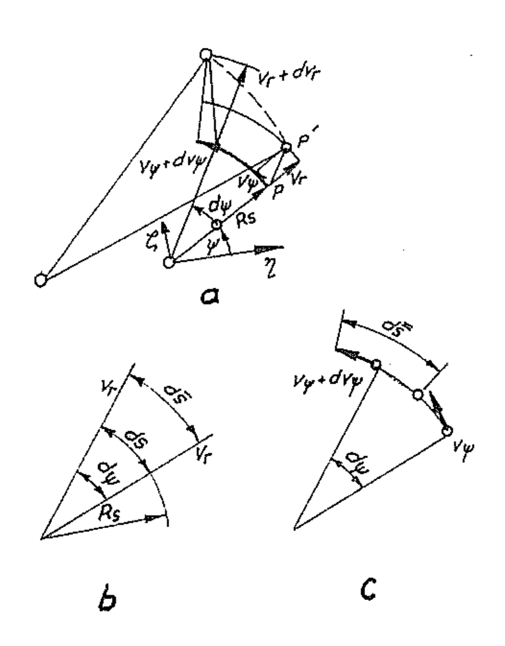
$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{R_s} \left(1 + \frac{d\varphi}{d\psi}\right) \approx \frac{1}{R_s} + \frac{M}{EY} \qquad (9\text{-}67)$$

نتيجة للتحميل فان القضيب المنحني سوف يعاني تغييراً يؤدي لان تنتقل نقطة ما منـه ولتكن النقطة P والواقعة على الخط المركزي بالاتجاهين ψ , r (شكل 9.56 a) .

v_r الانتقال بالاتجاه القطري او بالاحرى بالاتجاه z .

v_ψ الانتقال بالاتجاه ψ .

ان v_r وكذلك أيضاً v_ψ تتعلق من ψ فقط .



شكل 9.56

ان احداثيات النقطة P' هي :

$$\eta = + (R_s + v_r) \cos \psi - v_\psi \sin \psi$$
$$\zeta = + (R_s + v_r) \sin \psi + v_\psi \cos \psi \qquad (9.68)$$

يرسم تتابع النقطة p' المحور المركزي المتغير ، الذي يحسب نصف قطر انحناءه $1/\rho$ حسب القاعدة المعروفة التالية :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{\eta}\ \ddot{\zeta} - \ddot{\eta}\ \dot{\zeta}}{(\dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2)^{3/2}} \quad , \quad (\ )^{\cdot} = \frac{d(\ )}{d\psi} \qquad (9.69)$$

بتبديل العلاقة (9.68) في العلاقة (9.69) يتم الحصول على علاقة معقدة . لكن اذا ما روعيت فيها حقيقة كون $v_r , v_\psi << R_s$ (تغيرات صغيرة) ثم اهملت لهـــذا السبب القيم ذات الاس العالي (ذات القوة العالية) من V_r , V_ψ ومشتقاتها فانه ينتج :

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{R_s} \frac{1 + \frac{1}{R_s} \left(2 v_r - \ddot{v}_r + 3 \dot{v}_{\psi} \right)}{\left[1 + \frac{2}{R_s} \left(v_r + \dot{v}_{\psi} \right) \right]^{3/2}}$$

بالاستعانة بمنشورة أسية من أجل المخرج دبعد ايقافها يتم الحصـــول من العلاقة السابقة على العلاقة الآتية

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{R_s} \left[1 + \frac{1}{R_s} \left(2 v_r - \ddot{v}_r + 3 \dot{v}_{\psi} \right) \right] .$$

$$. \left[1 - \frac{3}{R_s} \left(v_r + \dot{v}_{\psi} \right) \right] \approx \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_s{}^2} \left(v_r + \ddot{v}_r \right) \quad (9\text{-}70)$$

بمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة (9.67) يتم التوصل الى معادلات تفاضلية من أجل V_r يعـبر عنها بالشكل التالي :

$$\ddot{v}_r + v_r = - \frac{M R_s{}^2}{EY} \quad (9\ 71)$$

يأخذ المحور المركزي المتغير (بعد التغير) انحناء جديداً يختلف عن الانحناء قبل التغير وكذلك يأخذ طولا جديداً يختلف عن طولالمحور المركزي غير المتغير (قبل التغير) . حسب الشكل (2.50 فان انتقالا ما يسبب (تمدداً) تغيراً نسبياً طولياً يبلغ :

$$\bar{\varepsilon}_s = \frac{d\bar{s} - ds}{ds} = \frac{\left(R_s + v_r \right) d\psi - R_s d\psi}{R_s d\psi} = \frac{v_r}{R_s}$$

كما يسبب الانتقال v_{ψ} التغير النسبي الطولي (التمدد) التالي :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_s = \frac{d\bar{\bar{s}} - ds}{ds} = \frac{\left(ds + dv_{\psi} \right) - ds}{ds} = \frac{1}{R_s} \frac{dv_{\varphi}}{d\psi}$$

(بما أن مفعول التغير $d\,v_r$ هو من المرتبةالثانية اذاً فهو صغير ولذلك يمكن اهماله) . يبلغ التمدد الطولي الكلي (التغير النسبي الطولي الكلي) القيمة التالية :

$$\varepsilon_s = \bar{\varepsilon}_s + \bar{\bar{\varepsilon}}_s = \frac{1}{R_s} \left(v_r + \dot{v}_{\psi} \right) \quad (9.72)$$

بمقارنة هذه المعادلة مع العلاقة (9.65) ينتج :

$$\dot{v}_\psi = +\left(N + \frac{M}{R_s}\right)\frac{R_s}{EF} - v_r = \frac{dv_\psi}{d\psi} \qquad (9.73)$$

بواسطة العلاقتين (9.71) , (9.73) تتشكل معادلتين لحساب v_r , v_ψ .

مثـال 128 :

حمل جائز حلقي (حامل حلقي) بخمسة حمولات وحيدة تبلغ قيمـة كل منها 2P وذلك كما يشير الشكل (9.57) .

المعطى : n , EF , EY , R_s حمولة متساوية يبلغ كل منها 2P وتبعد الواحـــدة عن الاخرى بالمسافة الزاوية $2\alpha = 2\pi/n$ (يصلح الشكل 9.57 من أجل $n=5$) .

المطلوب : حساب ردود أفعال القطع (قيم القطع) والانتقالات .

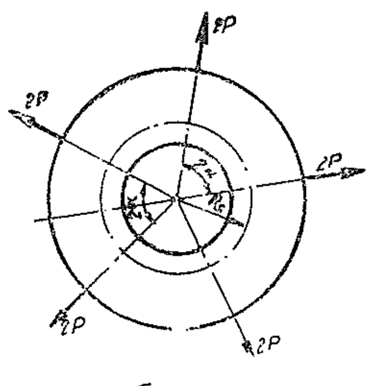
الحـــل :

بسبب التناظر تكفي دراسة الجزء الذي يتـــحدد بواسطة الزاوية $0 \leqq \psi \leqq \alpha$ فقط (شكل 9.58) ، وبسبب التناظر تنعدم القوى العرضية عند النقاط $\psi=0$, $\psi=\alpha$. يعطي تطبيـق شروط التوازن على الجملة الجزئية الممثلة في الشكل (9.58) العلاقات التالية :

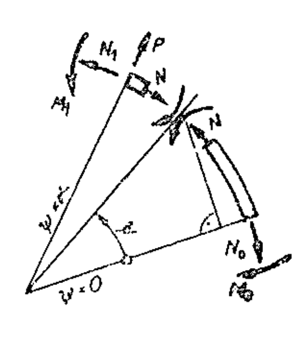
$$+ P \sin\alpha + N_1 \cos\alpha - N_0 = 0$$

$$+ P \cos\alpha - N_1 \sin\alpha = 0$$

$$+ M_1 - M_0 - N_0 R_s (1 - \cos\alpha) = 0$$



شكل 9.57



شكل 9.58

منها ينتج :

$$N_1 = + P ctg\, \alpha \qquad ; \quad M_1 = M_0 + PR_s \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$N_0 = + P \frac{1}{\sin\,\alpha} \qquad , \quad M_0$$ (قيمة غير مقررة ستاتيكيا)

كما يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطـع المشار اليه في الشكل (9.58) العلاقات الآتية :

$$N = N_0 \cos\psi \; ; \; M = + N_0 R_s (1 - \cos\psi) + M_0$$

بذلك تأخذ المعادلات (9.71) و (9 73) شكلها الجديد :

$$\overline{v}_r + v_r = - \frac{R_s}{EY} \left[\frac{M_0}{R_s} + N_0 (1 \quad \cos\varphi) \right]$$

$$\dot{V}\psi = + \frac{B_s^3}{EF} \left[\frac{M_0}{R_s} + N_0 \right] - v_r$$

ان الحل العام للمعادلة التفاضلية الاولى هو :

$$v_r = - \frac{R_s^3}{EY} \left[D\cos\psi + B\sin\psi - \frac{1}{2} N_0 \psi \sin\psi + \left(N_0 + \frac{M_0}{R_s} \right) \right]$$

بتبديل هذه النتيجة في المعادلة التفاضلية الثانية ومن ثم مكاملتها ينتج ما يلي :

$$V_\psi = + \frac{R_s}{EF} \left[\left(N_0 + \frac{M_0}{R_s} \right) \psi + C \right] + \frac{R_s^3}{EY} \, .$$

$$. \left[D\sin\psi - B\cos\psi - \frac{1}{2} N_0 (\sin\psi - \psi\cos\psi) + \left(N_0 + \frac{M_0}{R_s} \right) \psi \right]$$

بتحقيق العلاقات السابقة لشروط الاطراف التالية :

$$v_r (\psi = 0) = v_r (\psi = \alpha) = 0 \; ; \; v\psi (\psi = 0) = v\psi (\psi = \alpha) = 0$$

يتم التوصل للمعادلات الاربعة الآتية :

$$+ B \qquad\qquad = 0$$

$$- D\sin\alpha + B\cos\alpha \qquad = + \frac{1}{2} N_0 (\sin\alpha + \alpha\cos\alpha)$$

$$-B \qquad +\Phi C \qquad\qquad = \quad 0$$

$$+D\sin\alpha - B\cos\alpha + \Phi C + \alpha(1+\Phi)\left(N_0 + \frac{M_0}{R_s}\right) = +\frac{1}{2}N_0(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

لقد تم في المعادلة السابقة استخدام الاختصار $\Phi = Y/FR^2$ بحل مجموعة المعادلات الخطية السابقة يتم التوصل للنتيجة التالية :

$$D = -\frac{1}{2}N_0(1+\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha) \quad ; \; B = C = 0$$

$$\left(N_0 + \frac{M_0}{R_s}\right) = \frac{N_0}{1+\Phi}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

بتعويض هذه النتائج في علاقات حساب v_r ، v_ψ يتم أخيراً التوصل الى علاقات الانتقالات النهائية :

$$v_r = +\frac{PR_s^3}{2EY}\,\frac{1}{\sin\alpha}\left[\psi\sin\psi + \cos\psi\,(1+\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha) - \frac{2}{1+\frac{Y}{FR_s^2}}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]$$

$$v_\psi = +\frac{PR_s^3}{2EY}\left[\frac{\psi}{\alpha}\left(2+\alpha\frac{\cos\psi}{\sin\alpha}\right) - \frac{\sin\psi}{\sin\alpha}\left(2+\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha\right)\right]$$

أما ردود أفعال القطع (قيم القطع) فتبلغ :

$$N = N_0\cos\psi = +P\frac{\cos\psi}{\sin\alpha}$$

$$M = +N_0R_s(1-\cos\psi) + M_0 = R_s\left[\left(N_0 + \frac{M_0}{R_s}\right) - N_0\cos\psi\right] =$$

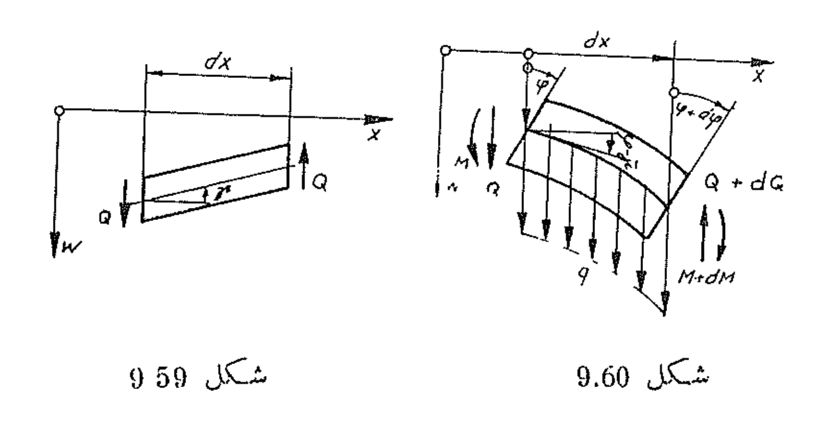
$$= +PR_s\left[\frac{1}{1+\frac{Y}{FR_s^2}}\,\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos\psi}{\sin\alpha}\right]$$

٩ ـ ١٥ بعض المزايا الخاصة في الانعطاف

سوف يتم في هذه الفقرة التعرض لبعض الحالات الخاصة التي لا تصلح من أجلها معادلات الانعطاف المدروسة فيما سبق وكذلك التعرض لبعض الحالات الخاصة التي تحتاج من أجلها تلك المعادلات لبعض التعديلات .

٩ ـ ١٥ ـ ١ القضيب القصير ـ تأثير التغير القصي

ان الفرضية التي تم استخدامها في كل الفقرات السابقة لهذا الفصل والتي تنص على بقاء المقاطع العرضية مستوية وناظمية على محور القضيب هي صحيحة فقط عندما تنعدم القوة العرضية (لا توجد قوة عرضية) . حسب الفصل 10 ينتج عن القوة العرضية Q وضع مائل وسطي للمقطع العرضي (انزلاق وسطي للمقطع العرضي) بالنسبة لمحور القضيب . يشير الشكل (59 9) الى التغير القصي الصافي الذي يندر أن يظهر لوحده . أما الشكل (9.60) فيشير الى التغير الكلي الذي يقوم به العنصر dx نتيجة تأثير الانعطاف والقص (ينبغي المقارنة بينه وبين تغير الانعطاف الصافي حسب الشكل 9-51).



شكل 59 9

شكل 9.60

بعد افتراض انعطاف مستقيم تصلح المعادلات التالية :

حسب المعادلة (9.4) والاشكال (9.1) , (9.60) ينتج :

$$\frac{M}{EI} = + \frac{1}{\rho} = + \frac{d\varphi}{ds} \approx \frac{d\varphi}{dx} = \varphi' \qquad (9\text{-}74)$$

بالاستعانة بالشكل (9.60) ينتج كذلك ايضاً :

$$w' = \frac{dw}{dx} = - \varphi + \bar{\gamma} \qquad (9\ 75)$$

وباعتبار المعادلة التالية :

$$\bar{\gamma} = \frac{Q}{GF_s} \qquad (9\text{-}76)$$

يتم التوصل لما يلي :

$$\frac{Q}{GF_s} = \bar{\gamma} = \varphi + w' \tag{9-77}$$

في حالة كون ردود الافعال M , Q معلومة فان العلاقتين (9.74) , (9,77) تشكل معادلتين لتعيين φ , w كتابع للمتغير x . ينبغي مراعاة الانتباه الى صلاحية $w' \neq \varphi$ في حالة ادخال التغيير القصي بعين الاعتبار . باختزال φ من العلاقتين (9 74) , (9,77) ينتج :

$$w'' = - \frac{M}{EI} + \left(\frac{Q}{GF_s} \right)' \tag{9-78}$$

مثال 129 :

أثرت على النهاية الحرة لجائز بارز (حامل بارز ، ظفر) قوة وحيدة P (شكل 9.61).

المعطى : P , $E=2(1+\mu)G$, h , b , l .

المطلوب : حساب

١ ـ انتقال الخط الاوسط (المحور الاوسط للقضيب) $w(x)$.

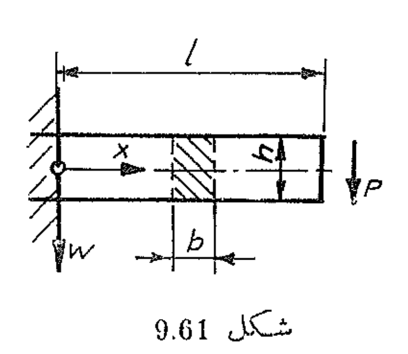
٢ ـ ميل المقاطع العرضية $\varphi(x)$.

وذلك بعد ادخال التغير القصي بعين الاعتبار .

الحل :

ستتم في هذا المثال دراسة تأثير التغير القصي على الانتقال الشاقولي w .

قيم القطع (ردود افعال القطع) (شكل 9.60) :



شكل 9.61

$$Q = +P \quad ; \quad M = -P\,(l - x)$$

بعد تبديل قيم القطع في المعادلة التفاضلية (9.74) يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\varphi = -\frac{P}{EI}\left[\,l\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + C_1\right]$$

أما المعادلة (9.77) فتؤدي ، بعد تبديل قيم القطع فيها ، للنتيجة التالية :

$$w = \int w'\,dx = -\int \varphi\,dx + \int \frac{Q}{GF_s}\,dx = w_B + w_s$$

حيث أن w_B هو الانتقال الشاقولي الناتج عن الانعطاف (الحد الناتج عن الانعطاف) .
أما w_s فهو الانتقال الشاقولي الناتج عن التأثير القصي .(الحد الناتج عن القـوة العرضيـة) .
بعد مكاملة العلاقة ينتج :

$$w = +\frac{P}{EI}\left[\,\frac{1}{2}\,l\,x^2 - \frac{1}{6}\,x^3 + C_1\,x + C_2\,\right] + \frac{Q}{GF_s}\,x$$

شروط الاطراف :

$$w\,(x = 0) = 0 \qquad ; \quad C_2 = 0$$

$$\varphi\,(x = 0) = (w'\,(x = 0)) = 0 \qquad ; \quad C_1 = 0$$

النتائج :

$$w\,(x) = \frac{Pl^3}{2\,EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad \frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right] + \frac{Pl}{GF_s}\left(\frac{x}{l}\right) +$$

$$= \frac{Pl^3}{2EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{2\,EI}{GF_s l^2}\left(\frac{x}{l}\right)\right]$$

$$\varphi\,(x) = -\frac{Pl^2}{EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

من أجل المقطع العرضي مستطيل الشكل يبلغ تأثير التغير القصي :

$$\frac{2EI}{GF_s l^2} = \frac{2}{5}\,(1+\mu)\left(\frac{h}{l}\right)^2$$

تعطي القيمة السابقة تأثير التغير القصي على الانتقال الشاقولي w وتأخذ قيمة مذكورة لا يستهان

بها ولا يجوز إهمالها عندما تكون h/l صغيرة جداً . من العلاقة السابقة يتم التوصل للنتيجـــة التـــالية :

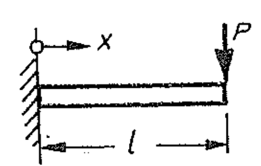
يأخذ التغير القصي في القضبان القصيرة قيمة لا يستهان بها

مثال 130 :

حمل جائز بارز (حامل بارز، ظفر) بحمولة وحيدة P تؤثر على نهايته الحرة (شكل 9 62). يتألف المقطع العرضي للجائز إما من مستطيل أو من بروفيل على شكل حرف I .

المعطى : أبعاد المقطعين العرضيين المذكورين E , P .

المطلوب : المقارنة بين تأثير التغير القصي على الانتقال الشاقولي w للمقطعين العرضيين ، المستطيل الشكل والبروفيل على شكل حرف I .



شكل 9.62

الحل :

بعد ان تمت دراسة المعادلة الكلاسيكية لميل المماس على خط الانعطاف $w'=-\varphi$ دراسة مفصلة ينبغي الآن العودة الى البداية مرة ثانية وطرح السؤال حول التغير القصي . تختفي وراء المعادلة التي تدخل تأثير التغير القصي بعين الاعتبار :

$$w' = -\varphi + \frac{Q}{GF_s} \tag{9-79}$$

مشكلتان هما أ ـ ماقيمة F_s من اجل مقطع عرضي مستطيل ومن اجل بروفيل بشكل حرف I او من اجل اي مقطع عرضي كيفي .

ب ـ في حالة كون F_s معلومة فما هي قيمة تأثير التغير القصي على الانتقال الشاقولي w .

تترك الاجابة على السؤال أ ـ للذين يرغبون التضلـع والتعمق في حساب الانشاءات ولا داعـي

في هذا الكتاب المخصص لطلاب المهارة الدخول في التفاصيل الدقيقـة ، أما السؤال ب ـ فتتم الاجابة عليه كالتالي :

يتألف الانتقال الشاقولي الكلي من حد ناتج عن الانعاف w_B وحد أخر ناتج عن الانزلاق الحد القصي) w_s . اذ أن :

$$\gamma = \frac{Q}{GF_s}$$

هو الانزلاق الوسطي للمقطع العرضي . من اجل الجائز البارز يمكن تبديل قـيم القطـع $M=-P(l-x), Q=+P=const$ وكذلك تبديل $GF_s=const$ في المعادلة (9.79) وبعد اجراء المـكاملات اللازمة ، يتم الحصول على معادلة الانتقال الشاقولي w_s وبتبديل $x=l$ فيها يتم التوصل للانتقال الشاقولي للنهاية الحرة من الجائز :

$$f_s = \frac{P\,l}{GF_s}$$

بذلك يبلغ الانتقال الشاقولي الكلي الأعظمي القيمة التالية :

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{GF_s} = \frac{Pl^3}{3EI}\left[1+\frac{3E}{G}\frac{F}{F_s}\left(\frac{i}{l}\right)^2\right] = \frac{Pl^3}{3EI}\left(1+\frac{C}{\lambda^2}\right)$$

يتعلق عامل التصحيـح من نحافة الجائز $\lambda = \frac{i}{l}$ ($i = \sqrt{\frac{I}{F}}$ نصف قطر المطالة) . اما C فهو العامل الاولى وهو يمثل الاختصار :

$$C = \frac{3E}{G}\,\frac{F}{F_s} \approx 8\,\frac{F}{F_s}$$

من أجل المستطيل(ومن اجل كل البروفيلات الغليظة) تبلغ $\frac{F}{F_s} \approx 1{,}2$ (يمكن البرهـان على هـذه القيمة عند الاجابة على الطلب أ ـ) ومن أجل بروفيل على شكل حرف I حيث يستعاض عن F_s بمساحة الجسد ، تبلغ(في حالة البرفيلات ذات الاجنحة العريضة) $\frac{F}{F_s} \approx 4$. بذلك تبلغ اذاً: من اجل المستطيل (العرض b والارتفاع h) $C \approx 10$ من أجل بروفيل على شكل حـرف I (عرضه b وارتفاعه h) $C \approx 30$.

بالاستعانة بأنصاف أقطار المطالة :

$i = \frac{h}{2\sqrt{3}}$ للمستطيل و $i \approx 0{,}4\,h$ للبروفيل على شكل حرف I يتم التوصل للقيم التالية :

$\lambda = 17$ (المستطيل) $\lambda = 12$ (للبروفيل على شكل حرف I) وبفضلها يتم التوصـــل للقيم التالية :

$\frac{C}{\lambda^2} \approx 0{,}03$ (للمستطيل) $\frac{C}{\lambda^2} = 0{,}20$ (للبروفيل على شكل حرف I). من هذه

العلاقة يتبين ان عامل التصحيح صغير ولكن دون شك لا يجوز اهماله في الجيزان البروفيلية . بأخذ التغير القصي بعين الاعتبار ينبغي حينئذ في الجيزان التي تحتوي على عـدة مجالات ، على سبيل المثال الجيزان المستمرة (شكل 9.63) ، التعبير عن شروط التحول (من مجال لمجال آخر) بشكل واضح :

ففي نقطة الالتحام (نقطة التقاء المجالين) تتحول الزاوية φ (عدا عن w) بشكل مستمر . أما w' فتقفز كما يشير الشكل اللاحق عندما تقفز Q .



شكل 9.63

٩ ـ ١٥ ـ ٢ القضيب العريض ـ تأثير التقاص العرضي

أثناء دراسة القضبان المنعطفـة (المحملة على الانعطاف) التي تمت حتى الآن تم تعويـض $\sigma_y = \sigma_z = 0$. بسبب توزيع الاجهاد الناظمي (في الانعطاف المستقيم البسيط ، أي بـدون قوة ناظمية) حسب العلاقة :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

ينتج حسب قانون هوك :

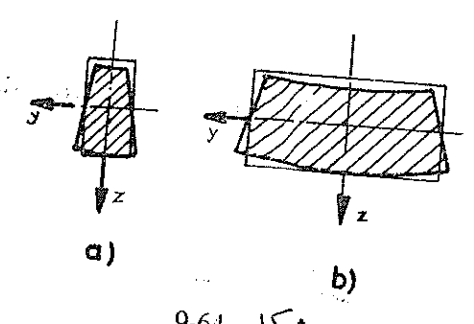
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right] = + \frac{M_y}{EI_{yy}} z$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] = -\frac{\mu M_y}{EI_{yy}} z$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = -\frac{\mu M_y}{EI_{yy}} z$$

هذه العلاقات تعني ان مقطعاً عرضياً مستطيل الشكل وليس عريضاً جداً يتغير حسب الشكل (9.64a) . في حالة المقاطع العرضية العريضة جداً يمكن أن يتم التغير الاتجاه z بدون إعاقة، اما التغير بالاتجاه y فلا يمكن ان يتم بدون اعاقة . لذلك ينبغي في المقاطع العرضية ذات العرض الحدي (العريضة جداً) الانطلاق من الافتراض ان :

$$\varepsilon_y = 0 \tag{9.80}$$



شكل 9.64

بحيث يصبح $\sigma_y \neq 0$ اما افتراض $\sigma_z = 0$ فيمكن ، على العكس من ذلك ، الاحتفاظ به ، وبذلك ينتج :

$$\sigma_y = +\mu\,\sigma_z \tag{9.81}$$

و

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}(1 - \mu^2) = +\frac{M_y}{EI_{yy}}(1 - \mu^2)\,z \tag{9.82}$$

تختلف هذه المعادلة التي تصلح من اجل المقاطع العرضية العريضة عن المعادلة التي تصلح من اجل المقاطع العرضية الضيقة بالعامل $(1 - \mu^2)$. ومنه ينتج :

يمكن ادخال تأثير اعاقة التقلص العرضي (في المقاطع العرضية العريضة) في الحساب بعين الاعتبار وذلك باستبدال عامل المرونة الفعلي E بعامل المرونة المستعاض :

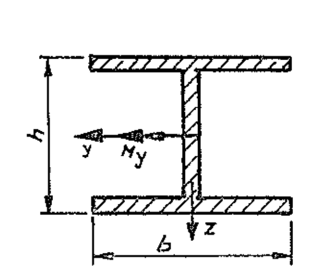
$$E^* = \frac{E}{1 - \mu^2}$$

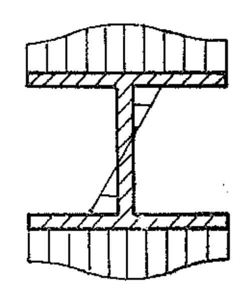
٩ ـ ١٥ ـ ٣ العرض المشارك في الحمل (العرض المساعد في الحمل)

ليكن القضيب المدروس محمـلا على الانعطـاف المستقيم وليكن مقطعه العرضي هـو بروفيل على شكل I (شكل 9.65a) . حسب نظرية الانعطاف الاوليـة (elementaren Theorie) كان يعبر عن الاجهاد الناظمي في المقطع العرضي بواسطة العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

وهي تعني ان الاجهاد الناظمي σ_x في كامل جناح المقطع العرضي ثابت (σ_x=const) الا ان الدراسات الدقيقة اكدت عدم صحة ذلك الكلام من اجل المقاطع العرضية ذات الاجنحـــة العريضة (في الحالة الحدية عندما يكون b>>h) كما تشير هـذه الدراسات الى ان توزيـع الاجهاد الـناظمي σ_x هناك كما هو ممثل في الشكل (9 65 b) ، وهذا يعني ان جزء الجناح الذي يبعد عن الجسد هو في الحقيقة اقل اجهاداً مما يتم حسابه بواسطة النظرية الاولية المستعملة او بتعبير آخر (وذلـك لوجوب احتفـاظ عزم الانعطاف الكلي بقيمتـه) ، ان التحمـل الاعظمي الفعلي للعناصر (للاعضاء) الحاملة ذات الاجنحة العريضة اكبر من التحمل الاعظمي المحسوب بواسطة نظرية الانعطـاف الاوليـة . لتفادي هـذه الفروق وادخالهـا بعين الاعتبـار يستعاض ، في الحساب ، عن عزم العطالة الفعلي بعزم العطالة الفعـال الذي يدخـل في الحساب جزءاً من الجنـاح فقـط (وليس كله) ، يسمى هـذا الجـزء **بالعرض المشارك في الحمـل (العرض المساعد على الحمـل)** (Die mittragende-Breite) . ان العرض المشارك في الحمـل (المساعد في الحمل) هو دائماً اصغر من العرض الكلي وهو لا يتعلق فقط من المقطع العرضي وإنما يتعلق ايضاً من الحمولات ومن استناد الجائز اما حسابه فهو معقد جداً ولذلـك لا يمكن ادخاله ضمن محتوي هذا الكتاب .





شكل 9.65

٩ ـ ١٥ ـ ٤ انعطاف الانابيب المنحنية

اذا عطف انبوب منحني في مستوي انحناءه ، حسب الفقرة ٩ ـ ١٤ ، فالعلاقات المشتقة هناك لا تصلح إلا عندما يكون الانبوب سميك الجدار (ذو جدار سميك) لان الانبوب المنحني رقيق الجدار مرن اكثر بكثير مما يتم توقعه حسب نظرية الانعطاف الاولية المستعملة ، وهـذا ناتـج عن ان المقطع العرضي ذو الاصل الدائري الشكل يتحول بسبب اجهادات الانعطاف (الاجهادات الناظمية الناتجة عن الانعطاف) الى اهليلج (Oval) (شكل 9.66) . فبالرغـم من ان التفلطح المذكور ضئيلاً (طفيفاً) لكنه يؤدي لنتائج كبيرة . بالاستعاضـة عن المعـادلة (9.67) بالعلاقة التالية :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{k}\,\frac{M}{EI}$$

حيث ان k هو عامل التصحيح ولا يمكن حسابه إلا بشكل تقريبي وكتابع للقيمة المعلومة λ فقط:

$$\lambda = \frac{R_s t}{a^2}$$

حيث ان :

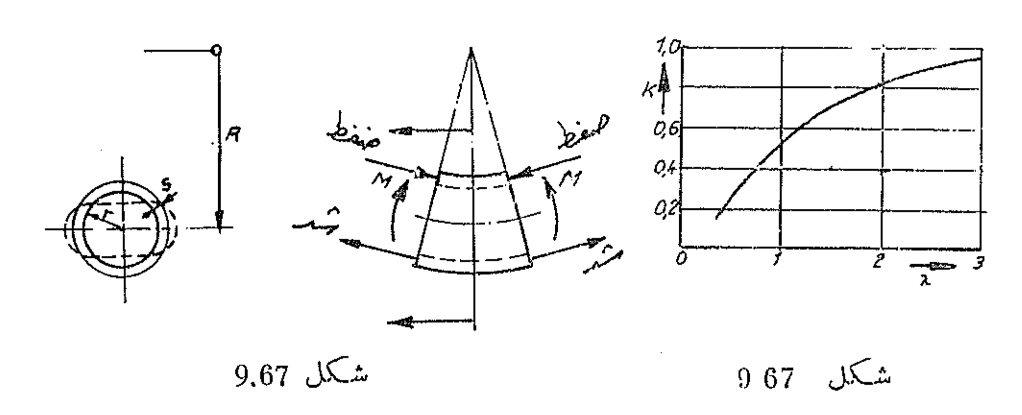
R_s هو نصف قطر انحناء الخط الاوسط (المحور الاوسط) للانبوب غير المتغير (قبل التغير) و

ρ هو نصف قطر انحناء الخط الاوسط (المحور الاوسط) للانبوب المتغير (بعد التغير) و

t هي سماكة جدار الانبوب و

a هو نصف القطر الاوسط لمقطع الانبوب العرضي (للمقطع العرضي للانبوب) .

يعطي الشكل (9.67) بعض القيم المساعدة لعامل k .

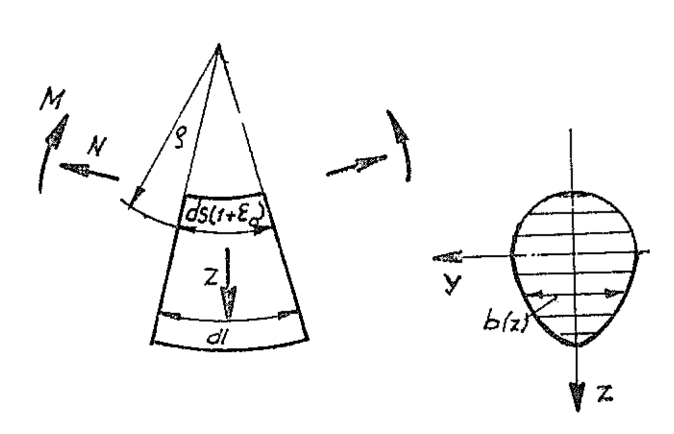


شكل 9.67   شكل 9.67

٩ ـ ١٥ ـ المواد غير المتجانسة

تصلح كل العلاقات التي تم اشتقاقها حتى الآن للمواد المتجانسة المتماثلة (المتشابهة) المناحي .
سيحاول الآن شرح العلاقات التي تصلح من اجل المواد غير المتجانسة بالاعتماد على مثال بسيط.
ليكن القضيب المدروس مستقيما ومتناظراً بالنسبة للمحور $y=0$ وعامل مرونته E يتعلق من المحور z (تابع للمحور z) وليكن القضيب محملا بقوة ناظمية (قوةطولية)N وعزم انعطافM .
يمكن هنا ايضاً (كما تم الفقرة 9.1) ، الافتراض ان المقاطع العرضية تبقى مستوية وناظمية ، لكن ينبغي هنا عدم التوقع بان تبقى (كـذلك ايضاً عنـدما يمثل $z=0$ مركز ثقـل المقطع العرضي) المحاور (الالياف) $z=0$ عديمة الاستطالة . كما لن يطالب بأن يكون

$$\int z\, dF = 0$$



شكل 9.68

من الشكل (9.68) يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\frac{dl}{\rho+z} = \frac{ds\,(1+\varepsilon_0)}{\rho}$$

أو :

$$\frac{dl}{ds} = (1+\varepsilon_0)\left(1+\frac{z}{\rho}\right)$$

يبلغ التغير النسبي الطولي (التمدد) لنقطة ما من المقطع العرضي تقع على بعد z ،القيمة التالية:

$$\varepsilon_x = \frac{dl-ds}{ds} = \frac{dl}{ds} - 1 = \varepsilon_0 + \frac{z}{\rho}\,(1+\varepsilon_0) \qquad (9\ 83)$$

أما قانون هوك للاجهادات الناظمية فيصلح هنا ايضاً،ولكن بتغير بسيط هو ان $E=E(z)$:

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = E\,\varepsilon_0 + E\frac{z}{\rho}(1+\varepsilon_0) \qquad (9\text{-}84)$$

ان ردود افعال القطع (قيم القطع) التي تعتبر محصلات للاجهاد هي :

$$N = \int \sigma_x\, dF = \varepsilon_0 \int b\, E dz + (1+\varepsilon_0)\frac{1}{\rho}\int bE\, z dz \qquad (9\cdot 85)$$

$$M = \int \sigma_x\, z\, dz = \varepsilon_0 \int b\, E z\, dz + (1+\varepsilon_0)\frac{1}{\rho}\int b\, E\, z^2\, dz \qquad (9.86)$$

من المناسب ، هنا ، المطالبة بتحقيق العلاقات التالية :

$$\int b\, E\, z\, dz = \int E\, z\, dF = 0 \qquad (9\ 87)$$

تمثل هذه المطالبة ما يشبه تثبيت مركز الثقل . بهـذا الفرض يتـم التوصل ، من العـــلاقة (9 85) الى تمدد المحور $z=0$:

$$\varepsilon_0 = +\frac{N}{\int b\, E dz} = \frac{N}{\int E\, dF} \qquad (9\text{-}88)$$

وحسب العلاقة (9 86) فان انحناء المحور المتغير $z=0$ (عندما تهمل $\varepsilon_0 << 1$)يصبح :

$$\frac{1}{\rho} = +\frac{M}{\int bE\, z^2\, dz} = \frac{M}{\int E\, z^2\, dF} \qquad (9.89)$$

عندما تكون التغيرات صغيرة ، يتم التوصل كالمعتاد للعلاقة التالية :

$$\frac{1}{\rho} = \pm\, w' \qquad (9\ 90)$$

كما ان علاقة حساب الاجهاد الناظمي تأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_x = \frac{EN}{\int E\, dF} + \frac{E\, M_z}{\int E\, z^2\, dF} \qquad (9.91)$$

من هذه العلاقة يتبين ان الاجهاد الناظمي الذي تسببه القوة النـاظمية N ليس ثابتاً (ليس ثابت التوزيع) على المقطع العرضي كما ان الاجهاد الناظمي الناتج عن عزم الانعطاف M ليس خطياً (ليس خطي التوزيع) على المقطع العرضي وذلك لكون $E=E(x)$.

تصلح العلاقات المستخرجةفي هذه الفقرة ايضاً عندما يكون تابع عامل المرونة E غير مستمر .

الفصل العاشر

التحميل القصي في الانعطاف (نتيجة للقوة العرضية)

١٠ ـ ١ عموميات

لقد تم في الفصل التاسع اشتقاق معادلات الانعطاف الصافي (reine Biegung) أو ما يسمى ايضاً بالانعطاف الخالي من القوة العرضية (querkraftfreie Biegung) . عندما يكون طول الجائز ، الحامل) بالنسبة لابعاد المقطع العرضي كبيراً فبالامكان ايضاً استخدام العلاقات المشتقة هناك لحساب اجهادات الانعطاف Biegespannungen (أي الاجهادات الناظمية الناتجة عن الانعطاف) وذلك عندما تؤثر ايضاً قوة عرضية على الجزء المدروس من الجائز . تحسب الاجهادات المماسية التي تنشأ عن القوة العرضية (القوة القاطعة ، قوة القص) بواسطة العلاقات التي سوف تستخرج في هذا الفصل ، اما قيم الاجهادات الناظمية والاجهادات المماسية المحسوبة بهذه الطريقة فانها تتطابق بدقة مع القيم الفعلية ومع قيم التجارب .

١٠ ـ ٢ الإجهادات المماسية في الانعطاف البسيط

ينبغي ان تتحقق في الجائز المدروس الصفات التالية :

١ ـ المقطع العرضي باتجاه محور القضيب ثابت (القضيب موشوري) .

٢ ـ اتجاه القوة العرضية يوازي أحد المحاور الرئيسية للمقطع العرضي .

٣ ـ الاجهادات المماسية في المقطع العرضي تؤثر بموازاة القوة العرضية . لا ينطبق هذا الشرط بدقة وخاصة على حافة المقاطع العرضية ذات الشكل الكيفي وذلك لان الاجهادات المماسية فيها تكون مماسية على منحني الحافة) .

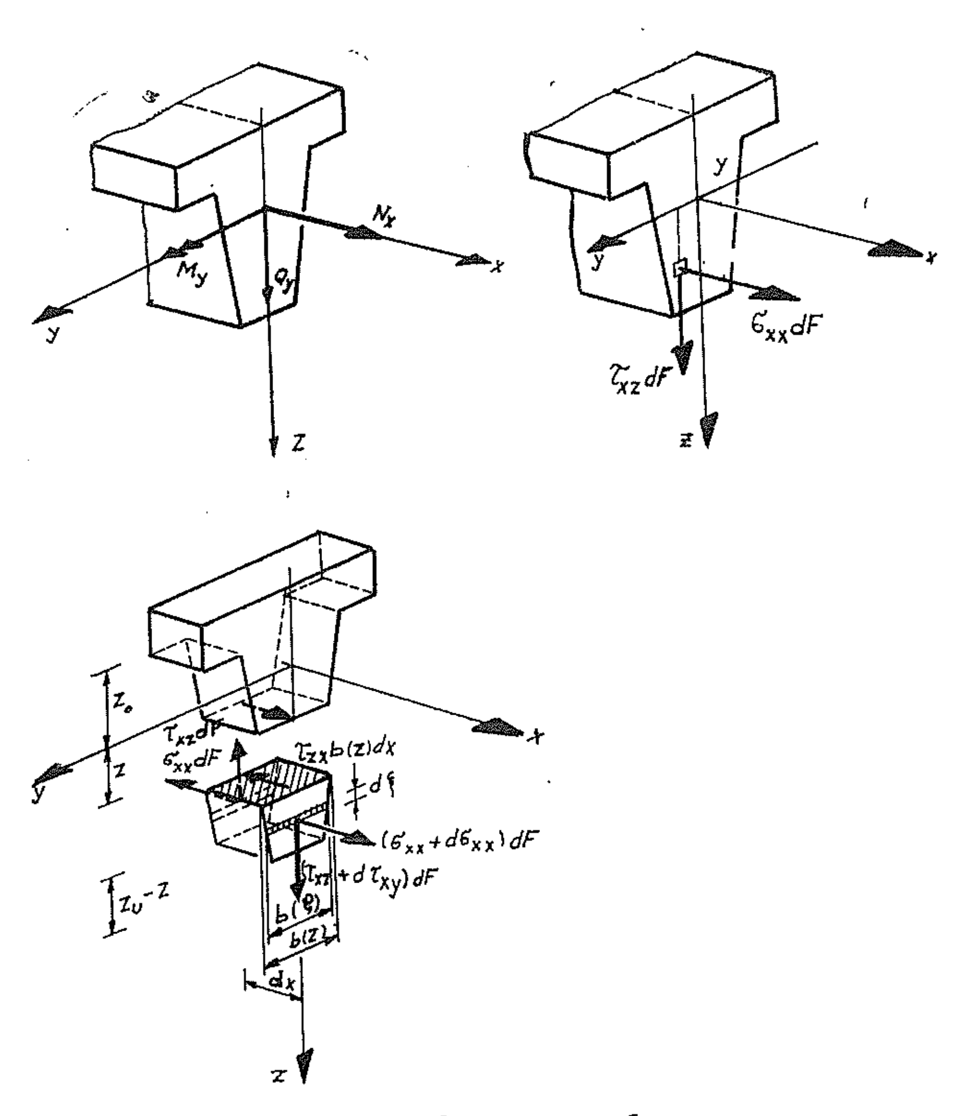
٤ ـ لا تتعلق الاجهادات المماسية الموجودة على الارتفاع z=const من سطح القطع x=const بالمحور y .(تعني هذه الفرضية ان الحسابات التالية تعين القيمة الوسطية وان الاجهادات المماسية الاعظمية المتشكلة هي اكبر بقليل من هذه القيمة ويزداد الفرق كلما ازداد عرض المقطع العرضي) .

لقد تم حتى الان عدم اعتبار القوة العرضية $Q_z(x)$ التي تتشكل في الانعطاف العام (والذي

يسمى ايضاً بانعطاف القوة العرضية(Querkraftbiegung)واقتصر البحث على تعيين الاجهـادات الناظمية σ_{xx} (x,z) الناتجة عن القوة الطولية N_x (x) وعزم الانعطاف M_y (x) ، والان سوف يتم تعيين الاجهادات المماسية τ_{xz} التي تتشكل في كل جزء سطحي dF من القطـع العرضيF(شكل 10.1)والتي ترتبط بالقوة العرضية Q_z بواسطة العلاقة التالية :

$$Q_z = \int_F \tau_{xz} \, dF \qquad (10\text{-}1)$$

(تعبر هذه العلاقة عن ان القوة العرضية في مقطع ما هي محصلة الاجهـــادات المماسية في ذلك القطع) .



شكل 10.1 و شكل 10.2

لتعيين الاجهاد الماسي سوف يشطر عنصر قضيبي طوله dx بواسطة قطع طولي z=const الى جزئين (شكل 10.2) كما سوف يفترض بان الاجهادات الماسية τ_{zx} لا تتعلق بالمحور y كما هو الحال بالنسبة للاجهادات الناظمية σ_{yy} ، عندئذ تؤثر على العنصر المقتطع الذي يبلغ سطحه F_0 ونتيجة للاجهادات الناظمية المعلومة :

$$\sigma_{xx}\ (x,z) = \frac{M_y\ (x)}{I_{yy}}\ z \qquad (10\text{-}1)$$

القوى التالية :

$$\int_{Fa} \sigma_{xx}\ dF \ ,\int_{Fa} (\ \sigma_{xx} + d\ \sigma_{xx})\ dF$$

ترافق الاجهادات الماسية τ_{xz} في المقطع العرضي x=const والتي تسمى **بالاجهادات المماسية العرضية** (Querschubspannungen) الاجهادات الماسية الطولية τ_{xz} = τ_{zx} .بتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه x على العنصر المقتطع ينتج :

$$-\ \tau_{zx}\ b\ (z)\ dx - \int_{Fa} \sigma_{xx}\ (x,z)\ dF + \int_{Fa} \left[\ \sigma_{xx}\ (x,z) + d\ \sigma_{xx}(x,z\ \right] dF = 0 \qquad (10\text{-}2)$$

بالامكان ايضاً في العلاقة السابقة استخدام الكتابة التالية :

$$d\sigma_{xx} = \frac{\partial\ \sigma_{xx}}{\partial\ x}\ dx$$

من العلاقة الناتجة عن شرط التوازن ، يتم في البداية التوصل من اجل الاجهادات المماسية للعلاقة التالية :

$$\tau_{zx}\ b\ (z) = \int_{Fa} \frac{d\sigma_{xx}\ (x,z)}{dx}\ dF \qquad (00\text{·}3)$$

عندما يرمز لمسافة العنصر السطحي dF عن المحور y بالحرف ζ عندئذ ينتج :

$$\sigma_{xx}\ (\ x,\zeta) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}}\ \ \zeta$$

وبعد اعتبار كل من العلاقتين :

$$\frac{d\ M_y(x)}{dx} = Q_z\ (x)$$

و :

$$\frac{d\sigma_{xx}(x,\zeta)}{dx} = \frac{dM_y(x)}{dx}\frac{\zeta}{I_{yy}} = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \zeta$$

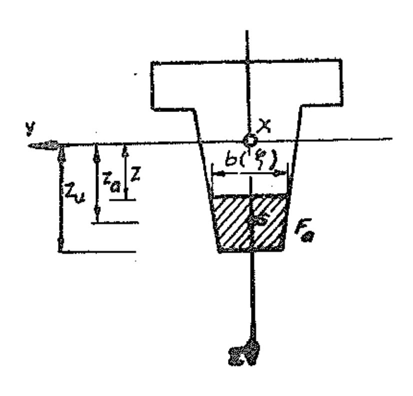
(I_{yy} لا تتعلق بالاحداثي x) ، يتم التوصل اخيراً لعلاقة الاجهاد المماسي التالية :

$$\tau_{zx}\, b(z) = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int_{F_a} \zeta \, dF$$

يمثل التكامل في العلاقة السابقة العزم الستاتيكي :

$$S_{ya}(z) = \int_{F_a} \zeta \, dF = \int_{z}^{zu} \zeta \, b(\zeta) \, d\zeta = z_a F_a \qquad (10\text{-}4)$$

لسطح العنصر القضيبي المقتطع F_a بالنسبة للمحور y (العزم الستاتيكي للسطح المهشر المحصور بين الاحداثيين z_u, z بالنسبة للمحور y) (شكل 0.3).



شكل 10.3

بالتبديل فى العلاقة السابقة يتم التوصل للمعادلة التالية :

$$\tau_{xz}(x,z) = \frac{Q_z(x) S_{ya}(z)}{I_{yy}\, b(z)} \qquad (10\text{-}5)$$

التي يتم بواسطتها الحصول على توزيع الاجهاد المماسي في المقطع العرضي x=const . حيث ان $\tau_{xz}(x,z)$ هو الاجهاد المماسي الواقع على الارتفاع z من المقطع العرضي الواقع على بعد x و

$Q_z(x)$ هي القوة العرضية في المقطع العرضي الواقع على بعد x (المقطـع العرضي المدروس) و

I_{yy} هوعزم عطالة المقطع العرضي (كامل المقطع العرضي) الواقع على بعد x (المقطع العرضي المدروس) و

$S_{ya}(z)$ هو العزم الستاتيكي للسطح المهشر (او للسطح غير المهشر) من المقطع العرضي بالنسبة للمحور y (شكل 10.3) (وهو العزم الستاتيكي، للسطح الواقع تحت او فوق الخط المطلوب حساب الاجهاد المماسي فيه، بالنسبة للمحور y).

$b(z)$ هو عرض المقطع العرضي الواقع على الارتفاع z وهو المكان الذي تحسب فيه الاجهادات المماسية. ان العلاقة (10.5) هي علاقة حساب الاجهاد المماسي ذو التوزيـع المنتـظم على طول المستقيم الافقي الموازي للمحور المركزي وهي علاقة تقريبية وتتحق بدقة (بشكل جيـد) في المقاطع العرضية مستطيلة الشكل ذات الارتفاع الكبير والعرض الصغير، أما النظرية الدقيقة فتشير الى ان قيمة الاجهادات المماسية على حواف المقطع العرضي مستطيل الشكل أكبر من قيـــمة الاجهادات المماسية في مركز ثقل المستطيل (حيث تقع نقاط الحواف المذكورة ومركز الثقـل على مستقيم افقي واحد يوازي المحور y). يزداد الفرق بين القيمة المحسوبة بواسطة العلاقـــة (10.5) وبين القيمة الفعلية كبراً كلما ازداد عرض المستطيل بالنسبة لارتفاعه. فـكما تم التنويه عنه سابقاً فان قيم τ المحسوبة بواسطة العلاقة (10,5) لاتعني الا قيمةً وسطية للاجهادات المماسية على طول المستقيم الافقي. ينبغي أن يعطي تـكامل الاجهادات المماسية $\tau_{xz}(x,z)=\tau_{zx}(x,z)$ على كامل سطح المقطع العرضي F القوة العرضية $Q_z(x)$ الموجودة في ذلك المقطع العرضي (لأن القوة العرضية $Q_z(x)$ هي محصلة الاجهـــادات المماسية $\tau_{xz}(x,z)$ في المقطع العرضي)، أي أنـ :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z)\, dF = Q_z(x)$$

بالاستعانة بالعلاقة (10.5) ينتج :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z)\, dF = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int_F \frac{S_{ya}(z)}{b(z)}\, dF$$

وبادخال العلاقة التالية :

$$dF = b(z)\, dz$$

بعين الاعتبار يتم التوصل لما يلي :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z)\, dF = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int_{zo}^{zu} S_{ya}(z)\, dz$$

بعد اجراء المكاملة الجزئية يتم منها التوصل للعلاقة التالية :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z)\, dF = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \left[z_u\, S_{ya}(z_u) - z_0\, S_{ya}(z_0) - \int_{zo}^{zu} z\, \frac{dS_{ya}(z)}{dz}\, dz \right] \quad (10\text{-}6)$$

من العزم الستاتيكي (10.4) :

$$S_{ya}(z) = \int_z^{zu} \zeta\, b(\zeta)\, d\zeta$$

ينتج :

$$S_{ya}(z_u) = 0$$

وبما أن مبدأ (مركز) الاحداثيات موجود في مركز الثقل لذلك يصلح أيضاً :

$$S_{ya}(z_0) = \int_{zo}^{zu} \zeta b(\zeta) d\zeta = \int_F \zeta\, dF = 0$$

وبذلك يتم التوصل من المعادلة 10 6) للعلاقة التالية :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z)\, dF = -\frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int_{zo}^{zu} z\, \frac{dS_{ya}(z)}{dz}\, dz$$

بملاحظة مايلي :

$$\frac{dS_{ya}(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \int_z^{zu} \zeta\, b(\zeta)\, d\zeta = -zb(z)$$

فان العلاقة الاخيرة تتحول للمعادلة الآتية :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z)\, dF = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int_z^{zu} z^2\, b(z)\, dz = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int z^2 dF = Q_z(x)$$

١٠ ـ ٣ أمثلة

مثـال 131 :

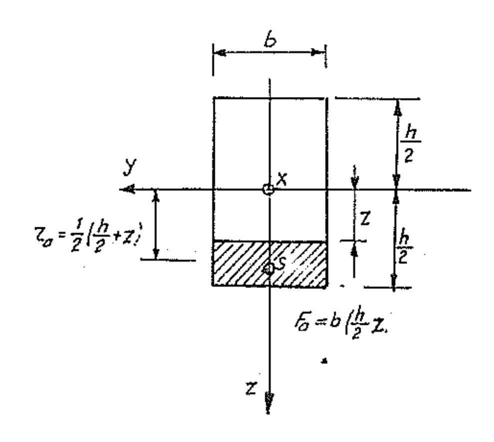
المطلوب : تعيين الاجهادات المماسية لجائز (لحامل) مقطعه العرضي مستطيل الشكل (شـكل 10.4) ، عرضه b وارتفاعه h .

المعطى : Q , h , b .

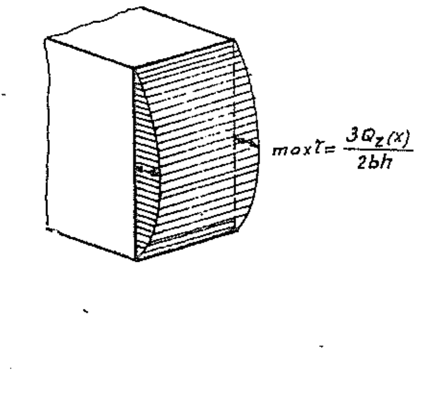
الحـــل :

بواسطة العزم الستاتيكي (للجزء المهشر) :

$$S_{ya} = z_a\ F_a = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right) . b\left(\frac{h}{2} - z\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$



شكل 10.4



شكل 10.5

وعزم المطالة السطحي (لـكامل المقطع العرضي) :

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12}$$

يتم الحصول تبعاً للعلاقة (10.5) على توزيـع الاجهاد الماسي التالي :

$$\tau_{xz}(x,z)=Q_z(x)\,\frac{b\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)12}{2\,b\,h^3\,.\,b} = \frac{3}{2}\,\frac{Q_z(x)}{b\,h}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)$$

وهذه هي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للمتغير z ولهذا فان توزيع الاجهاد المماسي على ارتفاع المقطع العرضي هو قطع مكافىء (هو منحني على شكل مقطع مكافىء) من الدرجةالثانية. يبلغ الاجهاد المماسي الاعظمي القيمة التالية :

$$\tau_x\ (x,0) = \max\ \tau = \frac{3}{2}\,\frac{Q_z(x)}{bh}$$

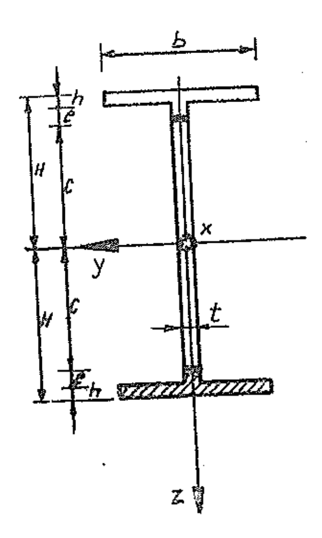
وهو يتشكل على المستقيم z=0 (شكل 10.5) ، أي ان القيمة العظمى للاجهاد المماسي في هذه الحالة تساوي مرة ونصف قيمة الاجهاد المتوسط الناتج عن قسمة القوة العرضية Q على مساحة المقطع العرضي وهي bh .

مثال 132 :

المطلوب : تعيين الاجهادات المماسية التي تتشكل عند منطقة اللحام لجائز (لحامل) مقطعه العرضي على شكل حرف I ويحمل على الانعطاف ويتألف من صفيحة للجسد (Stegblech) ومن بروفيلين للاجنحة (Gurtprofilen) تتصل مع بعضها بواسطة اللحام (شكل 10.6) .

الحل :

بواسطة العزم الستاتيكي (للجزء المهشر من المقطع العرضي) :



شكل 10.6

$$S_{ya}(c) = \left(H - \frac{h}{2}\right) bh + \left(c + \frac{e}{2}\right) t\, e$$

وعزم المطالة السطحي (لكامل المقطع العرضي) :

$$I_{yy} = \frac{t(2c+2e)^3}{12} + 2\,\frac{bh^3}{12} + 2.\, bh\left(H - \frac{h}{2}\right)^2$$

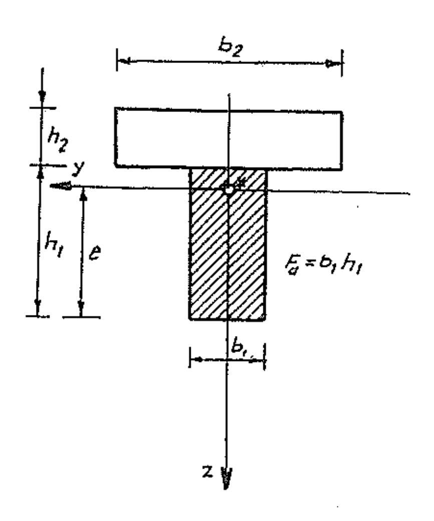
يتم الحصول من العلاقة (10.5) على الاجهادات المماسية عند منطقة الالحام :

$$\tau_{xz}(x,c) = Q_z(x)\,\frac{\left(H - \frac{h}{2}\right)\frac{bh}{t} + \left(c + \frac{e}{2}\right) e}{\frac{1}{6}\left[4\,t\,(c+e)^3 + bh^3\right] + 2bh\left(H - \frac{h}{2}\right)^2}$$

مثـال 133 :

يتألف المقطع العرضي لجائز يعمل على الانعطاف (Biegeträger) من مستـطيلين (عروضها b_1 , b_2 وارتفاعاتها h_1 , h_2) تتصل مع بعضها بواسطة الغراء. يحتوي الجائز في النقطـة المدروسة على القوة العرضية Q_z (شـكل 10.6 b) .

المطلوب : تعيين الاجهادات المماسية التي تتشكل عند فاصل الغراء (Leimfuge) .



شكل 10-6 b

الحــــل :

يحدد بعد مركز الثقل :

$$e = \frac{b_1 \frac{h_1^2}{2} + b_2 h_2 \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)}{b_1 h_1 + b_2 h_2}$$

مكان المحور y . بواسطة العزم الستاتيكي للجزء المهشر من المقطع العرضي :

$$S_{ya} = \left(e - \frac{h_1}{2}\right) b_1 h_1$$

وعزم العطالة السطحي لـكامل المقطع العرضي :

$$J_{yy} = \frac{b_1 h_1^3}{12} + \frac{b_2 h_2^3}{12} + b_1 h_1 \left(e - \frac{h}{2}\right)^2 + b_2 h_2 \left(h_1 - e + \frac{h^2}{2}\right)^2$$

يتم تعيين الاجهاد المماسي الذي يتشكل عند فاصل الغراء :

$$\tau_{xz}(x) = Q_z(x) \frac{S_{ya}}{I_{yy} \cdot b_1}$$

$$= \frac{Q_z(x)\, 6 h_1 b_2 h_2 (h_1 + h_2)}{(b_1 h_1^3 + b_2 h_2^3)(b_1 h_1 + b_2 h_2) + 3 b_1 h_1 b_2 h_2 (h_1 + h_2)^2}$$

مثـــال 134 :

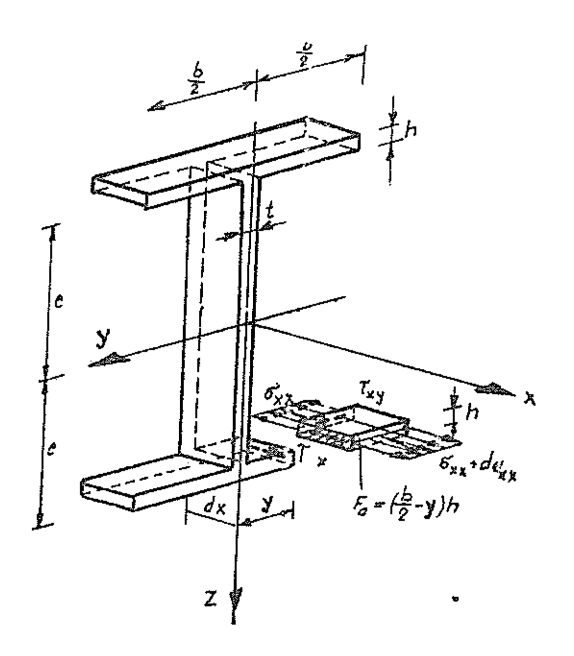
لتعيين توزيع الاجهاد المماسي في أجنحة جائز مقطعه العرضيحرف I يستطاع أيضاً الرجوع للعلاقة (10,5) . بما أن سماكة الاجنحة h صغيرة جداً بالنسبة لابعاد المقطـــع العرضي لذلك يمكن الافتراض أن توزيع الاجهاد الناظمي σ_{xx} والاجهاد المماسي τ_{xy}على سماكة الاجنحة منتظم وان الاجهادات المماسية τ_{xy} توازي الحواف (المحيط، الحدود المغلقة) ، عندئذ تتشكل علاقة مشابهة للتي تم التوصل اليها أثناء بحث فتل القضبان ذات المقاطع العرضية الرقيقة المغلقة .

باقتطاع جزء صغير قدر الامكان من الجناح (شكل 7-10) وبتطبيق شرط التوازن على الجزء المقطوع ، ينتج :

$$-\tau_{yx}\, h dx - \sigma_{xx} F_a + (\sigma_{xx} + d\sigma_{xx}) F_a = 0$$

من هذه العلاقة يتم التوصل في البداية للمعادلة التالية :

$$\tau_{yx} = \frac{d\sigma_{xx}}{dx} \frac{F_a}{h}$$



شكل 10.7

بالاستعانة بالاجهاد الناظمي :

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}} \left(\pm e \right)$$

ومشتقه :

$$\frac{d\,\sigma_{xx}(x)}{dx} = \frac{1}{I_{yy}} \frac{dM_y(x)}{dx} (\pm e) = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} (\pm e)$$

ينتج :

$$\tau_{yx}(x, y) = \frac{Q_z(x)\ F_a(y)\ (\pm e)}{I_{yy}\ h}$$

عندما يعتبر أن :

$$F_a(y)(\pm e) = S_{ya}(y)$$

هو العزم الستاتيكي للجزء المقطوع السفلي أو بالاحرى العلوي من الجناح ، عندئـذ يمكن تعيين الاجهاد المماسي المطلوب ، بواسطة العلاقة (10-5) وذلك حسب العلاقة التالية :

$$\tau_{yx}(x,y) = \frac{Q_z(x) S_{ya}(y)}{I_{yy}\ h} \qquad (10\text{-}7)$$

وبذلك يتم بواسطة العلاقة الآتية :

$$F_a(y) = \left(\frac{b}{2} - y\right) h$$

تعيين توزيع الاجهاد في الجزء المدروس من الجناح :

$$\tau_{yx}(x,y) = \tau_{xy}(x,y) = \pm \frac{Q_z(x)\, e\left(\frac{b}{2} - y\right) h}{I_{yy}\, h} = \pm \frac{Q_z(x)}{I_{yy}}\, e\left(\frac{b}{2} - y\right),$$

$$0 \leqq y \leqq \frac{b}{2} \quad (10\text{-}7b)$$

لاسباب التناظر تصلح من أجل $y<0$:

$$\tau_{yx}(x,y) = \tau_{xy}(x,y) = \mp \frac{Q_z(x)}{I_{yy}}\, e\left(\frac{b}{2} + y\right); \quad -\frac{b}{2} \leqq y \leqq 0 \quad (10\text{-}7c)$$

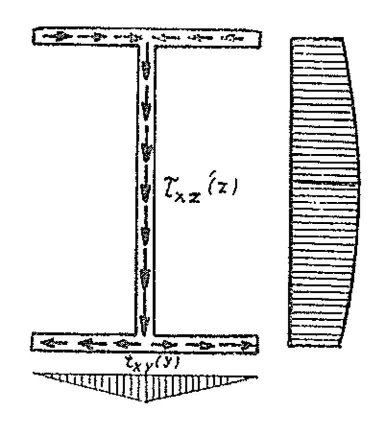
يتم تعيين الاجهادات المماسية $\tau_{xz}(x,z)$ في الجسد بشكل مباشر من العلاقة التالية :

$$\tau_{xz}(x,z) = \frac{Q_z(x) S_{ya}(z)}{I_{yy}\, b(z)}$$

حيث ان $b(z)=t$ وبسبب كون $h<<e$ فان :

$$S_{ya}(z) = b\,h\,e + t\,(e - z)\,\frac{e+z}{2}$$

$$= b\,h\,e + \frac{t}{2}\,(e^2 \quad z^2)$$



شكل 10.8

لقد تم في الشكل (10.8) رسم الاجهادات المماسية قيمة واتجاهاً . تشكل الاجهـادات المماسية τ_{xy} (y) الموجودة في كل جناح مجموعـة متوازنة (Gleichgewichtsgruppe) . ان محصـلة الاجهادات المماسية τ_{xz} (x,z) في الجسد تساوي القوة العرضية (x) Q_z الـتي تـؤثر في ذلك المقطع العرضي .

مثال 135 :

يتألف المقطـع العرضي لجائز من دائرة نصف قطرها R وتؤثر فيـــه القوة العرضية Q شكل (10.9 a) .

المعطى : Q , R .

المطلوب :

١ ـ ايجاد توزيع الاجهاد المماسي τ_{zz} مع الرسم .

٢ ـ تعيين القيمة العظمى للاجهاد المماسي $\max \tau_{xz}$.

الحل :

١ ـ ايجاد توزيع الاجهاد المماسي τ_{xz} .

عزم عطالة الدائرة :

$$I_{yy} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$$

عرض الدائرة في مكان القطع الذي يبعد z :

$$b(z) = 2\sqrt{R^2 - z^2}$$

العزم الستاتيكي للسطح المهشر (وهو يساوي العزم الستاتيكي للسطح الذي يعلوه) :

$$S_{ya} = z_a \; F_a = \int_F z \, d F$$

بالمكاملة ينتج :

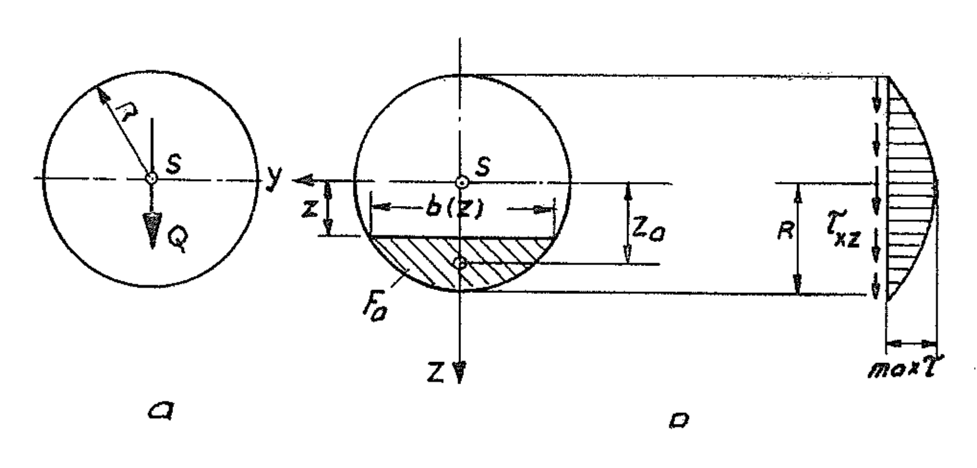
$$S_{ya} = \frac{2}{3} \; (R^2 - z^2)^{3/2}$$

بتبديل هذه القيم في علاقة الاجهاد المماسي (10.5) ينتج :

$$\tau_{xz} = \frac{4\,Q}{3\,\pi\,R^4}\,(R^2 - z^2)$$

الاجهاد المماسى الاعظمي :

$$\max \tau_{xz} = \tau_{xz}\ (z = 0) = \frac{4}{3}\ \frac{Q}{\pi\,R^2} = \frac{4}{3}\ \frac{Q}{F}$$



شكل 10.9

يتم أيضا الحصول على الاجهاد المماسي الاعظمي فيما لو اتبع الطريق المباشر التالي (شكل10.9c):
عزم عطالة الدائرة :

$$I_{yy} = \frac{\pi\,R^4}{4}$$

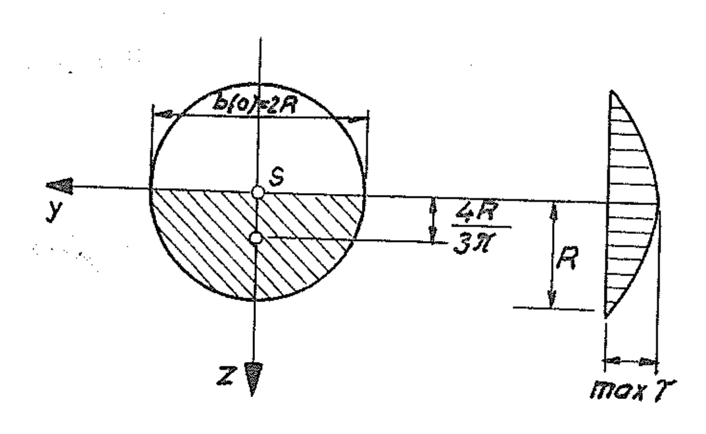
العزم الستاتيكي لنصف الدائرة المهشر (وهو يساوي العزم الستاتيكي للنصف الذي يعلوه) :

$$S_{ya} = z_a \cdot F_a = \frac{4\,R}{3\,\pi} \cdot \frac{\pi\,R^2}{2} = \frac{2}{3}\,R^3$$

عرض نصف الدائرة (العرض عند مكان القطع وهو المكان الذي تحسب الاجهادات المماسية عنده) :

$$b\ (z = 0) = 2\,R$$

بتبديل القيم السابقة في علاقة الاجهاد المماسي ينتج :



شكل 10.9c

$$\max \tau_{xz} = \frac{Q}{\frac{\pi R^4}{4}} \frac{\frac{2}{3} R^3}{2R} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}$$

مثل 136 :

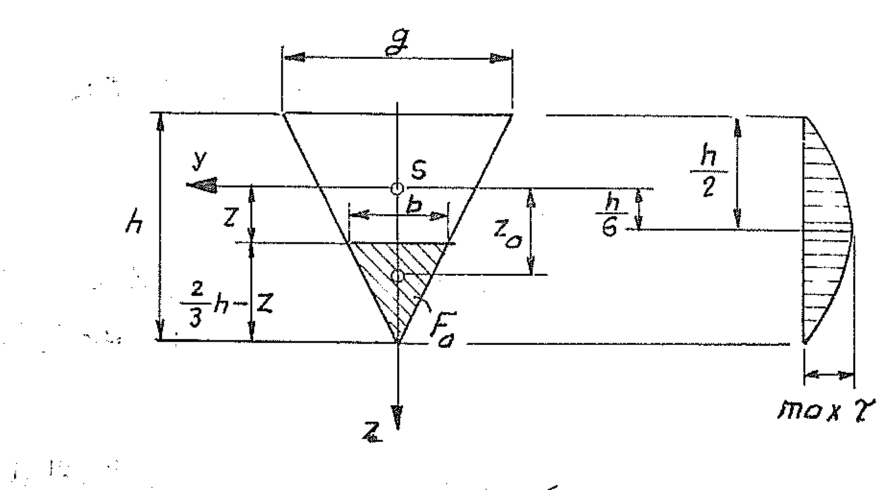
يتألف المقطع العرضي لجائز من مثلث قاعدته g وارتفاعه h . بعد قطع الجائز في مكان ما منه وجد أن القوة العرضية المشتكلة هناك هي Q شكل (10.10) .

المعطى : g , h . Q .

المطلوب :

١ ـ حساب توزيع الاجهاد المماسي τ_{xz} مع الرسم .

٢ ـ تعيين القيمة العظمى للاجهاد المماسي .



شكل 10.10

الحل :

١ ـ حساب توزيع الاجهاد الماسي τ_{xz} .

عزم عطالة المثلث :

$$I_{yy} = \frac{g h^3}{36}$$

مساحة السطح المهشر :

$$F_a = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} h - z\right) b$$

بعد مركز ثقل السطح المهشر عن مبدأ الاحداثيات :

$$z_a = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} h - z\right) + z = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} h + z\right)$$

العزم الستاتيكي للسطح المهشر بالنسبة للمحور y :

$$S_{ya} = z_a F_a = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} h + z\right)\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} h - z\right) b$$

$$= \frac{1}{3} b\left(\frac{2}{2} h - z\right)\left(\frac{1}{3} h + z\right)$$

عرض المثلث على ارتفاع z :

$$b(z) = \frac{g}{h}\left(\frac{2}{3} h - z\right)$$

بتبديل هذه القيم في علاقة الاجهاد المهسي ينتج :

$$\tau_{xz} : \frac{Q}{gh^3/36} = \frac{\frac{1}{3} b\left(\frac{2}{3} h - z\right)\left(\frac{1}{3} h + z\right)}{b} = \frac{12Q}{g h^3}\left(\frac{2}{3}h - z\right)\left(\frac{1}{3} h + z\right)$$

٢ ـ تعيين القيمة العظمى للاجهاد الماسي .

باشتقاق تابع الاجهاد الماسي وجعله مساوياً للصفر يتم تعيين موضع تشكل الاجهاد المماسي الاعظمي :

$$\frac{d\tau}{dz} = 0 = \frac{12Q}{gh^3}\left[-\left(\frac{1}{3}h+z\right)+\left(\frac{2}{3}h-z\right)\right], \quad z = \frac{1}{6}h$$

$$\max \tau_{xz} = \tau_{xz}\left(z = \frac{1}{6}h\right) = \frac{12Q}{4\,gh^2} = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{F}$$

مثال 137 :

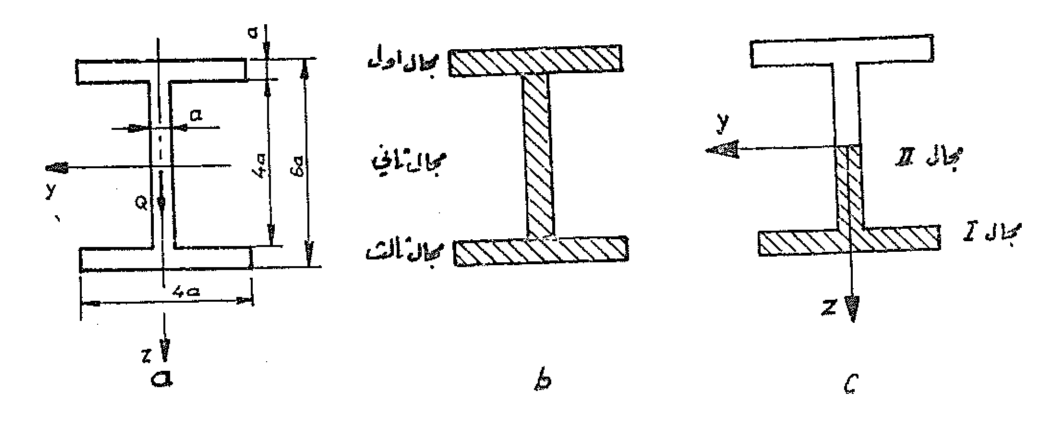
يشكل المقطع العرضي لجائز I (شكل 10.12 a).بقطع الجائز المذكور في نقطة مامنـه يتبين أن القوة العرضية الموجودة هناك هي Q .

المعطى : $Q = 500$ kp , $a = 2$ cm .

المطلوب :

١ - حساب توزيع الاجهاد الماسي τ_{xz} .

٢ - تعيين قيمة الاجهاد الماسي الاعظمي $\max \tau_{xz}$.



شكل 10.12

الحل :

١ - تعطي المعادلة (10.5) توزيع الاجهاد الماسي:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{Q_z(x)\,.\,S_y(z)}{I_{yy}\,.\,b(z)}$$

القوة العرضية :

$$Q = 500 \text{ kp}$$

عزم عطالة المقطع العرضي:

$$I_{yy} = \frac{1}{12}\left[4\,a\,(6\,a)^3 - 3\,a\,(4\,a)^3\right] = 56\,a^4$$

$$I_{yy} = 896\ \text{cm}^4$$

بالتبديل في علاقة الاجهاد المماسي ينتج :

$$\tau_{xz}\,(z) = \frac{Q}{56\,a^4}\cdot\frac{S_y\,(z)}{b\,(z)}$$

تحتوي توابع $S_y\,(z)$, $b\,(z)$ على عدم استمرار مما يلزم تقسيم المقطع العرضي الى مجالات (هنا ثلاثة مجالات : المجال الاول $2\,a \leqq z \leqq 3\,a$ والمجال الثاني $-2a\leqq z\leqq 2a$ والمجال الثالث $-3a\leqq z\leqq -2a$. لكن بسبب التناظر بالنسبة للمحور y يكتفي بالمجال الاول الذي سيرمز له بالعدد I وبنصف المجال الذي سيرمز له بالعدد II (شكل 10.12 b,c).

المجال I $(2a\leqq z\leqq 3a)$ (شكل 10.12 d) :

$$b\,(z) = 4\,a$$

$$S_{ya}\,(z) = z_a\,F_a = \frac{1}{2}\,(3\,a + z)\,.\,4\,a\,(3\,a - z) = 2\,a\,(9\,a^2 - z^2)$$

$$z = 3\,a \quad : \quad S_{ya} = 0$$

$$z = 2\,a \quad : \quad S_{ya} = 10\,a^3$$

بالامكان أيضاً حساب العزم الستاتيكي انطلاقاً من التكامل :

$$S_{ya}\,(z) = \int_z^{3a} b\,(\zeta)\,\zeta\,d\zeta = \int_z^{3\,a} 4\,a\,\zeta\,d\zeta = 2\,a\,(9\,a^2 - z^2)$$

المجال II $(0 \leqq z \leqq 2a)$ (شكل 10 . 12e) :

$$b\,(z) = a$$

$$S_{ya}(z) = z_a\,F_a = \frac{1}{2}\,(2\,a + z)\left[(2\,a - z)\,a\right] + 10\,a^3$$

$$S_{ya}\,(z) = \frac{a}{2}\,(4\,a^2 - z^2) + 10\,a^3 = a\left(12\,a^2 - \frac{z^2}{2}\right)$$

بالامكان هنا أيضاً التوصل لنفس النتيجة انطلاقاً من التكامل :

$$S_{ya}(z) = \int_z^{3a} b(\zeta)\,\zeta\, d\zeta = \int_z^{2a} a\,\zeta\, d\zeta + \int_{2a}^{3a} 4\,a\,\zeta\, d\zeta$$

$$S_{ya}(z) = \frac{a}{2}(4\,a^2 - z^2) + 2\,a\,(9\,a^2 = 4\,a^2) = a\left(12\,a^2 - \frac{z^2}{2}\right)$$

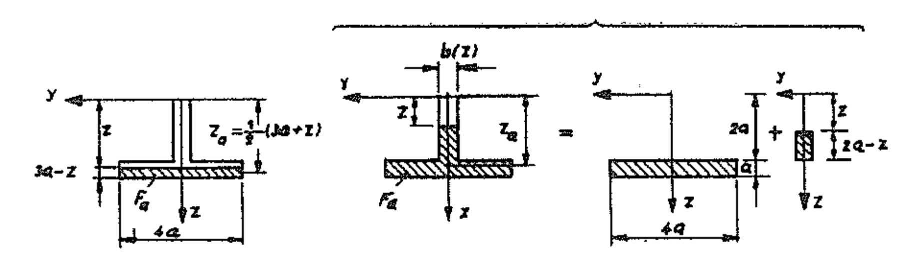
توزيع الاجهاد المماسي في المجال I :

$$\tau_{xz\,I}(z) = \frac{Q}{56\,a^4}\,\frac{2\,a\,(9\,a^2 - z^2)}{4\,a} = \frac{Q}{112\,a^2}\left[9 - \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]$$

توزيع الاجهاد المماسي في المجال II :

$$\tau_{xy\,II}(z) = \frac{Q}{56\,a^4}\;a\,\frac{(12a^2 - z^2/2)}{a} = \frac{Q}{112a^2}\left[24 - \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]$$

يتشكل الاجهاد المماسي الاعظمي في المكان $z=0$.



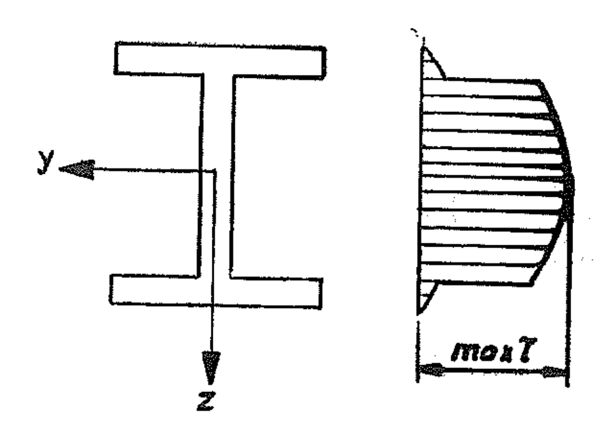
شكل 10-12g

٢ ـ تعيين قيمة الاجهاد المماسي الاعظمي .

$$\max \tau_{xz} = \tau_{xz\,II}\,(z=0) = \frac{Q}{112a^2}\;24 = 26{,}78\ \text{kp/cm}^2$$

أما القيمة التقريبية التي تستعمل في الحياة العملية فتبلغ :

$$\max \tau \approx \frac{Q}{F} = \frac{500}{a\,.\,4a} = \frac{500}{4\,a^2} = 31{,}3\ \text{kp/cm}^2$$



شكل 10-12g

مثـال 138 :

يتألف المقطع العرضي لجائز من صندوق مغلق . بعد قطع الجائز في نقطة ما منـه تبين أن القوة العرضية هناك هي Q (شكل 10-13 a).

المعطى :

$h_0 = 8$ cm , $h = 12$ cm , $b_0 = 4$ cm , $b = 6$ cm , $Q = 8$ Mp.

المطلوب : حساب ورسم توزيع الاجهادات الماسية τ_{xz} (الاجهادات الماسية الشاقوليـة ، أي باتجاه Q) .

الحـــل :

عزم عطالة المقطع العرضي :

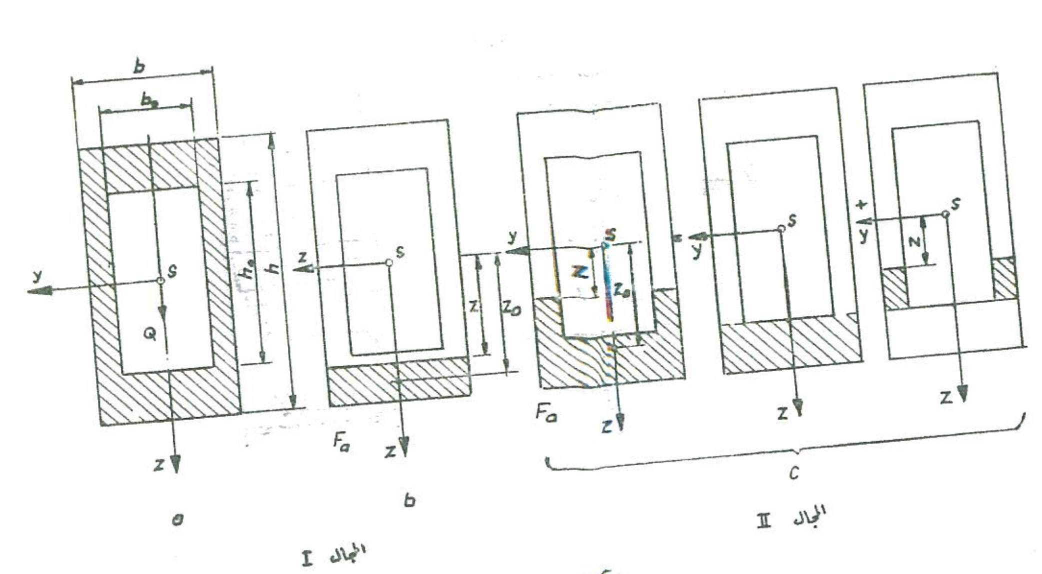
$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_0 h_0{}^3}{12} = \frac{1}{12}\ (6\,.\,12^3 - 4\,8^3) = \frac{2080}{3}\ \text{cm}^4$$

الطريق الاول (حساب تابـع الاجهاد الماسي) :

المجال I $\left(\frac{1}{2}\ h_0 = 4\ \text{cm} \leqq z \leqq \frac{1}{2}\ h - 6\ \text{cm}\right)$:

$$b(z) = b = 6\ \text{cm}$$

$$S_{ya}\ (z) = z_a F_a = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - z\right) + z\right]\,.\,b\left(\frac{h}{2} - z\right) = \frac{1}{2}\,b\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$



شكل 10.13

$$S_{ya}(z) = \frac{1}{2}\, 6\left(\frac{12^2}{4} - z^2\right) = 108 - 3z^2$$

المجال II $\left(0 \leq z \leq \frac{1}{2} b_0 = 4 \text{ cm}\right)$:

$$b(z) = b - b_0 = 2 \text{ cm}$$

$$S_{ya}(z) = \left[\frac{h_0}{2} + \frac{1}{4}(h - h_0)\right] \cdot \frac{1}{2} b (h - h_0) +$$

$$+ \left[z + \frac{1}{2}\left(\frac{h_0}{2} - z\right)\right] . (b - b_0)\left(\frac{h_0}{4} - z\right)$$

$$S_{ya}(z) = \frac{1}{8} b (h^2 - h_0^2) + \frac{1}{2}(b - b_0)\left(\frac{h_0^2}{4} - z^2\right)$$

$$S_{ya}(z) = 60 + (16 - z^2) = 76 - z^2$$

$$\tau_{xzI}(z) = \frac{Q_z}{I_{yy}} \cdot \frac{S_v(z)}{b(z)} = \frac{8.10^3}{2080/3} \cdot \frac{(108 - 3z^2)}{6} = \frac{4000}{2080}(108 - 3z^2)$$

$$z = 6 \;;\; \tau_{xzI} = 0$$

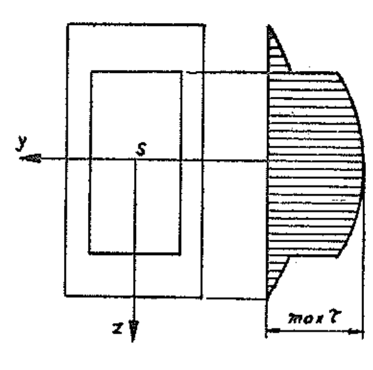
$$z = 4 \;:\; \tau_{xzI} = 115{,}4 \text{ kp/cm}^2$$

بعد الحصول على هذه النتائج يتم ، في مخطط τ ، الوصل بينها بواسطة منحني على شكل قطع مكافيء من الدرجة الثانية .

$$\tau_{xzII}(z) = \frac{Q_z}{I_{yy}} \cdot \frac{S_y(z)}{b\ (z)} = \frac{8.10^3}{2080/3} \cdot \frac{(76 - z^2)}{2} = \frac{12 \,.\, 10^3}{2080}\ (76 - z^2)$$

$$z = 4 : \tau_{xzII} = 346{,}2 \text{ kp/cm}^2$$

$$z = 0 : \tau_{xzII} = 438{,}5 \text{ kp/cm}^2$$



شكل 10 14

لقد تم ، بسبب التناظر ، الاكتفاء بتعيين نصف القيم .

الطريق الثاني : (حساب قيم الاجهادات المماسيـــة في بعض النقاط المميزة ، مثلا النقـاط 1 , 2 , 3 , 4،ثم الوصل بينها بمنحني على شكل قطع مكافىء من الدرجة الثانية) :

النقطة 1 :

$$b_1 = 6 \text{ cm} \ ; \ S_{y1} = 0 \ : \ \tau_{xz1} = 0$$

النقطة 2 :

$$b = 6\,\text{cm} \ ; \ S_{y2} = \left(\frac{h}{2} - \frac{h - h_0}{2}\right) \cdot b \ \frac{h - h_0}{2} = 60 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{zz2} = \frac{Q_z}{I_{yy}} \cdot \frac{S_y\ (z)}{b\ (z)} = \frac{8 \,.\, 10^3}{2080\ /\ 3} \cdot \frac{60}{6} = 115{,}4 \text{ kp/cm}^2$$

النقطة 3 :

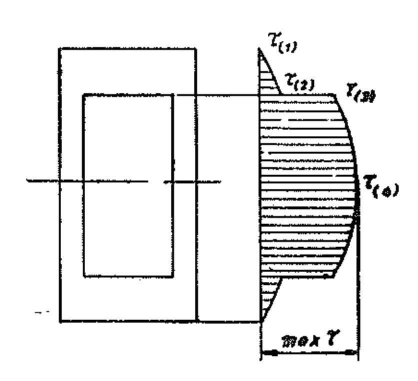
$$b = (b - b_0) = 2 \text{ cm} \ ; \ S_{y3} = S_{y2} = 60 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xz3} = \frac{8 \,.\, 10^3}{2080/3} \ \frac{60}{2} = 346{,}2 \text{ kp/cm}^2$$

النقطة 4 :

$$b = 2\,cm \quad ; \quad S_{y4} = S_{y2} + (b - b_0)\,\frac{h_0}{2}\,\frac{h_0}{4} = 60 + 16 = 76\ cm^3$$

$$\tau_{xz4} = \frac{80 \,.\, 10^3}{2080 / 3} \,.\, \frac{76}{2} = 438{,}5\ kp/cm^2$$



شكل 10.15

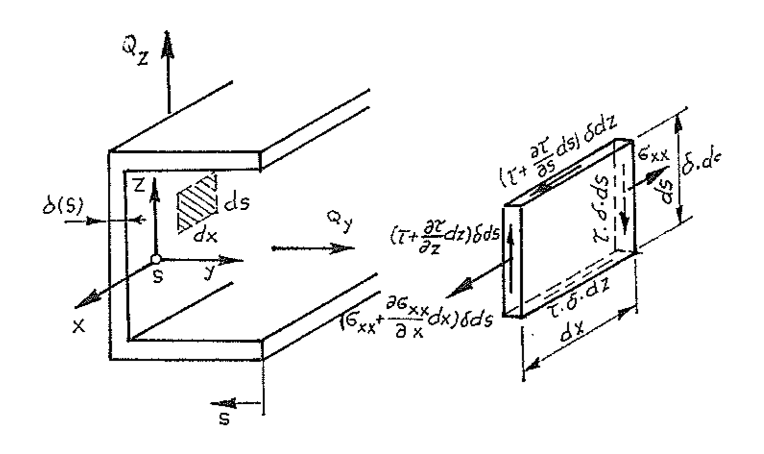
١٠ ـ ٤ الاجهادات المماسية القصية في البروفيلات المفتوحة رقيقة الجدار

في البروفيلات رقيقة الجدران يمكن بتقريب جيد التكلم عن حالة الاجهـادات المستوية (انظر الفقـرة ٢ ـ ٣) . ان الاجهادات المتشكلة فيهاهي الاجهادات الناظمية σ_{xx} والاجهادات المماسية τ . بسبب ضئالة عرض (سماكة) القطع العرضي δ يتبين أن توزيـع τ على سماكة الجدار δ ثابت ولذلك يستطاع الحساب باستخدام سيالة القص $T=\delta\,\tau$ (Schubfluβ) (انظر الفصل السابع) . بتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه s على العنصر $dV=dx\,\delta\,(s)\,ds$ المقتطع من الجائز والممثل في الشكل (10.16) ينتج :

$$\left.\begin{aligned} & T\,ds + \frac{\partial T}{\partial x}\,dx\,ds - T\,ds = 0 \\ & \text{أو :} \\ & \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.10)$$

من هذه العلاقة ينتج أن سيالة القص $T=\tau.\delta$ لاتتعلق بالاحداثي x وهذا يعني أن :

$$T = T\,(s)$$



شكل 10,16

أما تطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه x فيعطي العلاقة التالية :

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) \delta\, ds - \sigma_{xx}\, \delta\, ds + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial s} ds\right) \delta\, dx - \tau\, \delta\, dx = 0$$

أو كذلك :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta + \frac{\partial t}{\partial s} = 0 \qquad (10\text{-}11)$$

حسب الفقرة (10.1) يمكن تضام حالة الاجهاد الناتجة عن الانعطاف الصافي مع حالة الاجهـاد الناتجة عن القوة العرضية . اذا أثرت على الجائز القوىالعرضية Q_y , Q_z (شكل 10.19) عندئذ يكون توزيع الاجهاد الناظمي كالتالي :

$$\sigma_{xx} = -\frac{Q_y\, x}{I_{zz}} y - \frac{Q_z\, x}{I_{yy}} z \qquad (10\text{-}12)$$

لقد افترض في العلاقة السابقة ان المحاور y , z هي محاور رئيسيـــة . من العلاقة (10.12) ينتـج :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{Q_y}{I_{zz}} y - \frac{Q_z}{I_{yy}} z \qquad (10\text{-}13)$$

بتعويض العلاقة (10.13) في العلاقة (10 11) ينتج :

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{Q_y\, \delta\,(s)}{I_{zz}}\; y + \frac{Q_z\, \delta\,(s)}{I_{yy}}\, z \qquad (10\text{-}14)$$

وبالمكاملة يتم التوصل لما يلي :

$$T(s)-T(0)=\int_0^s \frac{Q_y \delta(s) y}{I_{zz}}\, ds + \int_0^s \frac{Q_z \delta(s) z}{I_{yy}}\, ds \qquad (10.15)$$

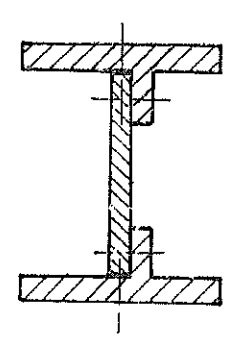
تنعدم سيالة القص على الحواف $(s = 0 \;,\; s = l)$ ، هذا يعني أن $T(o) = 0$. بما ان القيم Q_y , Q_z , I_{yy} , I_{zz} لاتتعلق بالاحداثي s لذلك يمكن كتابتها قبل اشارة التكامل (يمكن اخراجها من اشارة التكامل) . اما العلاقات المتبقية فهي :

$$S_z = \int_0^s \delta\, ds \;,\; S_y = \int_0^s z\, \delta\, ds \qquad (10\text{-}16)$$

وهي تمثل العزوم الستاتيكية للسطوح التي تقع بين $s = 0$, $s = s$ بالنسبة للمحور z وبالنسبة للمحور y . أخيراً يتم ، من أجل سيالة القص ، التوصل للعلاقة التالية :

$$T(s) = \frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s) \qquad (10\text{-}17)$$

تستخدم في أغلب الحالات من أجل الجيزان المنعطفة (الجيزان التي تحمل على الانعطاف Biegeträger) بروفيلات تتألف من جناحين (صفيحتين علويتين افقيتين Flanche) ومن جسد (صفيحة شاقولية Steg) تتصل مع بعضها البعض (شكل 40.17) .



شكل 10.17

بما أن الاجنحة تبعد عن مركز الثقل مسافة كبيرة لذلك فهي مناسبة لتحمل عزم انعطاف كبير . اما سيالة القص الناتجة عن القوة العرضية فانها تنقل في الدرجة الاولى من قبل

(بواسطة) الجسد . يسهل ، استخدام الفرضية التي تقول ان الاجنحة تحمل فقط باجهادات ناظمية (انعطاف) وان الجسد يحمل فقط باجهادات مماسية(قوى عرضية) ، المعادلة(10.11) في هذه الحالة تصلح من اجل الجسد العلاقة التالية :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0 \qquad (10\text{-}18)$$

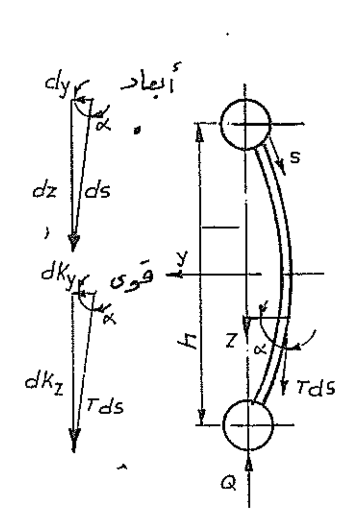
ونتيجة لها يصلح أيضاً :

$$\frac{dT}{ds} = 0 \qquad (10\text{-}19)$$

هذا يعني أن سيالة القص في الجسد هي ثابتة . تحدد العلاقة التي تربط بين القوة العرضيةوبين سيالة القص بواسطة شروط توازن القوى بالاتجاه y (شكل 10,18) .

ينبغي ان تكون الحمولة الخارجية Q مساوية لمجموع القوى وهذا يعني ان :

$$Q = \int_{\text{صفيحة}} d\,k_z = \int_{\text{صفيحة}} T\,ds \sin\alpha \qquad (10\text{-}20)$$



شكل 10.18

بسبب كون $ds \sin\alpha = dz$ (شكل 10.18) و $T = const$ ينتج :

$$Q = T\int_{-h/2}^{+h/2} dz = l\,h$$

من هذه المعادلة يتم التوصل لعلاقة سيالة القص البسيطة التالية :

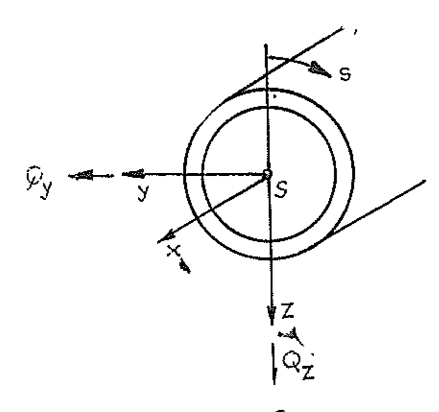
$$T = \frac{Q}{h} \qquad (10\text{-}21)$$

تستخدم هذه العلاقة كثيراً في الانشاءات المدنية .

١٠ ـ ٥ الاجهادات المماسية القصية في البروفيلات المغلقة الرقيقة

مبدئياً يتم اشتقاق (استخراج) علاقة سيالة القص في البروفيلات المغلقة الرقيقة ، تماماً (شكل 10.19) كما تم في البروفيلات المفتوحة . لقد تم حسب المعادلة (10.15) ادخال شروط الاطراف $T(s=0)=0$. لكن هذا الشرط لم يعد ممكناً في البروفيلات المغلقة . ستعاد كتابة المعادلة (10.15) ثانية :

$$T(s) - T(o) = \int_{o}^{s} \frac{Q_y\,\delta y}{I_{zz}}\,ds + \int_{0}^{s} \frac{Q_z\,\delta z}{I_{yy}}\,ds$$



شكل 10.16

لايمكن تحديد سيالة القص في المكان $s=0$ أي $T(0)$ في البروفيلات المغلقة (المقاطع العرضية المغلقة) بواسطة شرط الاطراف ، بل يتم التوصل اليها بالاستعانة بشرط التغيير (Verformungsbedingung) . يؤكد ما سيشار اليه فيما بعد بأن الجملة هي على الدوام في حالة

توازن مستقر وذلك عندما يكون محتوى الطاقة (Energieinhalt) أصغرياً . من اجل الحالة المدروسة هنا ، يعني هذا ان عمل تغير الشكل (Formaenderungsarbeit) يجب ان يكون اصغرياً وهذا يعني ان $T(0)$ يجب ان تحدد بصورة يكون فيها الشرط المذكور محققاً . يعبر رياضياً عن الكلام السابق بما يلي :

$$\frac{dA}{dT(0)} = 0 \qquad (10\ 22)$$

ان عمل تغير الشكل النوعي (spezifische Formaenderungsarbeit) نتيجة لتأثير الاجهادات المماسية هو :

$$A^* = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{T^2}{2G\delta^2}$$

وبذلك فان عمل تغير الشكل في العنصر الحجمي $dV = \delta l ds$ هو :

$$dA = \frac{T^2}{2G\delta}\, l\, d\, s \qquad (10\text{-}23)$$

اما عمل تغير الشكل في الجائز فيتم الحصول عليه باجراء المكاملة على كامل المقطع العرضي :

$$A = (\oint) \frac{T^2}{2G\delta}\, l\, d\, s \qquad (10\text{-}24)$$

وبذلك فان سيالة القص [(10-15) , (10 16)] تبلغ القيمة التالية :

$$T(s) = T_0 + \frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s) \qquad (10\text{-}25)$$

حيث أن :

$$T_0 = T(0)$$

بتبديل العلاقة (10.25) في العلاقة (10.24) ينتج :

$$A = \frac{1}{2G} (\oint) \Big[T_0^2 + 2T_0 \Big(\frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s) \Big) + $$
$$+ \Big(\frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s) \Big)^2 \Big] \frac{ds}{\delta} \qquad (10\text{-}26)$$

يجعل عمل تغير الشكل الممثل بالعلاقة السابقةاصغرياً عندما يعدم مشتقه بالنسبة للمتغير T_0 . من العلاقة (10.22) ينتج إذاً :

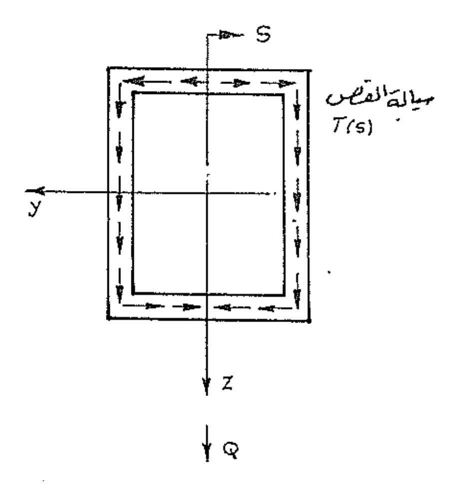
$$(\int) T_0 \frac{ds}{\delta} + (\int) \left(\frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s)\right)\frac{ds}{\delta} = 0 \qquad (10\text{-}27)$$

وبسبب كون $T_0 = const$ يتم التوصل لما يلي :

$$T_0 = - \frac{(\int)\left(\frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s)\right)\frac{ds}{\delta}}{(\int) \frac{ds}{\delta}} \qquad (10\text{-}28)$$

من العلاقة (10.25) وبمساعدة العلاقة (10.28) يتم التوصل الى سيـالة القص في البروفيـلات المغلقة رقيقة الجدران .

$$T(s) = \frac{Q_y}{I_{zz}}\left[S_z(s) - \frac{(\int) S_z(s) \frac{ds}{\delta}}{(\int) \frac{ds}{\delta}}\right] + \frac{Q_z}{I_{yy}}\left[S_y(s) - \frac{(\int) S_y(s) \frac{ds}{\delta}}{(\int) \frac{ds}{\delta}}\right] \qquad (10\text{-}29)$$



شكل 10-20

من أجل البروفيلات المتناظرة يتم التوصل لتسهيلات وذلك عندما تكون حمولتها متناظرة (شكل 10.20) ، فعلى محاور التناظر يجب أن تنعدم سيالة القص ، وذلك لاسباب التناظر . إذا ابتدأ

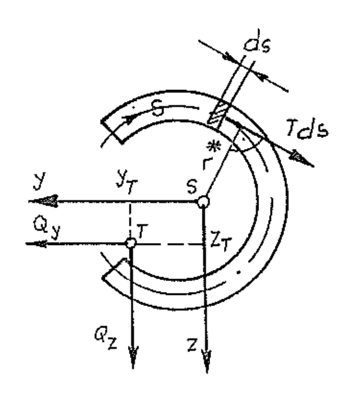
المحور الدوراني s(Umlaufskoordinate) من محور التناظر عنـــدئذ تكون T(0)=0 وبذلك تأخذ العلاقة (10-29) شكلا مبسطاً هو التالي :

$$T(s) = \frac{Q}{I_{yy}} S_y(s) \qquad (10\text{-}30)$$

١٠ ـ ٦ مركز القص

لقد ترك في البحوث السابقة شرط توازن العزوم حول المحور الذي ينطبـق على المحور الاوسط للقضيب (المحور x) دون تحقيق . أما هـذا الشرط فيتحقق فقط عندما يمـــر حامـل (Wirkungslinie) القوة العرضية المحصلة من نقطة معينة تسـمى **مركز القص** . اما اذا لم يتحقق ذلك (اي اذا لم يمر حامل القوة العرضية من النقطة T ، المساة بمركز القص)فعندئذ يتشكل عزم فتل يؤدي الى دوران الجائز (انفتال الجائز) مشكلا سيالة قص اضافيـة يلزم اضافتها الى الاجهاد المماسي القصي للحصول على القيمة النهائية للاجهاد المماسي .

بما ان للبروفيلات المفتوحة صلابة فتل ضئيلة جداً لذلك ينبغي (خاصة في هذه البروفيلات) ان يمر حامل القوة الخارجية من مركز القص وذلك لتفادي تشكل تحميل اضافي (غير ضروري) نتيجة لتشكيل عزوم الفتل . لحساب موضع (مكان) مركز القص يطبق شرط توازن العزوم بالنسبة لمحور (حول محور) القضيب الطولي (المحور x) . يعطي تطبيـق الشرط المذكور بالنسبة لمركز الثقل s (شكل 10.21) العلاقة التالية :



شكل 10.21

$$- \int_0^l r^* T ds + Q_z \cdot y_T - Q_y \cdot z_T = 0 \quad (10\text{-}31)$$

حيث أن r^* هي المسافة العمودية على شعاع القوة المماسية (Schubkraftvektors) والمارة من مركز الثقل s ، أو بكلام آخر بعد المماس على الخط الاوسط للمقطع العرضي عنـد مركز الثقل و l هو طول الخط الاوسط للبروفيل (Profilmittellinie) .

لايجاد احداثيات مركز القص يلزم الآن تعويض علاقات سيالة القص في المعادلة (10-31) .

١٠ - ٦ - ١ البروفيلات المفتوحة (المقاطع العرضية المفتوحة)

باعادة كتابة العلاقة (10-17) ثانية :

$$T(s) = \frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s)$$

وبالاستعانة بها يتم التوصل من العلاقة (10-31) لما يلي :

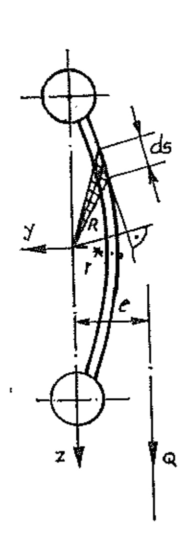
$$Q_y \left[+ \frac{1}{I_{zz}} \int_0^l S_z(s)\, r^*\, ds + z_T \right] +$$

$$+ Q_z \left[+ \frac{1}{I_{yy}} \int_0^l S_y(s)\, r^*\, ds - y_T \right] = 0 \quad (10\text{-}32)$$

بما أن موضع (مكان) مركز القص لايتعلق من Q_z , Q_y لذلك ينبغي انتكون القيمالموجودة داخل الاقواس في المعادلة (10-32) مساوية للصفر ، هذا يعني :

$$\left. \begin{aligned} z_T &= - \frac{1}{I_{zz}} \int_0^l S_z(s)\, r^*\, ds \\ y_T &= + \frac{1}{I_{yy}} \int_0^l S_y(s)\, r^*\, ds \end{aligned} \right\} \quad (10\text{-}33)$$

من أجل المقاطع العرضية ذات الاجنحة والتي تتصل مع بعض بصفيحة شاقولية تسمى الجسد (شكل 10-21) ، يتم الحصول على علاقات بسيطة .



شكل 10-22

حسب العلاقة (10.21) فان سيالة القص هي T=Q/h . بالتعويض في المعادلة (10.31) يتم التوصل ، بعد اعتبار العلاقات التالية :

$$Q_z = Q \,, \quad Q_y = 0$$

لما يلي :

$$\frac{Q}{h}\int_0^l r^*\, ds = -\,Q \,.\, y_T = Q \,.\, e \qquad (10\text{-}34)$$

حيث أن r*ds/2 هي كما يشير الشكل (10.22) مساحة سطح المثلث المهشر . بجمع هذه العلاقة على طول الخط الاوسط l لجدار القص (Schubwand) ينتج :

$$\int_0^l r^*\, ds = 2\, F_m \qquad (10\text{-}35)$$

حيث أن F_m هو السطح المحصور بين جدار القص والمحور z . من العلاقتين (10.34) و (10.35) يتم التوصل من أجل مسافة حامل القوة العرضية e عن المحور z للنتيجة التالية :

$$e = \frac{2F_m}{h} \qquad (10\text{-}36)$$

١٠ ـ ٦ ـ ٢ البروفيلات (المقاطع العرضية) المغلقة

ان سيالة القص حسب العلاقة (10 29 هي :

$$T(s) = \frac{Q_y}{I_{zz}}\left[S_z(s) - \frac{(\int S_z(s)\frac{ds}{\delta}}{(\int)\frac{ds}{\delta}}\right] + \frac{Q_z}{I_{yy}}\left[S_y(s) - \frac{(\int) S_y(s)\frac{ds}{\delta}}{\int)\frac{ds}{\delta}}\right]$$

بالتعويض في العلاقة (3 0) ينتج .

$$Q_y\left\{\frac{1}{I_{zz}}\left(\int \left[S_z(s) - \frac{(\int S_z(s)\frac{ds}{\delta}}{\int \frac{ds}{\delta}}\right] r^* ds + z_T\right\} -$$

$$+ Q_z\left\{\frac{1}{I_{yy}}(\int)\left[S_y(s) - \frac{(\int) S_y(s)\frac{ds}{\delta}}{(\int)\frac{ds}{\delta}}\right] r^* ds - y_T\right\} = 0 \qquad (10\text{-}37)$$

كما في المقاطع العرضية (البروفيلات) المفتوحة يتم منهـا ، هنا ايضاً ، الحصول على مكان مركز القص :

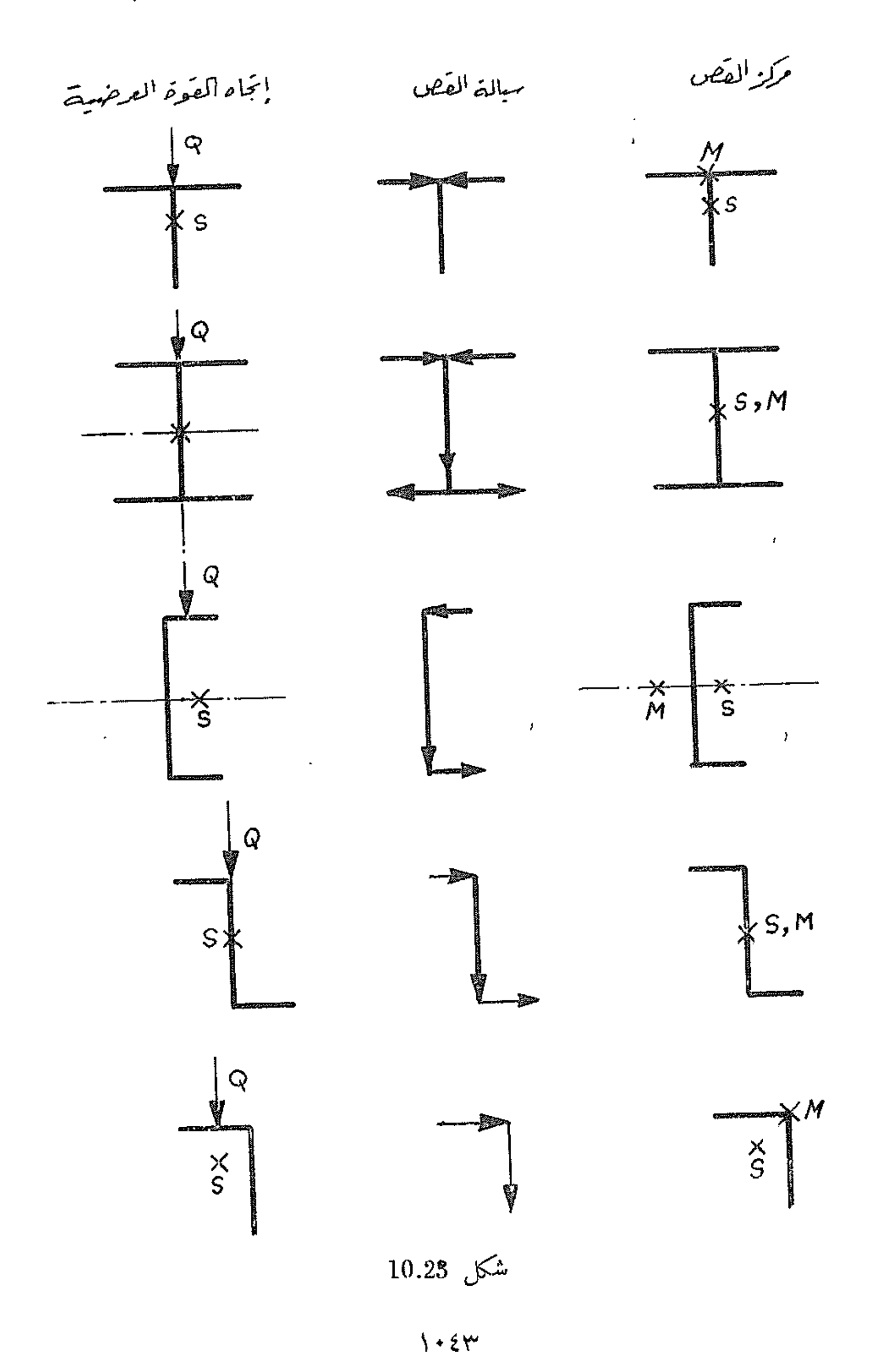
$$z_T = - \frac{1}{I_{zz}}\left(\int \left[S_z(s) - \frac{(\int) S_z(s)\frac{ds}{\delta}}{(\int)\frac{ds}{\delta}}\right] r^* ds\right.$$

$$10.38$$

$$y_T \quad \frac{1}{I_{yy}}\left(\int\right)\left[S_y(s) - \frac{(\int) S_y(s)\frac{ds}{\delta}}{(\int)\frac{ds}{\delta}}\right] r^* ds$$

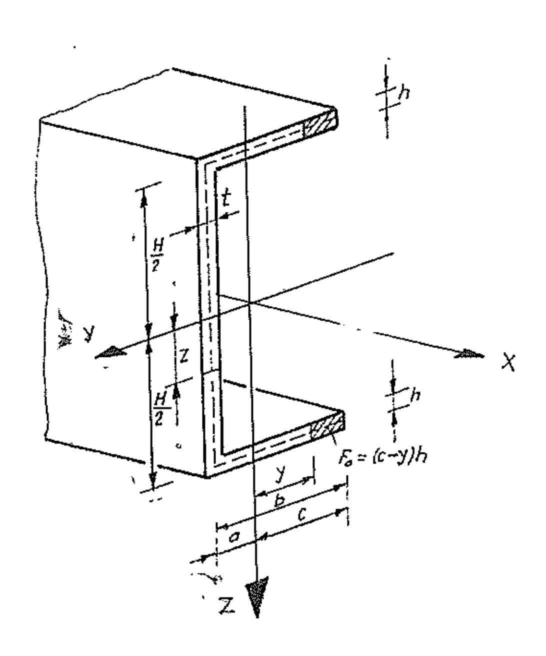
في بعض المقاطع العرضية الخاصة يستطاع بتفكير بسيط اعطاء معلومات كافية عن موضع مركز القص ، فمثلا ينطبق مركز القص في المقاطع العرضية ذات التناظر ثنائي المحـور (التنـاظر المزدوج) وكذلك المقاطع العرضية المتناظرة عكسياً (على سبيل المثال المقاطع العرضية على شكل

حرف z) على مركز الثقل . أما في المقاطع العرضية بمحور تناظر واحد (المتنـاظرة بالنسبة لمحور واحد) فيقـع مركز القص على محور التناظر المذكور (شكل 10.23) .



شكل 10.23

سوف يتم الآن حساب الاجهادات المماسية التي تتشكل اثناء انعطاف بروفيل على شكل حرف C ومؤلف من مستطيلات رقيقة ، بالنسبة للمحور y (شكل 10.24) .



شكل 10.24

من أجل الجناح السفلي يتم ، بواسطة العلاقة التالية :

$$S_{ya}(y) = \frac{H}{2}(c-y)\,h$$

تعيين الاجهادات المماسية فيه:

$$\tau_{xy}(x,y) = Q_z(x)\,\frac{H(c-y)}{2\,I_{yy}}$$

ومن اجل الجناح العلوي يتم بواسطة العلاقة الآتية :

$$S_{ya}(y) = -\frac{H}{2}(c-y)\,h$$

تعيين الاجهادات المماسية هناك :

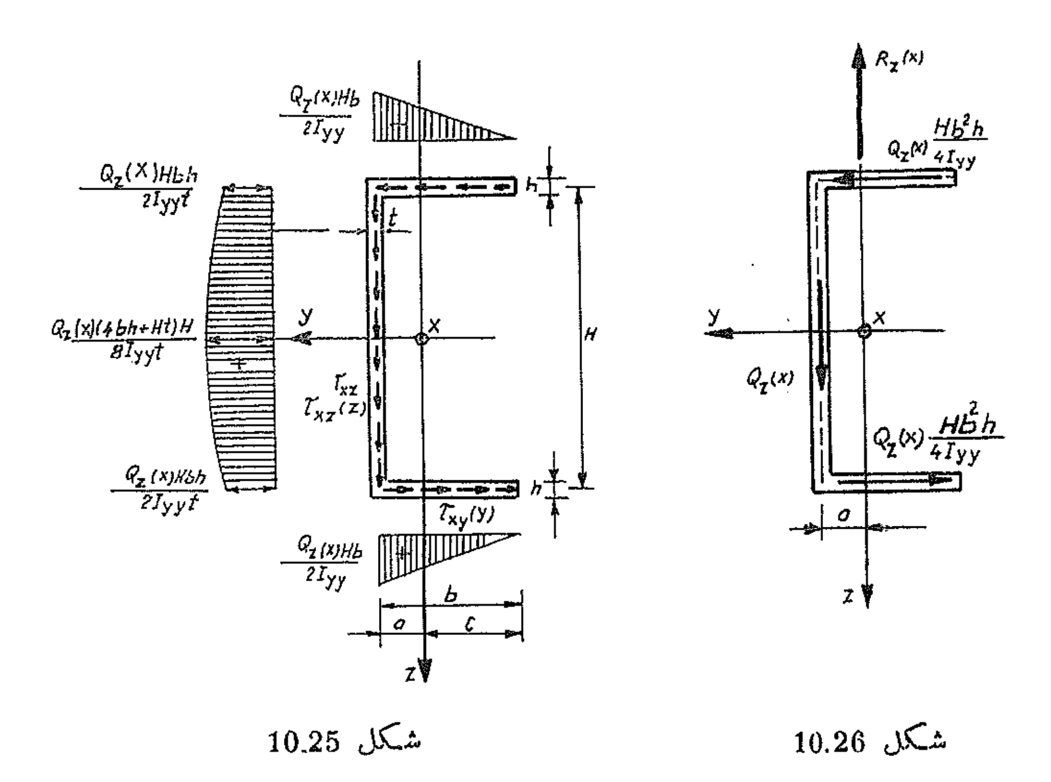
$$\tau_{xy}(x,y) = -\,Q_z(x)\,\frac{H(c\ \ y)}{2\,I_{yy}}$$

بسبب الافتراض أن $h, t << b, H$ يتم بواسطة العلاقة التالية :

$$S_{ya}(z) = bh\,\frac{H}{2} + t\left(\frac{H}{2} - z\right)\frac{\left(\frac{H}{2} + z\right)}{2} = b\,h\,\frac{H}{2} + \frac{\left(\frac{H^2}{4} - z^2\right)t}{2}$$

تعيين الاجهادات المماسية في الجسد :

$$\tau_{xz}(x, z) = Q_z(x)\,\frac{bh\,H + \left(\frac{H^2}{4} - z^2\right)t}{2\,I_{yy}\,t}$$



شكل 10.25

شكل 10.26

لقد تم في الشكل (10.25) رسم توزيع الاجهاد المماسي ، كما قد تم في الشكل (10.26) رسم محصلات الاجهادات المماسية المذكورة . تشكل القوى المؤثرة في الجناحين مزدوجة قوى يبلغ عزمها القيمة التالية :

$$Q_z(x)\,\frac{H^2\,b^2\,h}{4\,I_{yy}}$$

بينما تتوازن محصلة القوى الخارجية $R_z(x)$ المؤثرة على الجزء الايسر من الجائز مع القوة

العرضية $Q_z(x)$. في حالة الانعطاف المستقيم (الانعطاف وحيد المحور) لقضيب مقطعهالعرضي هو بروفيل على شكل حرف [فان الجائز سوف يعمل (يحمل)حينئذ على الانعطاف والفتل. أما عزم الفتل فيبلغ :

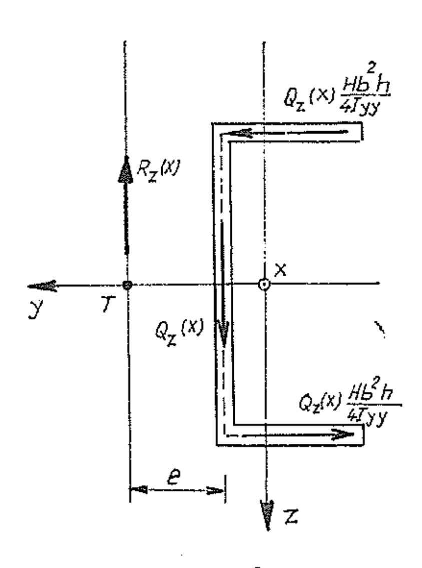
$$M_x(x) = Q_z(x)\left(a + \frac{H^2 b^2 h}{4 I_{yy}}\right)$$

حتى ولو كان الجسد أيضاً هو مستوي التحميـــل لايزال يتشكل في المقطع العرضي فتـل يبلغ عزمه :

$$M_x(x) = Q_z(x)\ \frac{H^2 b^2 h}{4 I_{yy}}$$

لتفادي الفتل كلياً ينبغي أن يأخذ مستوي التحميل عن الجسد بعداً قدره (شكل 10.27):

$$e = \frac{H^2 b^2 h}{4 I_{yy}}$$



شكل 10.27

في هذه الحالة فقط يتم تعيين الاجهادات المتشكلة في الجائز بواسطة العلاقات التالية :

$$\sigma_{xx}(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}}\, z \qquad ; \qquad \tau_{xz}(x, z) = \frac{Q_z(x)\, S_{ya}(z)}{I_{yy}\, b(z)}$$

تسمى نقطة التقاطع T الواقعة على المحور y لاي مقطع عرضي يقع مستوي التحميل فيه موازياً للجسد **بمركز القص** (Schubmittelpunkt) **أومركز القوة العرضية**(Querkraftmittelpunkt) ويعرف بأنه النقـطة التي اذا مر منهـا أثر مستوي التحميل كان المقـطع العرضي خالياً من الفتل .

مثـال 139 :

حمل جائز رقيق الجدار بالقوى العرضية Q_z , Q_y (شكل 10.28) .

المعطى : δ , α , a .

المطلوب : حساب :

١ ـ توزيع الاجهاد المماسي .

٢ ـ احداثيات مركز الثقل .

الحـــل :

١ ـ حسب المعادلة (10.17) تصلح من أجل الاجهادات المماسية العلاقة التالية :

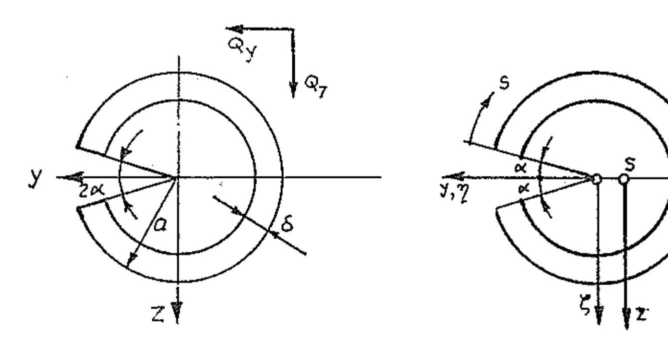
$$\tau(s) = \frac{Q_y}{I_{zz}\cdot\delta} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}\cdot\delta} S_y(s)$$

لقد افترض فيها ان المحاور z , y هي محاور رئيسية . ينبغي في البداية تحديد موضع مركزالثقل. للسهولة سوف نختار مجموعة محاور قطبية (شكل 10 29) . بما أن مركز الثقل يقع على محور التناظر لذلك يكتفى بايجاد η_0 فقط .

$$\eta = -a\cos\varphi \qquad , \qquad \zeta = a\sin\varphi$$

$$\eta_0 = \frac{1}{F}\int_F \eta\, dF = -\frac{\int_{-(\pi-\alpha)}^{(\pi-\alpha)} a\cos\varphi\, a\,\delta\, d\varphi}{\int_{-(\pi-\alpha)}^{(\pi-a)} \delta a\, d\varphi}$$

$$\eta_0 = -a\,\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\pi-\alpha} = -a\,\frac{\sin\alpha}{\pi-\alpha}$$



شكل 10.28   شكل 10.29

و :

$$z = \zeta$$

تعطى العلاقة التي تربط بين φ وبين الاحداثي s بواسطة العلاقة التالية :

$$s = a(\varphi + \pi - \alpha)$$

اثناء ايجاد عزوم المطالة سوف يهمل عزم العطالة الذاتي للعنصر السطحي $dF = ahd\varphi$ بالنسبة لمركز ثقله ، عندئذ ينتج :

$$I_{yy} = I_{\eta\eta} = \int_{-(\pi-\alpha)}^{+(\pi-\alpha)} \zeta^2 \delta a\, d\varphi = 2\,\delta\, a^3 \int_0^{\pi-\alpha} \sin^2\varphi\, d\varphi = a^3\,\delta\,(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\Big|_0^{\pi-\alpha}$$

$$I_{yy} = a^3\delta\,(\pi - \alpha + \sin\alpha\cos\alpha)$$

$$I_{zz} = I_{\xi\xi} - \eta_s^2 F = \int_{-(\pi-\alpha)}^{+(\pi-\alpha)} \eta^2 \delta a\, d\varphi - 2a\delta(\pi-\alpha)\left(\frac{a\sin\alpha}{\pi-\alpha}\right)^2$$

$$I_{zz} = 2a^3\delta\left(\int_0^{\pi-\alpha}\cos^2\varphi\, d\varphi - \frac{\sin^2\alpha}{\pi-\alpha}\right) = a^3\delta\left(\pi - \alpha - \sin\alpha\cos\alpha - 2\frac{\sin^2\alpha}{\pi-\alpha}\right)$$

بواسطة العلاقة (10-16) يتم تعيين العزوم الستاتيكية :

$$S_z = \int_0^s y\,\delta\, ds\ ,\quad S_y = \int_0^s z\,\delta\, ds$$

بالاستعانة بالعنصر الطولي $ds=ad\varphi$ ينتج :

$$S_z = \int_{-(\pi-\alpha)}^{\varphi} (-a\cos\varphi \quad \eta_s)\,\delta\, a\, d\varphi = a^2\delta\left(-\sin\varphi - \frac{\eta_o\varphi}{a}\right)\Bigg|_{-(\pi-\alpha)}^{\varphi}$$

$$S_z = a^2\delta\left(\frac{\sin\alpha}{\pi-\alpha}\varphi - \sin\varphi\right)$$

$$S_y = \int_{-(\pi-\alpha)}^{\varphi} a\sin\varphi\,\delta\, a\, d\varphi = a^2\delta\int_{-(\pi-\alpha)}^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi = a^2\delta(-\cos\varphi)\Bigg|_{-(\pi-\alpha)}^{\varphi}$$

$$S_y = a^2\delta(-\cos\alpha - \cos\varphi)$$

بالتبديل في العلاقة الاولى يتم تعيين الاجهاد المماسي :

$$\tau(s) = \frac{Q_y}{a\delta}\,\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\pi-\alpha}\varphi - \sin\varphi}{\pi-\alpha-\sin\alpha\cos\alpha - 2\dfrac{\sin^2\alpha}{\pi-\alpha}} -$$

$$-\frac{Q_z}{a\delta}\,\frac{\cos\alpha + \cos\varphi}{\pi \quad \alpha + \sin\alpha\cos\alpha}$$

لوقوع مركز القص على محور التناظر لذلك فان :

$$\zeta_T = z_T = 0$$

لحساب y_T أو η_T سوف تستخدم العلاقة (10.33) :

$$\eta_T = +\frac{1}{I_{yy}}\int_0^l S_y\, r^*\, ds$$

ان المسافة r^* هي ثابتة وذلك لأن المحسوب هنا هو η_T وليس y_T .

$$r^* = a$$

بذلك يصبح :

$$\eta_T = -\frac{1}{I_{yy}} \int_{-(\pi-\alpha)}^{+(\pi-\alpha)} a^2 \delta (+\cos\alpha + \cos\varphi) a^2 d\varphi$$

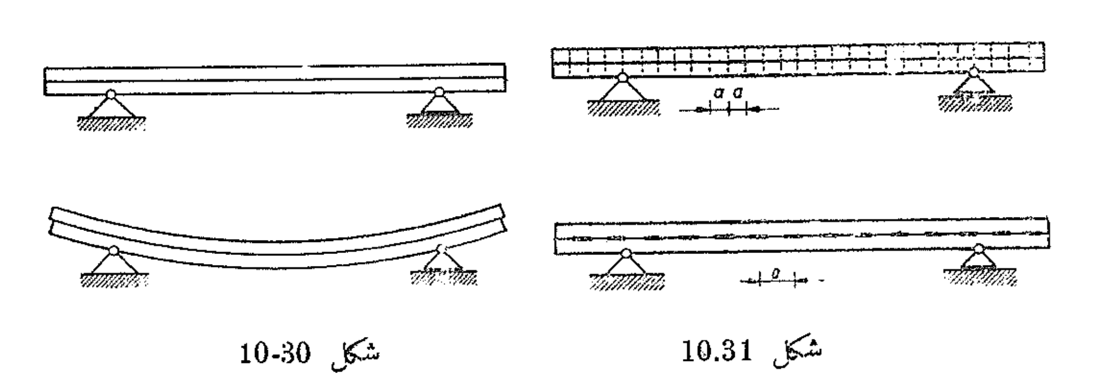
$$\eta_T = -\frac{2a^4 \delta [(\pi-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha]}{a^3 \delta (\pi - \alpha + \sin\alpha \cos\alpha)}$$

$$\eta_T = -2a \frac{(\pi-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha}{\pi - \alpha + \sin\alpha\cos\alpha}$$

١٠ ـ ٧ حساب وسائل الاتصال

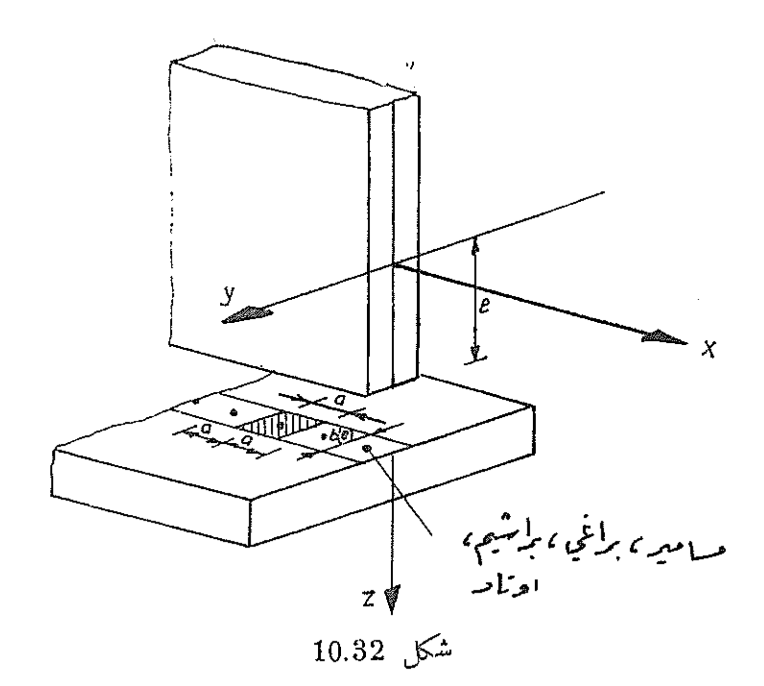
فيما يلي سوف يتم ، لحساب البراشيم (Nieten) والمسامير (Naegln) والاوتاد (Dübeln) والخ، إستخدام العلاقة التالية :

$$\tau_{xz}(x, z) = \tau_{zx}(x,z) = \frac{Q_z(x) S_{y'}(z)}{I_{yy}\, b(z)} \qquad (10.39)$$



شكل 10-30 شكل 10.31

بوضع جائزين فوق بعضها البعض ، عندئذ يقوم كل منهما اثناء الانعطاف بانتقال متبادل (شكل 10.30) وذلك لعدم إمكانية نقل (حمل) اجهادات مماسية طولية τ_{zx} على سطوح تماسها . لمنع هذا الانتقال يصار لربط (لوصل) كلا الجائزين مع بعض بواسطة مسامير او براشيم او اوتاد (شكل 10.31) ، بذلك يتم نقل الاجهادات المماسية الطولية بواسطة وسائل الاتصال وبذلك ينشأ عن ذلك جائز موحد (متكامل) . عندما يرمز المسافة بين وسائل الاتصال (وسائط الربط) بالحرف a ، عندئذ يتحمل (بشكل تقريبي) كل من اعضاء الاتصال الموجودة على سطح التماس z=const=e حسب العلاقة (10-39) القوة التالية (شكل 10 32):



شكل 10.32

$$\tau_{xz}(x,e)\ b\ (e)\ a\ (x) = T\ (x) = \frac{Q_z\ (x)\ S_{ya}\ (e)}{I_{yy}}\ a(x)$$

(في الحقيقة لايقوم كل عضو من اعضاء الاتصال بنقل نفس القيـــمة أما ما سبـق ذكره فهو فرض ولكنه هو المستعمل في الحياة العملية) . بالاستعانـــة بالقوة القاصة المسموحة (zulaessigen Scherkraft) للمادة التي صنعت منها اعضاء الاتصال ، عندئذ تصلح المتراجحة التالية :

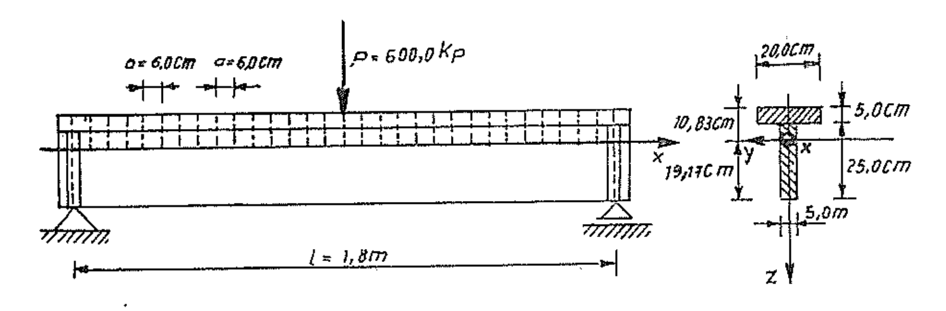
$$T\ (x) = \frac{Q_z\ (x)\ S_{ya}\ (e)}{I_{yy}}\ a\ (x) \leqq \text{zul}\ T \qquad (10{,}40)$$

بواسطتها يتم اجراء الكشف عن الاجهاد (Spannungsnachweis) او تعيين المسافة اللازمة :

$$\text{erf}\ a\ (x) \leqq \frac{\text{zul}\ T}{Q_z\ (x)}\ \frac{I_{yy}}{S_{ya}\ (e)} \qquad (10.41)$$

مثـال 140 :

يتألف جائز (حامل) خشبي من لوحين متصلين مع بعض بواسطة المسـامير (مسمرين) . يحمل الجائز في منتصفه بقوة وحيدة P=600 kp . يبلغ طول الجائز l=1,80 m أما المقطع العرضي للجائز فهو الممثل في الشكل (10.33). يبلغ البعد بين المسامير a=6,0 cm .
المطلوب : تعيين القوة القاصة الاعظمية في المسمار الواحد .



شكل 10.33

الحـــل :

في البداية يعين موضع مركز الثقل وعزم العطالة السطحي $I_{yy} = 19{,}2 \cdot 10^3\ cm^4$. ان القوة العرضية الموجودة على يسار وكذلك الموجودة على يمين القوة P هي ثابتة (يوضح ذلك بتخيل مخطط Q) وتبلغ القيمة المطلقة لكل منهما $|Q_z| = 300{,}0\ kp$. يبلغ العزم الستاتيكي S_{ya} القيمة التالية :

$$|S_{ya}| = 5{,}0 \cdot 25{,}0 \cdot (19{,}17 - 12{,}50) = 833{,}0\ cm^3$$

أو

$$|S_{ya}| = 5{,}0 \cdot 20{,}0 \cdot (10{,}83 - 2{,}50) = 833{,}0\ cm^3$$

وبذلك فان القوة القاصة في المسمار الواحد هي :

$$T = \frac{300{,}0 \cdot 833{,}0}{19200{,}0}\ 6{,}0 = 78{,}1\ kp$$

مثال 141 :

تقوى أجنحة جائز (حامل) فولاذي من النوع IP 20 بصفيحتين فولاذيتين 20 . 300 . للربط بين الصفائح وأجنحة الجائز سوف تستخدم براشيم يبلغ البعد بين كل منها a=7,0 cm (شكل 10-34) .

المطلوب : حساب قطر البرشيم d الذي ينبغي اختياره كوسيلة للربط وذلك عندما تبلغ القوة العرضية التي يلزم نقلها (حملها) هي $Q_z = 50{,}0\ Mp$ وان اجهاد القص المسموح (zulaessige Scherspannung) هو $zul\ \tau = 1{,}2\ Mp\ cm^{-2}$.

الحـــل :

بادخال ثقوب البراشيم وما ينتج عنها من اضعاف المقطع العرضي بعين الاعتبار ، عنـدئذ يتم بواسطة عزم المطالة السطحي :

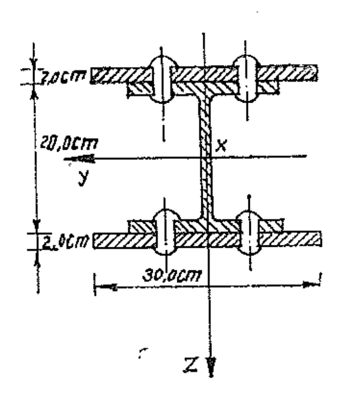
$$I_{yy} = 5950 + 2 \cdot \frac{30{,}0 \cdot 2{,}0^3}{12} + 2 \cdot 30{,}0 \,,\, 2{,}0 \cdot 11{,}0^2 = 20\,510{,}0 \text{ cm}^4$$

والعزم الستاتيكي :

$$| S_{va} | = 30{,}0 \cdot 2{,}0 \cdot 11{,}0 = 660{,}0 \text{ cm}^3$$

التوصل للقوة التي ينقلها زوج من البراشيم :

$$T = \frac{50{,}0 \cdot 660{,}0 \cdot 7{,}0}{20510{,}0} = 11{,}3 \text{ Mp}$$



شكل 10.34

من العلاقة التالية :

$$2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \geqq \frac{T}{zul \tau}$$

يتم تعيين القطر المطلوب للبرشيم :

$$d \geqq \sqrt{\frac{2T}{\pi \ zul \ \tau}} = \sqrt{\frac{2.11\,3}{\pi \cdot 1{,}2}} = 2{,}45 \text{ cm}$$

لذلك سوف تختار للربط (للوصل) المذكور براشيم أقطارها 2,5 cm .

الفصل الحادي عشر

فرضيات المتانة «فرضيات الانكسار»

١١ ـ ١ عموميات

يقود تصميم عناصر الانشاءات المحملة (التي تعمل) على كل من الشد (او الضغط) والقص والفتل والانعطاف او على التحنيب الذي تم بحثه في الفصول السابقة الى مقارنة قيم الاجهادات الناظمية او المماسية الاعظمية ($\max \sigma$ او $\max \tau$) مع قيم الاجهادات الناظمية او المماسية المسموحة ($\text{zul}\,\sigma$ او $\text{zul}\,\tau$) . كما يتطلب الكشف عن الاجهادات في اجزاء الانشاءات الى مقارنة الاجهادات الموجودة مع الاجهادات المسموحة وذلك حسب العلاقات التالية :

$$\sigma \leq \text{zul}\,\sigma \quad \text{أو} \quad \tau \leqq \text{zul}\,\tau$$

يتم تعيين الاجهادات المسموحة $\text{zul}\,\sigma$ و $\text{zul}\,\tau$ (التي تعتبر قيماً نوعية لكل مادة) بالاستعانة باجهاد الانسياب او اجهاد الانكسار (اجهاد الكسر) اللذين يتم الحصول عليهما من تجربة الشد (او الضغط) وتجربة الفتل التي تجرى على قضيب اختبار تثبت أبعاده في دفاتر المواصفات. لكن قلما يوجد هناك عنصر انشائي يحتوي على حالة اجهاد محورية بسيطة امثال حالات الاجهاد السابقة الذكر بل على عكس ذلك فان غالب العناصر الانشائية تحتوي على حالات اجهاد معقدة تؤدي لان تتشكل في نفس الوقت في كل نقطة من النقاط اجهادات ناظمية ومماسية . وهنا تتجلى اهمية السؤال التالي :

كيف يجري حساب (تصميم) العناصر الانشائية التي تحتوي على حالة اجهاد عامة وكيف يتم الكشف عن الاجهادات في تلك العناصر ، وهل ينكسر المنصر الانشائي المحمل بحالة اجهاد عامة عندما تصل في نقطة ما منه الاجهادات الناظمية او الاجهادات المماسية الى قيمة الاجهاد الذي يؤدي لانكسار قضيب اختبار من نفس المادة ومحمل بحالة اجهاد محورية ام لا ، وماهي العلاقة التي تربط بين حادثة الانكسار في حالة الاجهاد العامة (المستوية او الفراغية) وبين حادثة الانكسار في حالة الاجهاد المحورية . يمكن التعبير عن هذه المشكلة بالطريقة التالية :

تسيطر (تسود) في نقطة ما من جسم حالة اجهاد معينة (عندما تكون حالة الاجهاد المذكورة حالة اجهاد مستوية فانها تتعين من خلال الاجهادات σ_{xx} ، σ_{yy} ، τ_{xy}) .

أما السؤال فيعبر عنه بالشكل التالي ، هل ينهار (ينكسر) الجسم المذكور عندما تبلغ احدى القيم الاربعة التالية ، الاجهاد الناظمي σ والاجهاد المماسي τ والتمدد ε وزاوية الانزلاق γ قيمة معينة ام هل ان السبب في الانهيار (الانكسار) عائد لقيمتين منها ام هل أن كافة القيم مسؤولة عن ذلك . ليست الاجابة على هذا السؤال بالامر السهل ولا المعين وذلك لتعدد المؤثرات التي تؤدي الى الانكسار ، لذا قام الباحثون على مرور الزمن بالتفتيش عن فرضيات تعالج طريقة الاجابة على هذا السؤال ، سيتم فيما يلي ذكر اهمها فقط ، وللتأكد من مدى صحة كل من هذه الفرضيات ومطابقتها للظاهرة الفعلية سوف يلجأ الى مقارنة نتائج الفرضيات مع نتائج التجارب والخبرات .

حالة خاصة (حالة الاجهاد المستوية) :

المعلوم : σ_{xx} ، σ_{yy} ، $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

تظهر حالة الاجهاد المستوية ، على سبيل المثال ، في الانبوب الممثل في الشكل (11.1) والمحمل على الانعطاف نتيجة لتأثير الحمولة الخطية الموزعة بانتظام p وعلى الشد نتيجة لتأثير الضغط الداخلي المنتظم q وعلى الفتل نتيجة لتأثير العزم M . تبلغ القيم الحدية للاجهادات الناظمية والمماسية في نقطة ما من عنصر انشائي تسيطر عليه حالة اجهاد مستوية حسب العلاقات (2.28a) , (2.28 b) , (2.28 d) ما يلي :

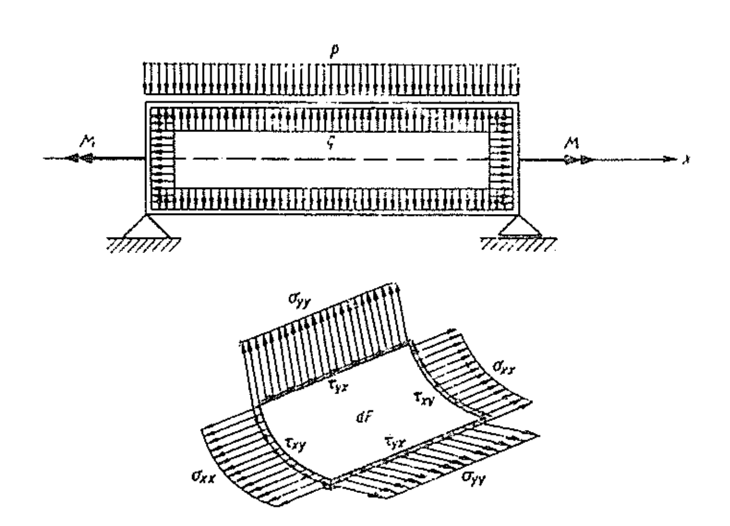
$$\max \sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\min \sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (11.1)$$

$$\max \tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

والآن يطرح السؤال التالي : كيف يتم الكشف عن الاجهادات في مثل هذه الحالة .

يمكن الافتراض ، بشكل مبدئي ، بأن كافة القيم الحدية للاجهادات الناظمية وكذلك أيضاً للاجهادات المماسية يجب ان تحقق بصورة مستقلة المتراجحات التالية :



شكل 11.1

$$\text{zul}\ \sigma_D \leqq \begin{matrix}\max \sigma \\ \min \sigma\end{matrix} \leqq \ \leqq \text{zul}\ \sigma_z$$

$$-\text{zul}\ \tau \leqq \max \tau \leqq \text{zul}\ \tau$$

لكن التجارب تشير الى عدم صحة ذلك الافتراض كما تشير الى وجود اجهاد واحـد ، يسمى **بالاجهاد المقارن (الاجهـــاد المكافيء)** ويرمز له بالرمز σ_v ، وينشأ عن الاجهـادات σ_{xx} ، σ_{yy} ، τ_{xy} وهو المسؤول وحده عن ايجاد المادة (انكسار المادة) . أما العلاقـة التي تربط بين σ_v وبين الاجهادات σ_{xx} ، σ_{yy} ، τ_{xy} فهي غير محددة وهي وظيفة الفرضيات التي سيتم دراستها لاحقاً . إذاً فان هدف فرضيات المتانة هو اقتراح مقاييس لتعيين متانةعنصر انشائي موجود في حالة اجهاد معقدة (حالة اجهاد عامة) ووفق هذه المقاييس سـوف تعين اجهادات المقارنة (الاجهادات المكافئة) (أي يعين اجهاد الشد المحوري) للعنصر الانشـائي الذي يكافيء بمقاومته عنصراً يقع في حالة اجهاد معقدة .

١١ ـ ٢ فرضية الاجهادات الرئيسية (فرضية الاجهادات الناظمية الاعظمية) (Rankine)

تعتبر فرضية الاجهادات الناظمية الاعظمية (فرضية الاجهادات الرئيسية) أقدم فرضية للانكسار تعيد هذه الفرضية بصورة رئيسية انكسار الجسم (انكسار المادة) الى بلوغ احدى الاجهادات الناظمية الاعظمية (الاجهادات الرئيسية) الثلاثة في نقطة ما منه ، اجهـاد الانسياب σ_F او

بالاحرى اجهاد الانكسار σ_B . الذي يتم الحصول عليه من تجربة الشد المجـــراة على قضيب اختبار من نفس المادة وبذلك يتم الحصول على الاجهاد المقارن (الاجهاد المكافىء) الاول ممثلا بالعلاقة التالية :

$$\sigma_{v_1} = \sigma_1$$

(حيث أن $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ وهي تمثل الاجهادات الرئيسية الثلاثة) . بواسطة هــذه الفرضية يمكن التعبير عن الشرط التصميمي (شرط المقايسة) بسهولة وبالشكل التالي :

$$-\sigma_F < \sigma_1 < \sigma_F$$
$$-\sigma_F < \sigma_2 < \sigma_F \qquad (11\text{-}2)$$
$$-\sigma_F < \sigma_3 < \sigma_F$$

تتطابق نتائج هذه النظرية مع نتائج تجارب المواد شديدة التقصف (sehr spröde Materialien)، اما بالنسبة للمواد الاخرى فتشير التجارب الى ان هذه النظرية ليست نظرية دقيقة (اي انهــا لاتمتلك الدقة الكافية) .

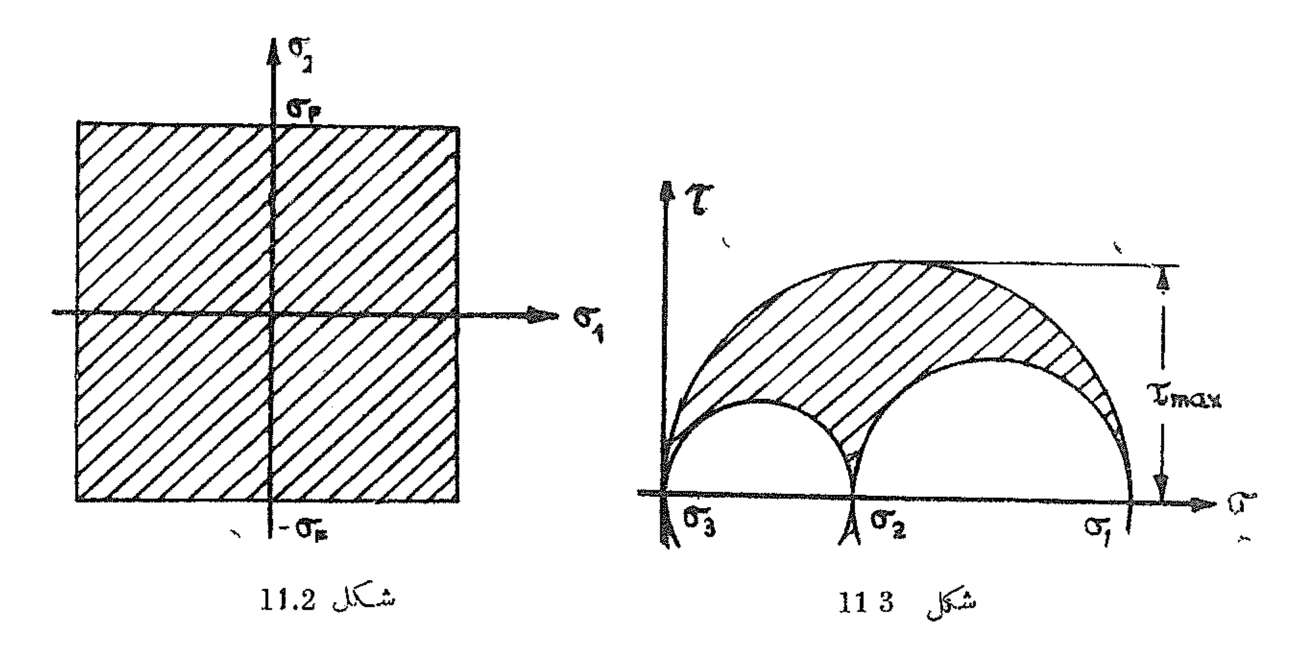
حالة خاصة (حالة الاجهاد المستوية) :

من اجل حالة الاجهاد المستوية ينعدم الاجهاد الناظمي الثالث $\sigma_3=0$. يمكن تمثيـل الشرط التصميمي لحالة الاجهاد المستوية على شكل مخطط . استناداً على هذه الفرضية لا يظهر انكسار المادة عندما تقع حالة الاجهاد ضمن المجال المؤشر الممثل في الشكل (11.2) .

ان لهذه الفرضية نقاط ضعف كثيرة تظهر بمقارنة نتائج هذه الفرضية مع نتائج التجارب . فمثلاً ليس صحيحاً ان يكون للاجهاد الناظمي فقط التأثير على حادثة الانكسار . وكذلك تشيرهذه الفرضية الى انكسار جسم محمل على الضغط من كل جوانبه عند بلوغ اجهاد الضغط اجهـاد انسياب المادة وهذا مالا يتفق مع نتائج التجارب .

١١ ـ ٣ فرضية التمددات الرئيسية (Bach)

تعيد فرضية التمددات الرئيسية سبب حادثة الانكسار بصورة رئيسية الى التغيرات الاعظمية مما يؤدي للحصول على العلاقة التالية :



شكل 11.2

شكل 11 3

$$\sigma_{v2} = E \mid \varepsilon_1 \mid = \mid \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \mid \qquad (11\text{-}3)$$

حيث ان

$$\mid \varepsilon_1 \mid \geqq \mid \varepsilon_2 \mid \geqq \mid \varepsilon_3 \mid$$

تسير نتائج هذه النظرية الى اختلافات واضحة مع نتائج التجارب ولكنها بالرغم من ذلك ماتزال تستخدم في عديد من الطرائق الحسابية .

١١ . ٤ فرضية الاجهادات المماسية الاعظمية (Coulomb, Saint - Venant, Guest)

لقد كانت الانكسارات القصية (الانكسارات الناتجة عن الاجهادات المماسية) التي تحدث في تجربة الشد / الضغط حافزاً لبعض العلماء في اعادة السبب في حادثة الانسياب وكذلك حادثة الانكسار الى الاجهادات المماسية الاعظمية وحدها . فحادثة الانسياب وكذلك حادثة الانكسار تعود حسب هذه الفرضية لبلوغ الاجهاد المماسي الاعظمي (الموجود في حالة الاجهاد العامة) القيم التالية :

$$\max \tau = \frac{\sigma_F}{2} \quad , \quad \max \tau = \frac{\sigma_B}{2} \qquad (11\text{-}4)$$

أما $\sigma_B \cdot \sigma_F$ فيتم الحصول عليها من تجربة الشـد . هذه العلاقة (من وجهة نظر هـــذه الفرضية) هي التي تربط بين حالة الاجهاد العامـة (المستوية او الفراغية) وبيـن حالة الاجهاد المحورية (الخطية) المتجانسـة التي تتعين نتائجها بواسطة تجارب الشد / الضغط او

الفتل (وتتلخص العمليات في هذه الفرضية بمقارنة الاجهادات المماسية الاعظمية τ_1 ، τ_2 ، τ_3 الموجودة في حالة الاجهاد العامة مع الاجهادات المماسية اللازمة لحدوث الانسياب او بالاحرى الانكسار $\tau = \sigma_F/2 = \sigma_{V_3}/2$ في قضيب الاختبار الذي يمثل حالة اجهاد خطية متجانسة والذي تبلغ اجهاداته الناظمية σ_{V_3}) . من هذه الفرضية يتم الحصول على علاقة الاجهاد المقارن (الاجهاد المكافيء) الثالث التالية :

$$\sigma_{v3} = 2 \max \tau = \sigma_1 - \sigma_3$$

حسب هذه النظرية فان الاجهاد الناظمي المتوسط σ_2 لا يلعب دوراً في حادثة الانكسار (اي انه لا يؤثر على حادثة الانكسار) . تتأكد صحة هذه الفرضية فقط في المواد التي تحتوي على حد انسياب بارز وخاصة الفولاذ . وهذا ما قد شجع العالم مور (MOHR) بالتفتيش عن فرضية يمتد مجال صلاحيتها على كل المواد ، لكن فرضية الحالة الحدية المرنة التي تمكن العالم مور من الحصول عليها والتي تمثل ارتباطاً بين فرضيـة الاجهادات المماسية لم تستطع الاحتفاظ طويلا بمركز الصدارة . بواسطة فرضية الاجهادات المماسية الاعظمية يمكن التعبير عن شرط التصميم (شرط المقايسة) بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} -\max \tau &< \tau_1 < \max \tau \\ -\max \tau &< \tau_2 < \max \tau \qquad (11\text{-}5) \\ -\max \tau &< \tau_3 < \max \tau \end{aligned}$$

حسب النتائج التي تم الحسول عليها من العلاقة (2 31) يمكن التعبير عن الاجهادات المماسية بواسطة الاجهادات الرئيسية وذلك بالشكل التالي :

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \ , \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \ , \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (11\text{-}6)$$

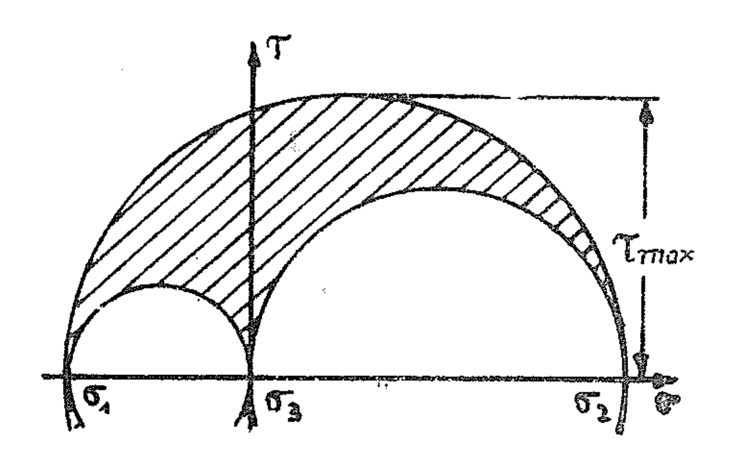
مما يجعل الشرط التصميمي يأخذ الشكل الآتي :

$$\begin{aligned} -\sigma_F &< \sigma_2 - \sigma_3 < \sigma_F \\ -\sigma_F &< \sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_F \qquad (11\text{-}7) \\ -\sigma_F &< \sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_F \end{aligned}$$

حالة خاصة (حالة الاجهاد المستوية $\sigma_3 = 0$) :

سيتم الآن التفريق بين حالتين :

آ ـ حالة كون $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ ، عندئذ تصلح دائرة اجهاد مور الممثلة في الشكل (11.3) .



شكل11.3b

وبذلك فان الشرط التصميمي يصبح بالشكل التالي :

$$\max \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1}{2} \leqq \frac{\sigma_F}{2} \qquad (11.8)$$

وهو يشير الى ان الاجهاد الوسطي σ_2 ، حسب هذه الفرضية ، لا يلعب دوراً في حادثة الانكسار . تعطى الاجهادات الحدية التي تحقق افكار هذه النظرية والتي تقع في الربع الاول من مخطط $\sigma_1 . \sigma_2$ بواسطة القيم التالية (شكل 11.4) :

$$\sigma_1 = \text{const.} = \sigma_F$$

$$(11\text{-}9)$$

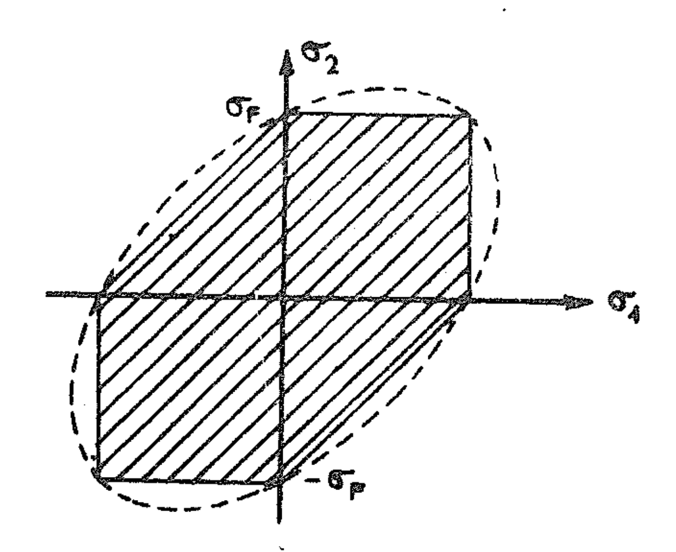
$$\sigma_2 = \text{const.} = \sigma_F$$

عندما تكون الاجهادات الناظمية σ_1 , σ_2 أصغر من الصفر عندئذ يتم ، بنفس الفكرة ، الحصول على الاجهادات الحدية الواقعة في الربع الثالث .

ب ـ حالة كون $\sigma_1 > 0 , \sigma_2 < 0$.

لقد تم تمثيل دائرة مور العائدة لهذه الحالة في الشكل (11.3b . يعطى الاجهاد المماسي الاعظمي الآن بواسطة العلاقة التالية :

$$\max \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} < \frac{\sigma_F}{2} \qquad (11\text{-}10)$$



شكل 11.4

أو

$$\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_F \qquad (11\text{-}11)$$

تمثل حدود الاجهاد في الربع الثاني من مخطط σ_1 , σ_2 ، وذلك كما تعطه العلاقة (11.11) ، بواسطة مستقيم ولقد تم تمثيلها في الشكل (11.4) . تنطبق نفس الفكرة على حدود الاجهاد في الربع الرابع من مخطط σ_1 , σ_2 . حسب نظرية الاجهادات المماسية الاعظمية يتم انكسار جسم عندما تقع حالة الاجهاد في موضع ما منه داخل المجال المهشر الممثل في الشكل (11.4). يتطابق المخطط المذكور في مجاله الاول والثالث مع المخطط العائد لنظرية الاجهادات الناظمية الاعظمية . يفضل ، في الحسابات العملية ، استخدام العلاقة (11.10) وذلك عندما تكون الاجهادات σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} هي المعلومة وتكون الاجهادات الرئيسة هي المجهولة .

من اجل الحالة آ $(\sigma_1 > \sigma_2 > 0)$:

من دائرة اجهاد مور يستطاع بسهولة ، من اجل هذه الحالة اشتقاق العلاقات التالية :

$$\max\ \tau = \frac{\sigma_1}{2} < \frac{\sigma_F}{2} \qquad (11\text{-}12)$$

$$\max\ \tau = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right] < \frac{\sigma_F}{2} \qquad (11\text{-}13)$$

على كل حال لا يجوز تصميم عنصر أنشائي بحيث تبلغ اجهاداته الفعلية (الموجودة فيه) حـد الانسياب ، بل يسمح للاجهادات الموجودة ، حسب الحالات المترتبة ، من بلوغ جزء من اجهاد الانسياب وهذا ما يسمى **بالاجهاد المسموح** . وبذلك يأخذ الشرط التصميمي الشكل الآتي :

$$\sigma_1 = \sigma_{3v} = \frac{1}{2}\left[\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+4\tau_{xy}^2} < zul\sigma \quad (11\text{-}14)$$

يسمى الاجهاد σ_{3v} **بالاجهادالمقارن (الاجهاد المكافيء)** التابع للفرضية الثالثة (فرضية الاجهاد المماسي الاعظمي) وبواسطته يمكن مقارنة حالة الاجهاد العامة مع حالةالاجهاد المحورية .

من اجل الحالة ب $(\sigma_2 < 0 \ , \ \sigma_1 > 0)$:

يصبح الشرط التصميمي من اجل هذه الحالة كالتالي :

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} < zul\ \tau = \frac{zul\ \sigma}{2} \qquad (11\text{-}15)$$

$$\sigma_{3v} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2 < zul\,\sigma} \qquad (11\text{-}16)$$

في كثير من الحالات تنعدم $\sigma_{yy}=0$ (على سبيل المثـال ، القضيب المحمل على الانعطـــاف والفتل دفعة واحدة) مما يسهل الشرط التصميمي ليأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_{3v} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\,\tau_{xy}^2} < zul\,\sigma \qquad (11\text{-}18)$$

١١ ـ فرضية العمل الاعظمي للتشوه (Hencky , Mises , Huber , Scheicher)

ان افضل تطابق يتم بين نتائج التجارب وبين النتائج النظرية المحسوبة هو الذي ينتج عن فرضية العمل الاعظمي للتشوه . فلقد تبين اخيراً بأن الاجهاد المقارن (الاجهاد المكافيء) σ_v للمواد المستعملة في الحياة العملية والمحسوب بفرضية الاجهادات الناظمية الاعظمية وكذلك المحسوب بفرضية التمددات الرئيسية (التغيرات النسبية الطولية الرئيسية) صغير جداً وان الاجهاد المقارن المحسوب بفرضية الاجهادات المماسية الاعظمية كبير جـــداً . أما فرضية العمل الاعظمي للتشوه فتعطي قيماً دقيقة وعلاوة على ذلك فهي تشير الى عدم إمكانية انكسار المادة بواسطة حالة اجهاد من نوع الضغط الهيدروستاتيكي الذي يؤثر من كل الجهات (ضغط ثابت) .

لكل هذه الاسباب فقد احتلت هذه الفرضية (فرضية العمل الاعظمي للتشوه) من وجهة النظر الحديثة لحادثة الانكسار مكاناً مرموقاً .

تعيد هذه الفرضية ، السبب الاول في انكسار المادة الى عمل تشوه معلوم يطبق على الجسم. يمكن اعادة عمل تغير الشكل الذي سيرمز له بالرمز A الى حدين ، الحد الاول ناتج عن تغير حجم العنصر الجحمي والحد الثاني ناتج عن تغير المظهر (تشوهه) . يسمى الحد الاول عمل **تغير الحجم** ويرمز له بالرمز A_v اما الحد الثاني فيسمى **عمل التشوه** ويرمز له بالرمز A_g .

تشير التجارب الى ان الحد الاول (عمل تغير الحجم) لا يؤثر على حد الانكسار وبذلك فان المسؤول الاول عن ذلك هو عمل التشوه A_g وهو الذي سيجعل اساساً للمقارنة بين حالة الاجهاد العامة (الفراغية أو المستوية)وبين حالة الاجهاد المحورية . للحصول على عمل التشوه A_g سوف يطرح عمل تغير الحجم (كالذي تقوم به حالة إجهاد من نوع الضغط الهيدروستاتيكي المنتظم الذي يؤثر على الجسم من جميع الجهات والذي يؤدي الى تغير في الحجم فقط) A_v من عمل تغير الشكل A . يعطى عمل التشوه من اجل حالة الاجهاد الفراغية بالعلاقة التالية :

$$A_g = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yx}^2+\tau_{zx}^2)\right] \quad (11\text{-}19)$$

بالاستعانة بالقيم التالية :

$$\sigma_x = \sigma \; ; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

يتم الحصول من العلاقة السابقة على عمل التشوه العائد لحالة الاجهاد الخطية التالي :

$$A_g = \frac{2\sigma^2}{12G} \quad (11\text{-}20)$$

وبمقارنة هذه العلاقة ، التي تمثل معادلة العمل التابعة لحالة الاجهاد المحورية (لتجربة الشد) مع علاقة العمل من اجل حالة الاجهاد العامة (11.19) يتم الحصول على الاجهاد المقارن الرابع الآتي :

$$\sigma_{v4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_x-\sigma_z)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\right]} \quad (11\text{-}21)$$

بالاستعانة بالمحاور الرئيسية تصبح علاقة الاجهاد المقارن السابقة بالشكل التالي :

$$\sigma_{v4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]} \quad (11\text{-}22)$$

تصلح هاتين العلاقتين من اجل حالة الاجهاد الفراغية العامة . حسب هذه النظرية فان للاجهادات الرئيسية الثلاثة تأثير على حادثة الانكسار . ولقد اظهرت المقارنة بين نتائج التجارب ونتائج هذه النظرية تطابقاً جيداً مما جعلها تحتل مكان الصدارة بين فرضيات الانكسار . أما الشرط التصميمي فيأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_{v4} < \text{zul } \sigma \quad (11\text{-}23)$$

حالة الاجهاد المستوية $(\sigma_3 = 0)$:

من اجل حالة الاجهاد المستوية يتم الحصول من العلاقة (11.22) على علاقة الاجهاد المقارن التالية:

$$\sigma_{v4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} < \text{zul } \sigma \quad (11\text{-}24)$$

تمثل المعادلة التالية :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2$$

في مجموعة المحاور σ_1 , σ_2 قطعاً ناقصاً . يمثل الفراغ الذي يغلقه القطع المذكور ، المجال الذي إذا وقعت فيه الاجهادات لم يحدث الانكسار . يعين القطع الناقص بدقة الحدود التي أوجدتها نظرية الاجهادات المماسية الاعظمية (شكل 10.4). للتمكن من إعطاء علاقة الاجهاد المقارن بدلالة σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} يلجأ لدائرة الاجهاد لتستخلص منها العلاقة التي تربط بين σ_1، σ_2 وبين الاجهادات σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} التالية :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(11\text{-}25)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

بتعويض هذه العلاقة في العلاقة (11.24) ينتج :

$$\sigma_{v4} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2} \quad (11\text{-}26)$$

عندما تكون $\sigma_{yy}=0$ عندئذ تصبح هذه العلاقة بالشكل التالي :

$$\sigma_{v4} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xy}^2} \qquad (11\text{-}27)$$

١١ ـ ٥ تطبيق الفرضيات على أنواع خاصة للتحميل

في حالة تشكل اجهاد ناظمي واجهاد مماسي في آن واحد يصبح بناء معادلات حساب الاجهاد المقارن (الاجهاد المكافىء) اقل تعقيداً منه في حالة الاجهاد العامة . تظهر امثال هـــذه الحالة ، على سبيل المثال ، كما في حالة التحميل بالانعطاف والفتل دفعة واحدة .

بسبب كون :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad , \quad \tau_{xy} \neq 0 \quad , \quad \sigma_{xx} \neq 0$$

تصبح علاقات حساب الاجهادات الرئيسية بالشكل التالي :

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{xx}}{2}\left[1 \pm \sqrt{1+4\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)^2}\right] \quad , \quad \sigma_2 = 0 \qquad (11.28)$$

كما تصبح علاقة الاجهاد المقارن الاول (الناتج عن فرضية الاجهادات الناظمية الاعظميـة) بالشكل التالي :

$$\sigma_{v1} = \frac{\sigma_{xx}}{2}\left[1 + \sqrt{1+4\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)^2}\right] \qquad (11\ 29)$$

اما علاقة الاجهاد المقارن الثاني (الناتج عن فرضية التمددات الرئيسية) فتأخذ من اجل هذه الحالة ، الشكل التالي :

$$\sigma_{v2} = \frac{\sigma_{xx}}{2}\left[1-\mu+(1+\mu)\sqrt{1+4\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)^2}\right. \qquad (10\text{-}30)$$

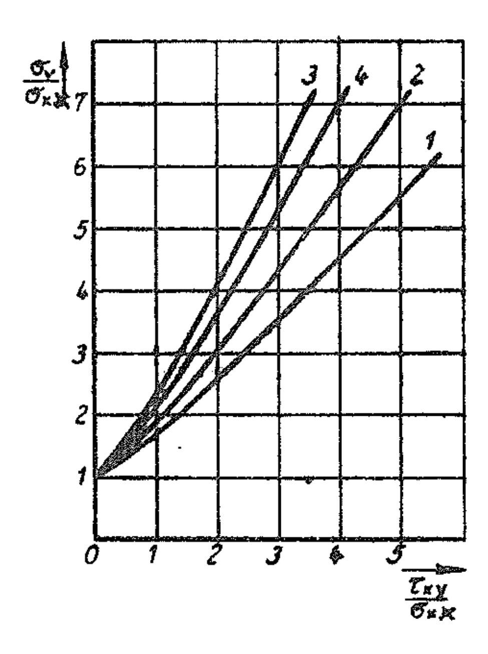
وكذلك تأخذ علاقة الاجهاد المقارن الثالث (الناتج عن فرضية الاجهادات المماسية الاعظمية) الشكل التالي :

$$\sigma_{v3} = \sigma_{xx}\sqrt{1+4\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)^2} \qquad (11\text{-}31)$$

اما علاقـة الاجهاد المقارن الرابـع(الناتـج عن فرضية عمل التشوه الاعظمي) فتأخـــذ الشكل الآتي :

$$\sigma_{v4} = \sigma_{xx} \sqrt{1+3\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)^2} \qquad (11\text{-}32)$$

لقد تم في الشكل (11-5) تمثيل σ_v/σ_{xx} (حاصل قسمة الاجهاد المقارن على الاجهادالناظمي) بالنسبة لـ τ_{xy}/σ_{xx} (حاصل قسمة الاجهاد المماسي على الاجهاد الناظمي) .



شكل 11-5

يلاحظ من المنحنيات بأن فرضية الاجهادات الرئيسية وفرضية التمددات الرئيسية تعطي قيماً صغيرة نسبياً بينما تعطي فرضية الاجهادات المماسية الاعظمية قيماً كبيرة نسبياً (اعلى من قيم بقية الفرضيات) . ان سبب هذه الفروقات ناتج عن إختلاف الفرضيات في تقدير تأثير الاجهادات المماسية .

مثال 142 :

محور اسطواني دائري الشكل محمل على الانعطاف والفتل (شكل 11.6) .

المعطى : قيم القطع في المقطع العرضي المدروس : عزم الانعطاف $M_y\ (x)$ وعزم الفتل$M_x\ (x)$ قطر دائرة المقطع العرضي للمحور D .

المطلوب : حساب اجهادات المقارنة للمقطع العرضي التي تنتج عن فرضية المتانة الثالثة σ_{v3} والرابعة σ_{v4} .

الحل :

تبلغ العزوم المقاومة للانعطاف في الدائرة القيم التالية :

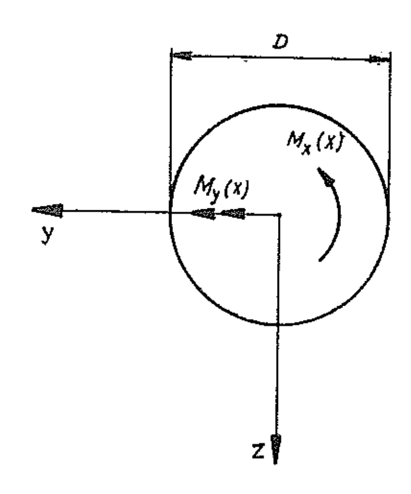
$$w_y = w_z = w = \frac{\pi D^3}{32}$$

كما يبلغ العزم المقاوم للفتل في الدائرة القيمة الآتية :

$$w_t = w_p = 2\,w = \frac{\pi D^3}{16}$$

أما الاجهادات المتشكلة على حدود المقطع العرضي فتبلغ :

$$\sigma_{xx}(x) = \pm \frac{M_y(x)}{w} \quad , \quad \sigma_{zz}(x) = 0 \quad , \quad \tau(x) = \frac{M_x(x)}{2\,w}$$



شكل 11.6

يبلغ الاجهاد المقارن حسب فرضية الاجهاد المماسي الاعظمي القيمة التالية :

$$\sigma_{v3}(x) = \sqrt{\left[\frac{M_y(x)}{w}\right]^2 + 4\left[\frac{M_x(x)}{2\,w}\right]^2} = \frac{M_y(x)}{w}\sqrt{1 + \frac{[M_x(x)]^2}{[M_y(x)]^2}}$$

اما الاجهاد المقارن ، حسب فرضية العمل الاعظمي للتشوه ، فيبلغ :

$$\sigma_{v4}(x) = \sqrt{\left[\frac{M_y(x)}{w}\right]^2 + 3\left[\frac{M_x(x)}{2w}\right]^2} = \frac{M_y(x)}{w}\sqrt{1+0,75\frac{[M_x(x)]^2}{[M_y(x)]^2}}$$

يستخلص من هذا المثال بان فرضية المتانة الثالثة (فرضية الاجهادات المماسية الاعظمية) تعطي قيماً اكبر من القيم التي تنتج عن فرضية المتانة الرابعة (فرضية العمل الاعظمي للتشوه) التي تتطابق مع النتائج الفعلية بشكل جيد .

مثال 143 :

يتألف المقطع العرضي لجائز بارز (جائز موثوق من طرف وحرمن الطرف الآخر) من مستطيل أبعاده h , b . حمل هذا الجائز بقوة وحيدة P (شكل 11.7) .

المعطى :

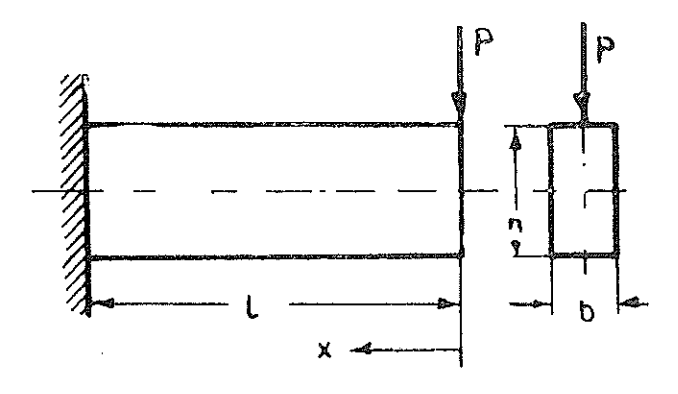
$P = 1000\ kp$, $b = 2\ cm$, $h = 4\ cm$, $l_1 = 12\ cm$

المطلوب :

١ – حساب نسبة الاجهاد المماسي الاعظمي على الاجهاد الناظمي الاعظمي عند نقطة الوثاقةوذلك بالاستعانة بنسبة ارتفاع المقطع العرضي على طول الجائز .

٢ – حساب توزيع الاجهاد المماسي للمقطع العرضي $x = l_1$ ثم رسمه .

٣ – رسم دائرة اجهاد مور من اجل $x = l = 12\ cm$, $z = 0,5\ cm$ ثم حساب الاجهادالمقارن باستخدام نظرية عمل التشوه الاعظمي .



شكل 11.7

الحـــل :

١ – حساب نسبة الاجهاد المماسي الاعظمي على الاجهاد الناظمي الاعظمي :

حساب الاجهاد المماسي الاعظمي :

القوة العرضية :

$$Q_z = P$$

عزم العطالة :

$$I_{yy} = bh^3/12$$

عرض الجائز :

$$b(z) = b$$

العزم الستاتيكي للنصف الاسفل من المستطيل :

$$S_y(z) = \left(b\ \frac{h}{2}\right)\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

بتبديل هذه القيم في علاقة الاجهاد المماسي :

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y}{I_{yy}\, b}$$

ينتج

$$\max \tau_{xz} = \frac{3}{2}\,\frac{P}{bh}$$

حساب الاجهاد الناظمي الاعظمي :

$$\max \sigma = \frac{M_y}{W_{yy}} = \frac{Pl\,6}{bh^2}$$

بتقسيم علاقتي الاجهاد يتم التوصل للمطلوب :

$$\frac{\max\tau}{\max\sigma} = \frac{h}{4l} = 0{,}25\,\frac{h}{l}$$

باجراء حساب عددي لنسب الاجهاد وذلك من اجل بعض قيم h/l ينتج :

h/l	1	1/2	1/3	1/5	1/8	1/10
max τ/max σ	0,25	0,125	0,083	0,05	0,03	0,025

من هذا الجدول يتبين ان تأثير الاجهادات المماسية على الاجهادات في حالة كون $h/l<1/5$ صغير.

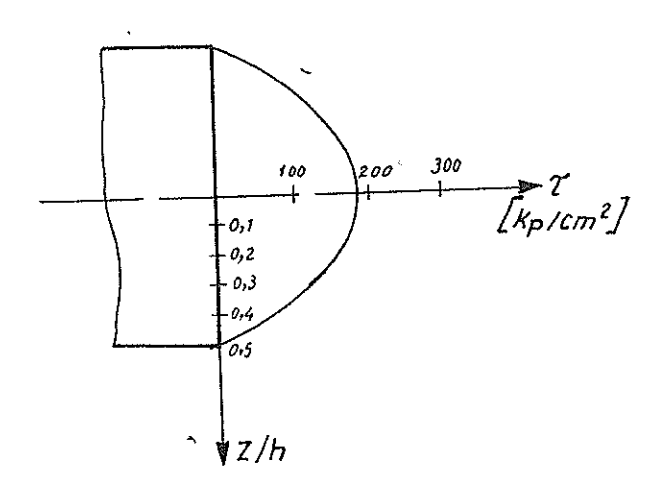
٢ ـ توزيع الاجهاد المماسي في المقطع العرضي $x=l_1$:

لقد تم في المثال 131 ايجاد توزيع الاجهاد المماسي للمستطيل وهو التالي :

$$\tau_{xz}(x) = \frac{6\,Q}{b\,h}\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) = 750\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) \qquad kp/cm^2$$

بواسطة هذه المعادلة يستطاع حساب الاجهادات المماسية في نقاط معينة من المقطع العرضي :

z/h	τ
—	kp/cm^2
0	187
0,1	180
0,2	158
0,3	120
0,4	68
0,5	0



شكل 11.8

لقد تم بواسطة القيم الموجودة في الجدول رسم توزيـع الاجهاد المماسي الممثل في الشكل (11.8) بالمقياس . يصلح توزيع الاجهاد المماسي المذكور من اجل كافة المقاطع العرضية التي تمدx باستثناء المقاطع العرضية الواقعة على مقربة من الوثاقة ومن نقطة تطبيق القوة الوحيدة .

٣ - رسم دائرة اجهاد مور

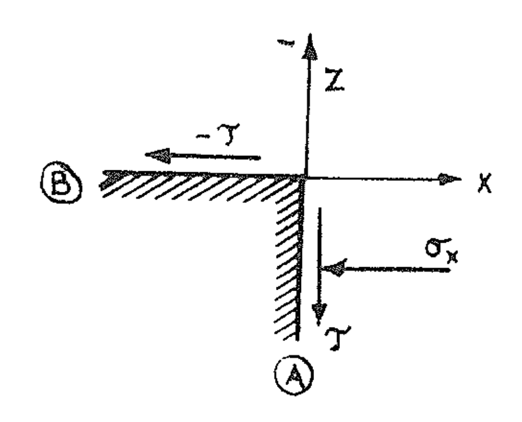
يبلغ الاجهاد الناظمي في المكان $x=12$ cm , $z=0{,}5$ cm القيمة التالية :

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_{yy}}\,z = \frac{-Plz\;12}{bh^3} = \frac{-1000\;.\;12\;.\;0{,}5\;.\;12}{2\;.\;4^3} = -\,563 kp/km^2$$

كما يبلغ الاجهاد المماسي هناك ، حسب العلاقة المشتقة في الطلب السابق ، القيمة التالية :

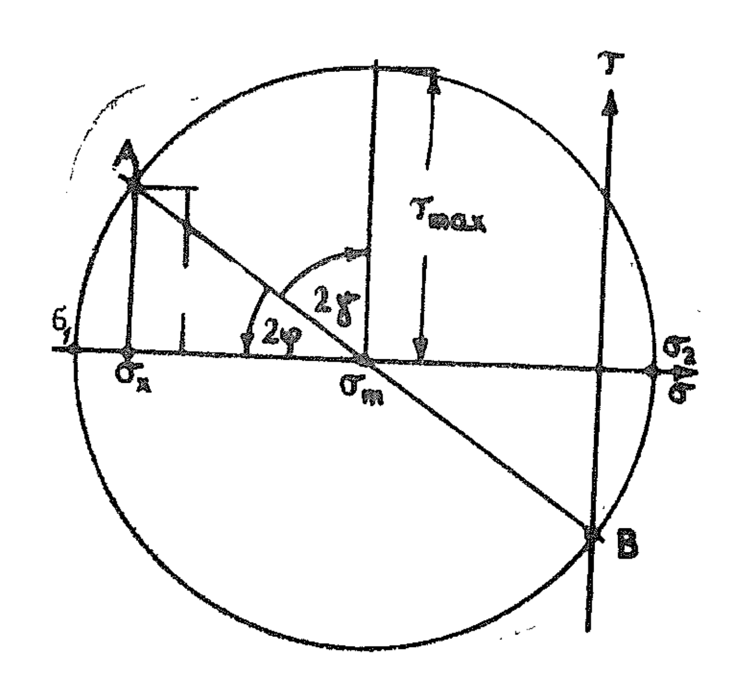
$$\tau_{xz}\,(=\tau) = 750\left(\frac{1}{4} - \frac{1^2}{4\,.\,4^2}\right) = 176\ kp/cm^2$$

لقد تم في الشكل (11.9) تمثيل اتجاه الاجهادات وضفة القطع التي تؤثر عليها تلك الاجهادات. يستطاع الآن ، بعد اختيار مجموعة الاحداثيات x , z ، تثبيت النقاط العائـــدة لضفتي القطع



شكل 11 9

A , B في مجموعة الاحداثيات σ , τ (وذلك بعد اعتبار مقياس رسم الاجهادات) ثم تعيين مركز دائرة اجهاد مور وأخيراً رسم دائرة اجهاد مور (شكل 11.10) .



شكل 11.10

من دائرة اجهاد مور يستطاع الآن قراءة الاجهادات الرئيسية :

$\sigma_1 = -605 \text{ kp/cm}^2 \quad ; \; \sigma_2 = 60 \text{ kp/cm}^2$

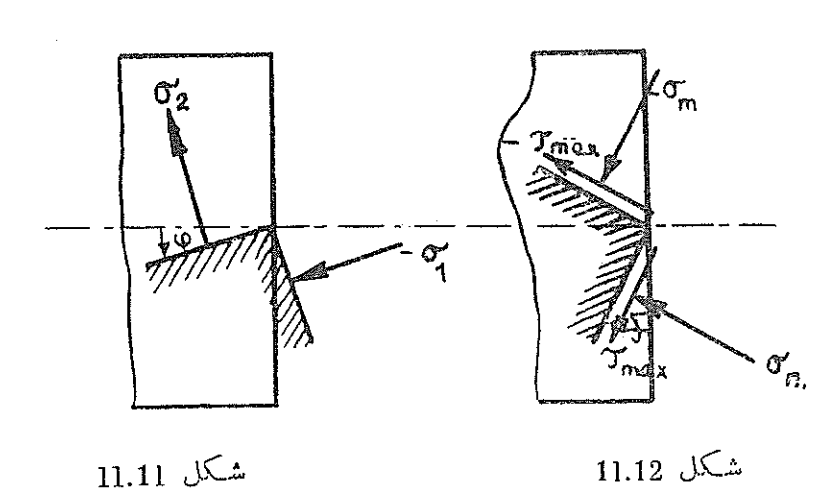
والاجهاد الماسي الاعظمي :

$$\max \tau = 330 \ kp/cm^2$$

وكذلك مواضع ضفاف القطع التي تتشكل فيها الاجهادات الرئيسية ومواضع ضـفاف القطع التي تتشكل عليها الاجهادات الماسية الاعظمية (شكل 11.11 و شكل 11.12) .

لحساب الاجهاد الماسي بواسطة فرضية العمـل الاعظمي للتشـــوه تستعمل العلاقة (11.32) (حيث أن $\sigma_{yy}=0$) :

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xz}^2} = \sqrt{563^2+3.176^2} = 640 \ kp/cm^2$$



شكل 11.11 شكل 11.12

مثـال 114 :

يتألف المقطع العرضي للجائز البارز (ظفر) القصير من مستطيل ابعاده b , h (شكل 11.13).

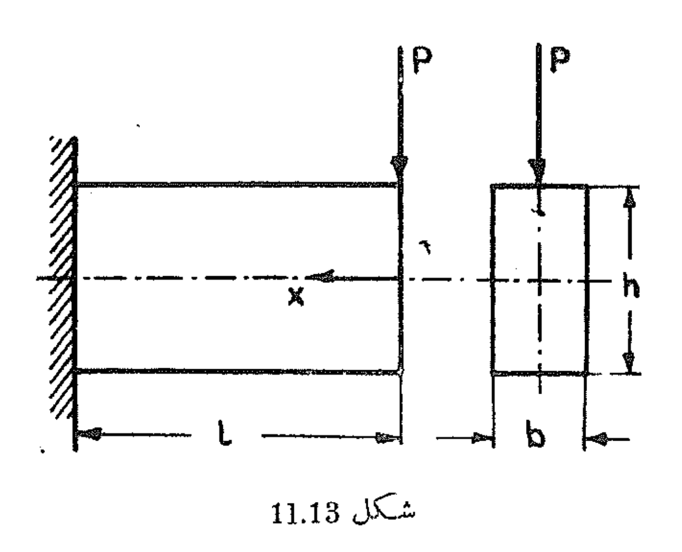
المعطى : $b=2$ cm , $h = 4$ cm , $l = 30$ cm .

المطلوب :

١ ـ حساب الاحداثي z الذي تتشكل عنده اكبر قيمة للاجهاد القارن وذلك باستخدام نظرية عمل التشوه (Gestaltaenderungsarbeit) .

٢ ـ الحمولة المسموحة الاعظمية zul P .

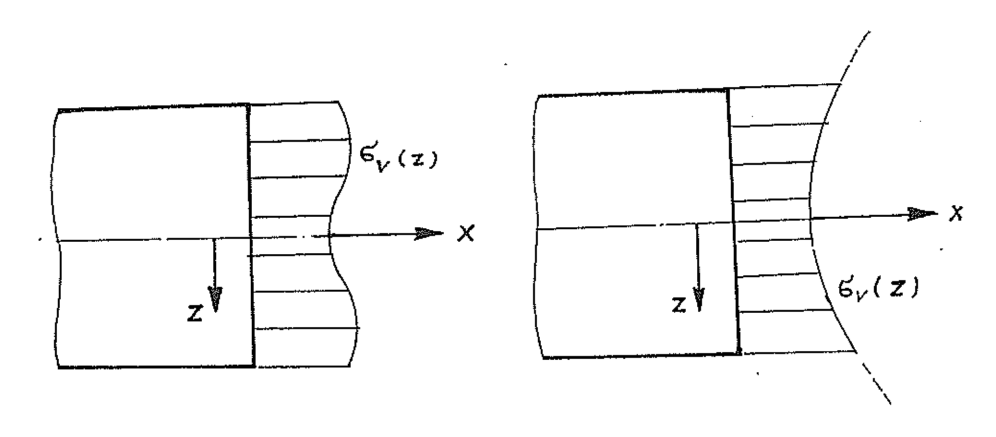
وذلك من اجل القطع العرضي الكائن عند نقطة الوثاقة .



شكل 11.13

الحـل :

تتشكل في المقطع العرضي الـكائن عند الوثاقة اجهادات ناظمية σ_{xx} ناتجـة عن عزم الانعطاف (اجهادات الانعطاف) واجهادات مماسية τ_{xz} ناتجة عن القوة العرضية اما في المقاطع الطولية فلا تتشكل الا اجهادات مماسية τ_{zx} (ازدواج الاجهادات المماسية) .



شكل 11.14

لحساب الاجهاد المقارن (الاجهاد المـكافىء) ، حسب نظرية العمل الاعظمي للتشوه ، تطبـق العلاقة التالية :

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xyx}^2 + 3\,\tau_{xz}^2}$$

يبلغ الاجهاد الناظمي القيمة التالية :

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_{yy}} z = c_1 z$$

حيث أن c_1 هي قيمة ثابتة ؛ أما الاجهاد الماسي فيبلغ :

$$\tau_{xz}(z) = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \cdot \frac{S_y(z)}{b(z)} = \frac{6Q}{b\,h}\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) = c_2\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right)$$

بالتبديل في العلاقة الاولى يتم تعيين الاجهاد المقارن :

$$\sigma_v = \sqrt{c_1^2 z^2 + 3 c_2^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right)^2}$$

لقد اعطي الاجهاد المقارن في العلاقة السابقة كتابع للمتغير z . للحصول على القيمة العظمى للاجهاد المقارن ينبغي اشتقاق المعادلة السابقة وجعل المشتق يساوي الصفر :

$$\frac{d\sigma_v}{dz} = \frac{1}{2\sigma_v}\left[c_1^2\, 2z + 23\, c_2^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right)\left(-\frac{2z}{h^2}\right)\right] = 0$$

ان احدى حلول هذه المعادلة هو :

$$z = 0$$

بعد الفحص يتبين ان هذا المكان هو مكان القيمة الصغرى للاجهاد المقارن . اما بقية الحلول فيتم التوصل اليها من العلاقة :

$$2c_1^2 - \frac{12c_2^2}{h^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) = 0$$

$$z = \pm h\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{c_1^2}{c_2^2}\frac{h^2}{6}}$$

من هذه المعادلة يمكن التوصل لنتيجة هامة هي التالية :

من اجل $c_1^2 h^2/6\, c_2^2 < 1/4$ فقط فان z تأخذ قيمة حقيقية (reelle Werte) . اما في الحالات الاخرى فيتشكل الاجهاد المقارن على حواف المقطع العرضي (شكل 11.14) دون ان يشير الى قيمة اعظمية بمفهومها الرياضي . يتبين كما يشير الحساب الى ان القيمة الاعظمية الظاهرة تتشكل فقط عندما يكون $h > l\sqrt{8/3}$. في الحالة المدروسة هنا فان الاجهاد المقارن الاعظمي يتشكل على حواف الجائز . وهي تساوي اذاً قيمة اجهاد الانعطاف في ذلك المكان :

$\sigma_v = \max \sigma_B$

بذلك يصبح شرط تصميم الجائز كالتالي :

$$\frac{|\max M|}{W} = \frac{Pl6}{bh^2} \leqq zul\ \sigma$$

وبذلك فان الحمولة الاعظمية هي :

$$zul\ P = \frac{zul\ \sigma\ bh^2}{6\ l} = \frac{1400 . 2.16}{6 . 30} = 250\ kp$$

مثـال 145 :

جائز بارز فراغي مقطعه العرضي دائري الشكل (شكل 11-15) .

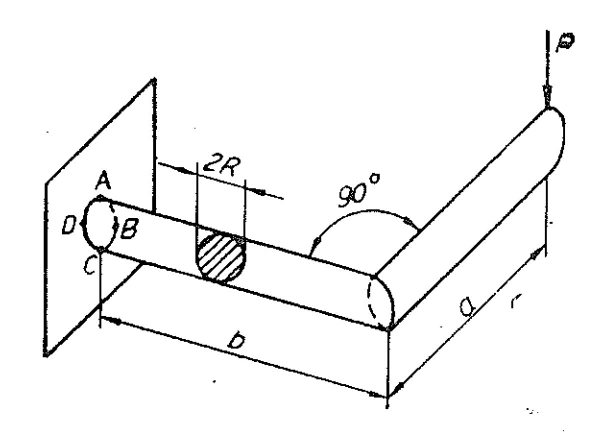
المعطى :

١ ـ قضيب نحيف (schlanker Balken) :

$$\frac{b}{R} = 40 \quad , \quad \frac{a}{b} = 20$$

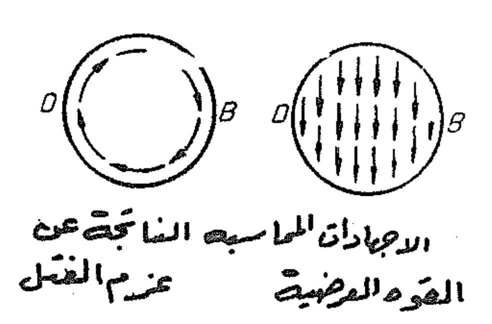
٢ ـ قضيب غليظ (dicker Balken) :

$$\frac{b}{R} = 4 \quad , \quad \frac{a}{R} = 2$$



شكل 11.15

المطلوب : حساب اجهادات المقارنة (الاجهادات المـكافئة) σ_{v3} ، σ_{v4} في مكان الوثاقة (في النقاط A , B , C , D) .



شكل 11.16

الحـل :

حساب قيم القطع في مكان الوثاقة :

عزم الفتل :

$$M_T = P\,a$$

عزم الانعطاف :

$$M_B = P\,b$$

القوة العرضية :

$$Q = P$$

الاجهادات الناظمية :

من عزم الانعطاف يتشكل توزيـع الاجهاد الناظمي التالي :

$$\sigma_x = \frac{M_B}{I_{yy}}\,z$$

حيث ان

$$I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4}$$

وبذلك تبلغ اجهادات الانعطاف في نقاط الوثاقة القيم التالية :

$$\sigma_x(A) = \sigma_x(z = R) = \frac{P\,b}{\frac{\pi R^3}{4}} = \frac{P}{F}\,\frac{4b}{R}$$

$$\sigma_x(B) = \sigma_x(z = 0) = 0$$

$$\sigma_x(C) = \sigma_x(z = -R) = -\frac{Pb}{\frac{\pi R^3}{4}} = -\frac{P}{F}\,\frac{4b}{R}$$

$$\sigma_x(D) = \sigma_x(z = 0) = 0$$

الاجهادات المماسية :

الاجهادات المماسية الناتجة عن عزم الفتل :

يتم حساب الاجهادات المماسية الناتجة عن الفتل بواسطة العلاقة (7·11) ، من اجل الحافة فان تلك الاجهادات تحسب كما يلي :

$$\max \tau_T = \frac{M_T}{I_p}\,R$$

وبسبب كون

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

فان العلاقة الاخيرة تأخذ الشكل التالي :

$$\max \tau_T = \frac{Pa}{\pi R^3/2} = \frac{P}{F}\,\frac{2a}{R}$$

الاجهادات المماسية الناتجة عن القوة العرضية :

يتم حساب الاجهادات المماسية الناتجة عن القوة العرضية بواسطة العلاقة التالية :

$$\tau_Q = \frac{Q\,.\,S_y(z)}{I_{yy}\,.\,b(z)}$$

من اجل النقاط C , A فان:

$$\tau_Q(z = \pm R) = 0$$

أما من اجل النقاط B , D فان الاجهادات الماسية تبلغ :

$$\tau_Q \ (z = 0) = \frac{P}{R^3} \ \frac{4}{3\pi} = \frac{4P}{3F}$$

حيث أن

$$S_y \ (z = 0) = \frac{R^2 \ \pi}{2} \ \frac{4 \ R}{3 \ \pi} = \frac{2}{3} \ R^3$$

$$I_{yy} = \frac{R^4 \ \pi}{4}$$

$$b \ (z = 0) = 2 \ R$$

بسبب وقوع الاجهادات الماسية الناتجة عن عزم الفتل في نفس المستوي الذي تقع فيهالاجهادات الماسية الناتجة عن القوه العرضية ، لذلك ينبغي تضامها مع بعض . اثنـاء التضام يجب الانتباه الى اتجاه الاجهادات . كما يشير الشكل (11.16) ينبغي جمع الاجهادات عنـد النقطة B امـا عند النقطة D فينبغي طرحها ، واخيراً فان محصلة الاجهادات الماسية (الاجهادات الماسيةالمحصلة) هي التـالية :

$$\tau \ (B) = \tau_Q + \tau_T = \frac{P}{F} \left(\frac{4}{3} + \frac{2a}{R} \right)$$

$$\tau \ (D) = \tau_Q - \tau_T = \frac{P}{F} \left(\frac{4}{3} - \frac{2a}{R} \right)$$

$$\tau \ (\text{١}) = \tau \ (C) = \tau_T = \frac{P}{F} \ \frac{2a}{R}$$

إجهادات المقارنة (الاجهادات المكافئة) :

$$\sigma_{v3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad ; \quad \sigma_{v4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

بتبديل المعطيات في هاتين العلاقتين يتم الحصـــول على اجهادات المقـارنة ممثلة بـالجدول العددي التـالي :

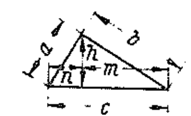
النقطة	القضيب النحيف				القضيب الغليظ			
	$\sigma_B / \frac{P}{F}$	$\tau / \frac{P}{F}$	$\sigma_{v3} / \frac{P}{F}$	$\sigma_{v4} / \frac{P}{F}$	$\sigma_B / \frac{P}{F}$	$\tau / \frac{P}{F}$	$\sigma_{v3} / \frac{P}{F}$	$\sigma_{v4} / \frac{P}{F}$
A	160,00	40,00	179,0	174,0	16,00	4,00	17,9	17,4
B	0	41,33	82,7	71,6	0	5,33	10,7	9,22
C	−160,00	40,00	179,0	174,0	−16,00	4,00	17,9	17,4
D	0	38.67	77,3	66,9	0	2,67	5,3	4,62

توضح المقارنة بين اجهادات المقارنة في النقاط D , B للقضيب النحيف والقضيب الغليظ تأثير قص القوة العرضية (1,33/40 أو بالاحرى 1,33/4) .

الملحق

جدول 1 : مراكز ثقل السطوح

Rechteck	Dreieck	quadratische Parabel	kubische Parabel	biquadratische Parabel
$y = h$	$y = \frac{h}{g} x$	$y = \frac{h}{g^2} x^2$	$y = \frac{h}{g^3} x^3$	$y = \frac{h}{g^4} x^4$
$F = 1 \cdot g\,h$	$F = \frac{1}{2} \cdot g\,h$	$F = \frac{1}{3} \cdot g\,h$	$F = \frac{1}{4} \cdot g\,h$	$F = \frac{1}{5} \cdot g\,h$
$s_r = \frac{1}{2} \cdot g$	$s_r = \frac{1}{3} \cdot g$	$s_r = \frac{1}{4} \cdot g$	$s_r = \frac{1}{5} \cdot g$	$s_r = \frac{1}{6} \cdot g$
$s_l = \frac{1}{2} \cdot g$	$s_l = \frac{2}{3} \cdot g$	$s_l = \frac{3}{4} \cdot g$	$s_l = \frac{4}{5} \cdot g$	$s_l = \frac{5}{6} \cdot g$
$s_u = \frac{1}{2} \cdot h$	$s_u = \frac{2}{6} \cdot h$	$s_u = \frac{3}{10} \cdot h$	$s_u = \frac{4}{14} \cdot h$	$s_u = \frac{5}{18} \cdot h$

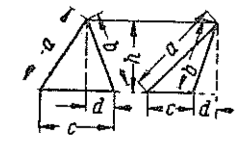


Recht-winkliges Dreieck

$$F = \frac{c\,h}{2} = \frac{a\,b}{2}$$

$a^2 + b^2 = c^2$ (Satz von Pythagoras)

$h^2 = m\,n,\ a^2 = n\,c,\ b^2 = m\,c$



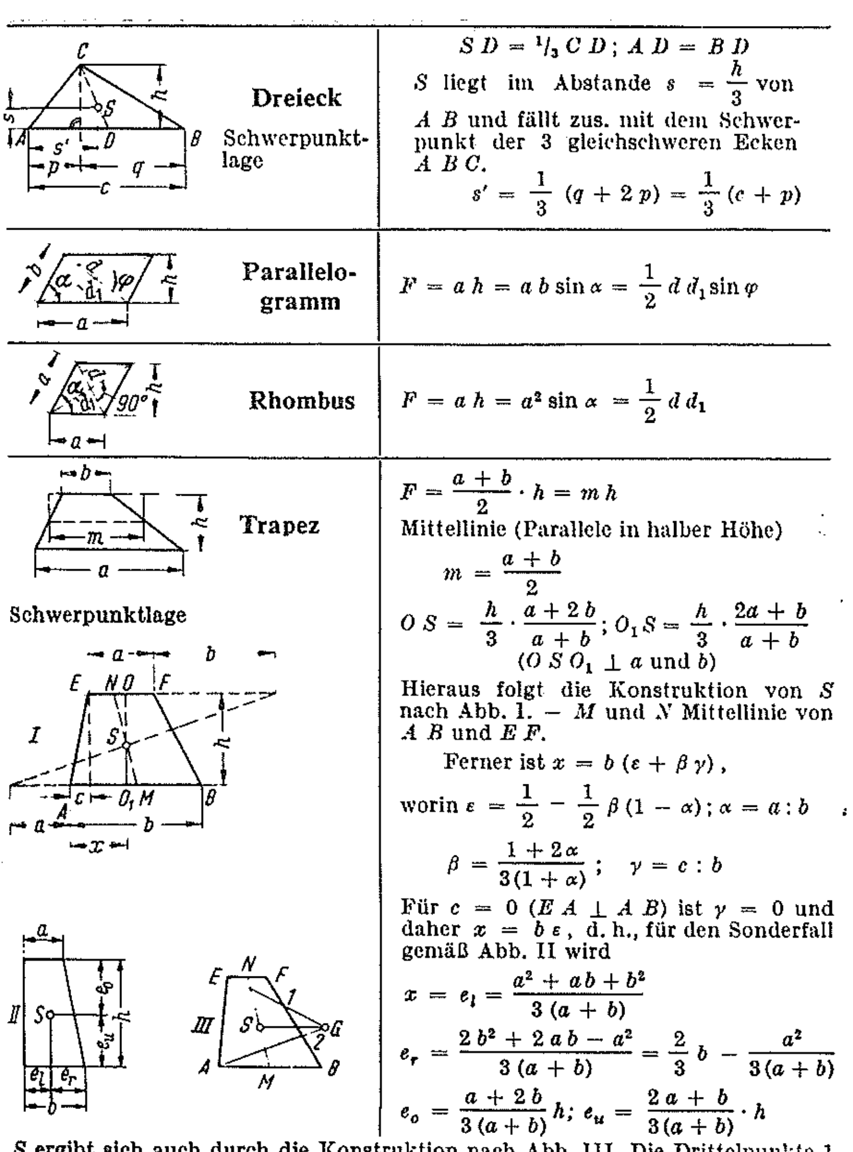
Spitzwinkl., stumpfwinkl. Dreieck

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,d$
für spitzwinkliges Dreieck

$a^2 = b^3 + c^2 + 2\,c\,d$
für stumpfwinkliges Dreieck

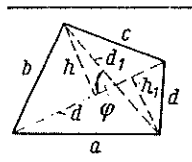
$$F = \frac{c\,h}{2} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = \varrho\,s = \frac{a\,b\,c}{4\,r}$$

worin $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$; ϱ und r die Halbmesser des ein- bzw. umliegenden Kreises



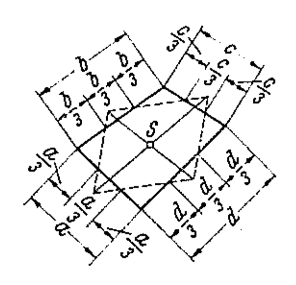
	Dreieck Schwerpunktlage	$SD = \frac{1}{3}CD;\ AD = BD$ S liegt im Abstande $s = \frac{h}{3}$ von AB und fällt zus. mit dem Schwerpunkt der 3 gleichschweren Ecken ABC. $s' = \frac{1}{3}(q + 2p) = \frac{1}{3}(c + p)$
	Parallelogramm	$F = a\,h = a\,b\sin\alpha = \frac{1}{2}\,d\,d_1\sin\varphi$
	Rhombus	$F = a\,h = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}\,d\,d_1$
	Trapez	$F = \frac{a+b}{2}\cdot h = m\,h$ Mittellinie (Parallele in halber Höhe) $m = \frac{a+b}{2}$
Schwerpunktlage		$OS = \frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b};\ O_1S = \frac{h}{3}\cdot\frac{2a+b}{a+b}$ $(O\,S\,O_1 \perp a \text{ und } b)$ Hieraus folgt die Konstruktion von S nach Abb. I. — M und N Mittellinie von AB und EF. Ferner ist $x = b(\varepsilon + \beta\gamma)$, worin $\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta(1-\alpha);\ \alpha = a:b$ $\beta = \frac{1+2\alpha}{3(1+\alpha)};\quad \gamma = c:b$ Für $c = 0$ $(EA \perp AB)$ ist $\gamma = 0$ und daher $x = b\,\varepsilon$, d. h., für den Sonderfall gemäß Abb. II wird $x = e_l = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a+b)}$ $e_r = \frac{2b^2 + 2ab - a^2}{3(a+b)} = \frac{2}{3}b - \frac{a^2}{3(a+b)}$ $e_o = \frac{a+2b}{3(a+b)}h;\ e_u = \frac{2a+b}{3(a+b)}\cdot h$

S ergibt sich auch durch die Konstruktion nach Abb. III. Die Drittelpunkte 1 und 2 der Strecke $\overline{FB}$ werden ermittelt. Die Geraden $E\,1$ und $A\,2$, die sich in G schneiden, ergeben die Schwerlinie $SG \parallel BA$. Der Schnittpunkt dieser Schwerlinie mit der Mittellinie MN ist der gesuchte Schwerpunkt S.



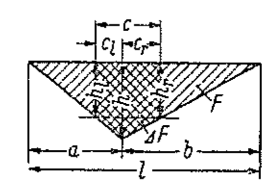
Viereck

$$F = \frac{d}{2}(h + h_1) = \frac{d\,d_1}{2}\sin\varphi$$



„Nach Wittenbauer sind die Drittelpunkte der Viereckseiten, die durch die Eckpunkte des gegebenen Vierecks getrennt sind, durch Geraden miteinander zu verbinden. In dem sich ergebenden neuen Viereck sind die Diagonalen zu ziehen, in deren Schnittpunkt der Schwerpunkt S des gegebenen Vierecks liegt."[1])

Einflußflächen

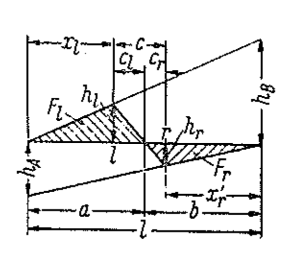


$$F = \frac{1}{2}\,l\,h$$

Für $h_l = h_r$ kann ΔF ohne Zwischenrechnung unmittelbar angeschrieben werden zu

$$\Delta F = \frac{h\,c}{2}\cdot\frac{2\,l - c}{l} \text{ sowie}$$

$$h_l = h_r = h\left(1 - \frac{c}{l}\right) \text{ und}$$



$$c_l = a\,\frac{c}{l}\,;\; c_r = b\,\frac{c}{l}$$

$$h_l = x_l\cdot\frac{h_B}{l}\,;\; h_r = x_r'\cdot\frac{h_A}{l}$$

$$c_l = c\cdot\frac{h_l}{h_l + h_r}\,;\; c_r = c\cdot\frac{h_r}{h_l + h_r}$$

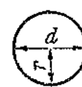
$$a = x_l + c_l\,;\;\; b = x_r' + c_r$$

$$F_l = \frac{1}{2}\,a\,h_l\,;\quad F_r = \frac{1}{2}\,b\,h_r$$

Regelmäßige Vielecke

s = Seite des Vielecks, R = Halbmesser des umliegenden Kreises, r = Halbmesser des einliegenden Kreises, n = Anzahl der Seiten, F = Flächeninhalt.

n	$\frac{R}{s}$	$\frac{r}{s}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{s}{R}$	$\frac{s}{r}$	$\frac{F}{s^2}$	$\frac{F}{R^2}$	$\frac{F}{r^2}$
3	0,577	0,289	2,000	1,732	3,464	0,433	1,299	5,196
4	0,707	0,500	1,414	1,414	2,000	1,000	2,000	4,000
5	0,851	0,688	1,236	1,176	1,453	1,721	2,378	3,633
6	1,000	0,866	1,155	1,000	1,155	2,598	2,598	3,464
7	1,152	1,038	1,110	0,868	0,963	3,634	2,736	3,371
8	1,307	1,207	1,082	0,765	0,828	4,828	2,828	3,314
9	1,462	1,374	1,064	0,684	0,728	6,182	2,892	3,276
10	1,618	1,539	1,052	0,618	0,650	7,694	2,939	3,249
12	1,932	1,866	1,035	0,518	0,536	11.196	3,000	3,215



Kreis

Tafel S. 67 u. 68

$$F = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}7854\, d^2$$

Länge der Kreislinie oder Umfang der Kreisfläche $= 2\pi r = \pi d$

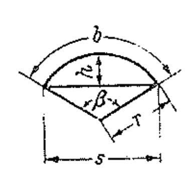


Kreisring

$$F = \pi (R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$
$$= \pi\, d_m\, b$$

worin: D = äußerer Durchmesser
d = innerer Durchmesser

$$d_m = \frac{D + d}{2}$$



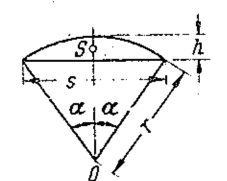
Kreis-abschnitt

Tafel für h, b, s und F (s. S. 39 u. 40)

$$F = \frac{b\,r}{2} - \frac{s\,(r-h)}{2}$$
$$= \left(\frac{\pi\beta}{180} - \sin\beta\right)\frac{r^2}{2}$$
$$r = \frac{s^2 + 4\,h^2}{8\,h}$$
$$s = 2\sqrt{h\,(2\,r - h)} = 2\,r\,\sin\frac{\beta}{2}$$
$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = r\left(1 - \cos\frac{\beta}{2}\right)$$
$$b = \pi\, r \cdot \frac{\beta}{180}\ (\beta \text{ in Grad})$$

Bei flachem Kreisabschnitt, also kleinem Zentriwinkel β, ist

$$F \approx \frac{2}{3}\cdot s\,h\,;\; b \approx s\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{s}\right)^2\right]$$



Schwer-punktlage:

$$O\,S = \frac{s^3}{12\,F} = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin^3\alpha}{\frac{\alpha^0\cdot\pi}{180} - \sin\alpha\cos\alpha}$$



Kreisausschnitt

Bogen $b = \frac{\pi r \beta}{180}$ (β in Grad)

(s. S. 39 u. 40)

$$F = \frac{b r}{2} = \frac{\pi r^2 \beta}{360} = 0{,}00873\, r^2 \beta$$

$$\beta = \frac{180\, b}{\pi r} = 57{,}295\, \frac{b}{r}$$

Schwerpunktlage

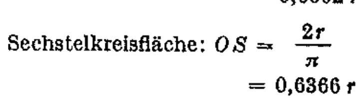
$$OS = \frac{2}{3}\, r\, \frac{\sin\alpha}{\alpha^0}\, \frac{180}{\pi} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r s}{b}$$

$$= \frac{r^2 s}{3\,F}$$

Halbkreisfläche $OS = \frac{4 r}{3 \pi} = 0{,}4244\, r$

Viertelkreisfläche: $OS = \frac{4 \sqrt{2}}{3 \pi}\, r = 0{,}6002\, r$

Halbkreisfläche



Sechstelkreisfläche: $OS = \frac{2 r}{\pi} = 0{,}6366\, r$

Parabelabschnitt (quadrat. Parabel)

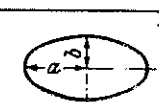
$F = \frac{2}{3}\, s h$; Für $\frac{h}{s} < \frac{1}{4}$ ist die

Bogenlänge $b \approx s \left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{s}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{h}{s}\right)^4\right]$

Schwerpunktlagen:

$$x_1 = \frac{3}{8}\, a \qquad y_1 = \frac{2}{5}\, f$$

$$x_2 = \frac{3}{4}\, a \qquad y_2 = \frac{7}{10}\, f$$



Ellipse

$F = \pi a b$

Für $a \geqq b$ ist der Umfang der Ellipse

$$U = \pi\,(a + b)\,\mu \text{ worin mit } \lambda = (a - b) / (a + b)$$

$$\mu = 1 + \frac{1}{4}\,\lambda^2 + \frac{1}{64}\,\lambda^4 + \frac{1}{256}\,\lambda^6 + \frac{25}{16384}\,\lambda^8 + \dots$$

$\lambda = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\mu = 1$	1,0025	1,0100	1,0226	1,0401	1,0635	1,0922	1,1269	1,1679	1,2162	1,2732

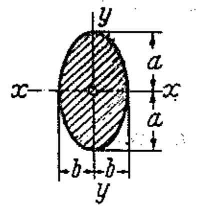
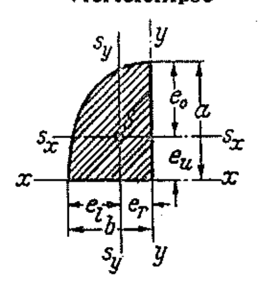
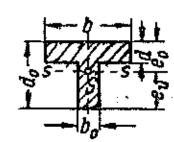
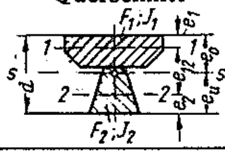
جدول 2 : الاحرف الأبجدية اليونانية

Α α Alpha	Η η Eta	Ν ν Ny	Τ τ Tau
Β β Beta	Θ ϑ Theta	Ξ ξ Xi	Φ φ Phi
Γ γ Gamma	Ι ι Iota	Ο ο Omikron	Χ χ Chi
Δ δ Delta	Κ ϰ Kappa	Π π Pi	Υ υ Ypsilon
Ε ε Epsilon	Λ λ Lambda	Ρ ρ Rho	Ψ ψ Psi
Ζ ζ Zeta	Μ μ My	Σ σ Sigma	Ω ω Omega

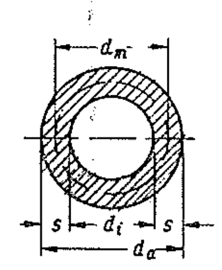
جدول 3 : عزوم الدرجة الثانية والعزم المقاوم للسطوح

Gegenstand	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
$F = b\,h$; $F = b\,(H - h)$	$I_s = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{F\cdot h^2}{12}$ $I_b = \frac{b\,h^3}{3} = \frac{F\cdot h^2}{3}$ bzw. $I_x = \frac{b}{12}(H^3 - h^3)$	$W = \frac{b\,h^2}{6} = 0{,}1667\,b\,h^2$ bzw. $W = \frac{b}{6}\,\frac{H^3 - h^3}{H}$
$F = h^2$; $F = H^2 - h^2$	$I = \frac{h^4}{12} = \frac{F h^2}{12}$ bzw. $I = \frac{H^4 - h^4}{12}$ $= \frac{F}{12}(H^2 + h^2)$	$W = \frac{h^3}{6} = 0{,}1667\,h^3$ bzw. $W = \frac{1}{6}\,\frac{H^4 - h^4}{H}$
	$I = \frac{h^4}{12} = \frac{F\,h^2}{12}$ bzw. $I = \frac{H^4 - h^4}{12}$ $= \frac{F}{12}(H^2 + h^2)$	$W = \frac{\sqrt{2}}{12}\,h^3 = 0{,}1179 h^3$ bzw. $W = \frac{\sqrt{2}}{12}\,\frac{H^4 - h^4}{H}$ $= 0{,}1179\,\frac{H^4 - h^4}{H}$
$F = B\,H - b\,h$	$I = \frac{B\,H^3 - b\,h^3}{12}$ $W = \frac{B\,H^3 - b\,h^3}{6\,H}$	
Gleichschenkliges Dreieck $e_o = 2/3\,h$; $e_u = 1/3\,h$ $F = \frac{b\,h}{2}$	$I_x = \frac{b\,h^3}{36} = \frac{F\,h^2}{18}$ $I_y = \frac{h\,b^3}{48} = \frac{F\,b^2}{24}$ $I_u = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{F\,h^2}{6}$ $I_o = \frac{b\,h^3}{4} = \frac{F\,h^2}{2}$	$W_{xo} = \frac{b\,h^2}{24}$; $W_{xu} = \frac{b\,h^2}{12}$
Beliebiges Dreieck[1]) $F = \frac{b\,h}{2}$ $\quad \vartheta = \frac{h}{b}\cdot\cot\alpha$	$u_s = \frac{b}{6}(3 - 2\,\vartheta)$; $v_s = \frac{h}{3}$ $I_x = \frac{F\,h^2}{18}$; $I_y = \frac{F\,b^2}{72}(3 + 4\,\vartheta^2)$ $I_{xy} = -\frac{F^2}{9}\cdot\vartheta$ $I_u = \frac{F\,h^2}{6}$; $I_v = \frac{F\,b^2}{24}[3 + 4(1 - \vartheta)^2]$ $I_{uv} = \frac{F^2}{2}(1 - \vartheta)$	
Rechtwinkliges Dreieck[1]) $F = \frac{b\,h}{2}$ $\vartheta = +\frac{1}{2}$	$I_x = \frac{F\,h^2}{18}$; $I_y = \frac{F\,b^2}{18}$ $I_{xy} = -\frac{F^2}{18}$ $I_u = \frac{F\,h^2}{6}$; $I_v = \frac{F\,b^2}{6}$ $I_{uv} = +\frac{F^2}{6}$	

Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
$F = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,R^2 = 2{,}60\,R^2$	$I = \frac{5\sqrt{3}}{16}R^4 = \frac{F R^2}{4{,}8}$ $= 0{,}5413\,R^4$ $= 0{,}060\,14\,d^4$	$W_1 = 0{,}5413\,R^3$ $= 0{,}10414\,d^3$ In bezug auf eine Diagonale ist $W_2 = 0{,}6250\,R^3$ $= 0{,}12028\,d^3$
$R = 1{,}307\,a$ $F = \sqrt{8}\cdot R^2 = 4{,}83\,a^2$	$I = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6}R^4$ $= 0{,}6381\,R^4$ $= 0{,}05474\,d^4$ $= \frac{F R^2}{4{,}43} = \frac{F a^2}{2{,}60}$	$W_1 = 0{,}6906\,R^3$ $= 0{,}10948\,d^3$ In bezug auf eine Diagonale ist $W_2 = 0{,}6381\,R^3$ $= 0{,}10115\,d^3$
Regelmäßiges Vieleck F ist der Flächeninhalt, a die Seite, R der Halbmesser des umliegenden, r der des umliegenden Kreises. Beliebige Achse durch den Mittelpunkt. Fläche s. Tafel S. 49	$I = \frac{F}{24}(5R^2 - a^2)$ $= \frac{F}{48}(12r^2 + a^2)$ $I \approx \frac{F R^2}{4}$	$W \approx \frac{F R}{4}$
$F = \frac{a+b}{2}\cdot h$	$I_s = \frac{h^3}{36}\cdot\frac{a^2 + 4ab + b^2}{a+b}$ $e_0 = \frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}$ $e_u = h - e_0$	$W_o = \frac{I}{e_0}$ $(<W_u)$ $W_u = \frac{I}{e_u}$
$F = \frac{\pi d^2}{4}$	$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{F d^2}{16}$ $= 0{,}04909\,d^4 \approx 0{,}05\,d^4$ (Tafel S. 67)	$W = \frac{\pi d^3}{32} = 0{,}09817\,d^3$ $\approx 0{,}1\,d^3$ (Tafel S. 67)

Ellipse 	$F = \pi a b$ Umfang s. S. 50 $I_x = \frac{\pi}{4}\cdot b a^3 = \frac{F a^2}{4}$; $W_x = \frac{\pi}{4}\cdot b\, a^2 = \frac{F a}{4}$ $I_y = \frac{\pi}{4}\cdot a b^3 = \frac{F b^2}{4}$; $W_y = \frac{\pi}{4}\cdot a b^2 = \frac{F b}{4}$
Viertelellipse 	$F = \frac{\pi}{4}\cdot a b$ $e_u = \frac{4}{3\pi}\cdot a = 0{,}424\, a$; $e_0 = \frac{3\pi - 4}{3\pi}\cdot a = 0{,}576a$ $e_l = \frac{3\pi - 4}{3\pi}\cdot b = 0{,}576\, b$; $e_r = \frac{4}{3\pi}\ b = 0{,}424b$ $I_{sx} = b a^3\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) = 0{,}0549\, b a^3 = \frac{F a^2}{14{,}31}$ $I_{sy} = a b^3\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) = 0{,}0549\, a b^3 = \frac{F b^2}{14{,}31}$ $I_x = \frac{\pi}{16}\cdot b a^3 = \frac{F a^2}{4}$; $I_y = \frac{\pi}{16}\cdot a b^3 = \frac{F b_2}{4}$
Plattenbalken-Querschnitt 	$b d = F_p$ Plattenquerschnitt $b_o(d_o - d) = F_{st}$ Stegquerschnitt $I_p = \frac{Fp\ d^2}{12}$; $I_{st} = \frac{F_{st}\ (d_o - d)^2}{12}$ $e_o = \frac{d_o}{2}\cdot\frac{F_{st}}{F_p + F_{st}} + \frac{d}{2}$; $e_u = d_o - e_o$ $I_s = I_p + I_{st} + \frac{F_p\cdot F_{st}}{F_p + F_{st}}\left(\frac{d_o}{2}\right)^2$ Einfacher und meistens ausreichend genau ist die Anwendung der Gleichung $J_s = \mu\cdot b\cdot d_o^3$ (μ-Werte siehe Zahlentafel S. 63)
Beliebig zweiteilig zusammengesetzter Querschnitt 	$F = F_1 + F_2$ $e_o = e_1 + \frac{F_2\ e_{12}}{F}$; $e_u = d - e_o$ $I_s = I_1 + I_2 + \frac{F_1 F_2}{F}\, e_{12}^2$

Rohrquerschnitt



$d_m = (d_a + d_i)\,/\,2; \qquad s = (d_a - d_i)\,/\,2$

$F = \pi\, d_m\, s$

$I = \pi\,(d_a^4 - d_i^4)\,/\,64 = 0{,}0491\;(d_a^4 - d_i^4)$

Falls $s\,/\,d_a \leqq 1/10$ kann gesetzt werden:

$I \approx \pi \left(\frac{d_m}{2}\right)^3 s = \frac{F\, d_m^2}{8}$

$W = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} = \frac{2I}{d_a}$

Halbkreisfläche



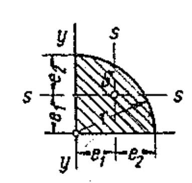
$e_1 = 0{,}4244\, r$ $\qquad = 0{,}57$[illegible]

$F = \pi r^2/2 =$

$I = 0{,}1098\, r^4 = F\, r^2/14{,}31$

$W_1 = 0{,}2587\, r^3; \qquad W_2 = 0{,}1907\, r^3$

Viertelkreisfläche



$e_1 = \frac{4\, r}{3\, \pi} = 0{,}424\, r; \quad e_2 = 0{,}576\, r$

$F = \pi\, r^2/4 = 0{,}785\,4\, r^2$

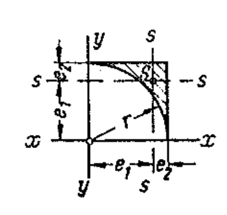
$I_s = 0{,}0549\, r^4 = F\, r^2/14{,}31$

$I_x = I_y = \pi r^4/16 = 0{,}1963\, r^4 = F\, r^2/4$

$I_{xy} = r^4/8; \qquad I_{ss} = -\,0{,}01647\, r^4$

$W_{s1} = 0{,}1296\, r^3; \qquad W_{s2} = 0{,}0956\, r^3$

Viertelkreis-Restfläche



$e_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{4 - \pi} = 0{,}777\, r; \qquad e_2 = 0{,}223\, r$

$F = r^2\,(1 - \pi/4) = 0{,}215\, r^2$

$I_s = 0{,}00754\, r^4 = F\, r^2/28{,}5$

$W_{s1} = 0{,}00970 \cdot r^3; \qquad W_{s2} = 0{,}0338\, r^3$

$I_x = I_y = r^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) = 0{,}1370 \cdot r^4 = \frac{F\, r^2}{1{,}567}$

$I_{xy} = r^4/8; \qquad I_{ss} = -\,0{,}00444\, r^4$

جدول 4 : عزوم الانعطاف والقوى العرضية وخط الانعطاف لقضيب بمجال واحد وتكون فيه EI=const

الاصطلاحات :

أكبر عزم مجال موجب	max M
اكبر انتقال w ناتج عن M	f
أكبر انتقال ناتج عن Q	f_Q
عامل المرونة × عزم العطالة	EI
عامل الانزلاق × مساحة المقطع العرضي	GF
خط الانعطاف الناتج عن M	w

$$\xi = \frac{x}{l} \quad ; \quad \xi' = \frac{x'}{l}$$

$$\alpha = \frac{a}{l} \quad ; \quad \beta = \frac{b}{l} \quad ; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

1.

$$B = P = -Q_B$$

$$Q(x) = -P$$

$$M_B = -P\,l\,; \qquad M(x) = -P\,x$$

$$f = \frac{P\,l^3}{3\,EJ} = \frac{|M_B|\,l^2}{3\,EJ}\,; \quad f_Q = \varkappa_Q \frac{P\,l}{GF}$$

$$w(x) = \frac{P\,l^3}{6\,EJ}(2 - 3\,\xi + \xi^3)$$

2.

$$B = q\,l = -Q_B$$

$$Q(x) = -q\,x$$

$$M_B = -\frac{q\,l^2}{2}\,; \qquad M(x) = -\frac{q\,x^2}{2}$$

$$f = \frac{q\,l^4}{8\,EJ} = \frac{|M_B|\,l^2}{4\,EJ}\,; \; f_Q = \varkappa_Q \frac{q\,l^2}{2\,GF}$$

$$w(x) = \frac{q\,l^4}{24\,EJ}(3 - 4\,\xi + \xi^4)$$

3.

$$q(x) = q_A(1 - \xi) + q_B\,\xi$$

$$B = \frac{q_A + q_B}{2}\,l = -Q_B$$

$$Q(x) = -\frac{q_A\,l}{2}(2\,\xi - \xi^2) - \frac{q_B\,l}{2}\,\xi^2$$

$$M_B = -\frac{l^2}{6}(2\,q_A + q_B)$$

$$M(x) = -\frac{x^2}{6}[q_A(3 - \xi) + q_B\,\xi]$$

$$f = \frac{l^4}{120\,EJ}(11 q_A + 4 q_B)$$

$$w(x) = \frac{l^4}{120\,EJ}\big[q_A(11 - 15\,\xi + 5\,\xi^4 - \xi^5) + q_B(4 - 5\,\xi + \xi^5)\big]$$

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

4.

$$B = \frac{q\,l}{2} = -\,Q_B$$

$$Q(x) = -\frac{q\,x^2}{2\,l}$$

$$M_B = -\frac{q\,l^2}{6}; \quad M(x) = -\frac{q\,x^3}{6\,l}$$

$$f = \frac{q\,l^4}{30\,EJ} = \frac{|M_B|\,l^2}{5\,EJ}$$

$$f_Q = \varkappa_Q \frac{q\,l^2}{6\,GF}$$

$$w(x) = \frac{q\,l^4}{120\,EJ}(4 - 5\xi + \xi^5)$$

5.

$$B = \frac{q\,l}{2} = -\,Q_B; \quad Q(x) = -\frac{q\,x}{2}(2 - \xi)$$

$$M_B = -\frac{q\,l^2}{3}; \quad M(x) = -\frac{q\,x^2}{6}(3 - \xi)$$

$$f = \frac{11\,q\,l^4}{120\,EJ} = \frac{|M_B|\,l^2}{3{,}636\,EJ}$$

$$f_Q = \varkappa_Q \frac{q\,l^2}{3\,GF}$$

$$w(x) = \frac{q\,l^4}{120\,EJ}(11 - 15\xi + 5\xi^4 - \xi^5)$$

6.

$$B = q\,c = -\,Q_B$$

$$M_1 = -\frac{q\,c^2}{2}; \quad M_B = q\,c\left(l - \frac{c}{2}\right)$$

$$f = \frac{q\,l^3\,c}{24\,EJ}(8 - 6\gamma + \gamma^3)$$

7.

$$B = \frac{q\,l}{2} = -Q_B; \quad Q_1 = -\frac{q\,l}{4}$$

$$M_1 = -\frac{q\,l^2}{24}$$

$$M_B = -\frac{q\,l^2}{4}$$

$$f = \frac{11\,q\,l^4}{192\,EJ}$$

8.

$$B = \frac{q\,l}{2} = -Q_B; \quad Q_1 = -\frac{q\,a}{2}$$

$$M_1 = -\frac{q\,a^2}{6}$$

$$M_B = -\frac{q\,l}{6}(l + b)$$

$$f = \frac{q\,l^5}{120\,b\,EJ}(11 - 20\,\alpha + 10\,\alpha^2 - \alpha^4)$$

9.

$$B = \frac{q\,c}{2} = -Q_B$$

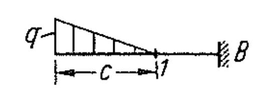
$$M_1 = -\frac{q\,c^2}{6}$$

$$M_B = -\frac{q\,c}{2}\left(l - \frac{2}{3}c\right)$$

$$f = \frac{q\,l^3\,c}{30\,EJ}(5 - 5\,\gamma + \gamma^4)$$

$$\xi = \frac{x}{l}\,; \qquad \alpha = \frac{a}{l}\,; \qquad \beta = \frac{b}{l}\,; \qquad \gamma = \frac{c}{l}$$

10.



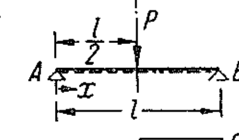
$$B = \frac{q\,c}{2} = -\,Q_B$$

$$M_1 = -\,\frac{q\,c^2}{3}$$

$$M_B = -\,\frac{q\,c}{2}\left(l - \frac{c}{3}\right)$$

$$f = \frac{q\,l^3\,c}{120\,EJ}\,(20 - 10\,\gamma + \gamma^4)$$

11.



$$A = B = \frac{P}{2} = Q_A = -\,Q_B$$

$$\max M = \frac{P\,l}{4}$$

$$M\,(x) = \frac{P\,x}{2}\ \text{für}\ x \leq \frac{l}{2}$$

$$f = \frac{P\,l^3}{48\,EJ} = \frac{\max M\,l^2}{12\,EJ}$$

$$f_Q = \varkappa_Q\,\frac{\max M}{GF}$$

$$w\,(x) = \frac{P\,l^3}{48\,EJ}\,(3\,\xi - 4\,\xi^3)\ \text{für}\ x \leq \frac{l}{2}$$

$$w\,(x) = \frac{P\,l^3}{48\,EJ}\cdot\omega_\Delta$$

$$f\,[\text{cm}] = \frac{\text{vorh. }\sigma\,[\text{Mp/cm}^2]\,l^2\,[\text{m}]}{1{,}26\,\text{h}\,[\text{cm}]}\ \text{bei Stahl}$$

$A = P\frac{b}{l} = Q_A; \quad B = P\frac{a}{l} = -Q_B$

$\max M = \frac{P\,a\,b}{l}$

$f_1 = \frac{P\,a^2\,b^2}{3\,EJl} = \frac{\max M\,a\,b}{3\,EJ}$

$f_{1Q} = \varkappa_Q \frac{\max M}{GF}$

$w(x) = \frac{P\,l^2\,b}{6\,EJ}\xi(1 - \beta^2 - \xi^2)$ für $x \leq a$

$w(x) = \frac{P\,l^2\,a}{6\,EJ}\xi'(1 - \alpha^2 - \xi'^2)$ für $x' \leq b$

13.

$A = B = P = Q_A = -Q_B$

$\max M = P\,a$

$f = \frac{P\,l^2\,a}{24\,EJ}(3 - 4\alpha^2) = \frac{\max M\;l^2}{24\,EJ}(3 - 4\alpha^2)$

14.

$A = -P\frac{l_1}{l}; \quad B = P\frac{l_1 + l}{l}$

$Q_A = -Q_{Bl} = -P\frac{l_1}{l}; \quad Q_{Br} = P$

$M_B = -P\;l_1$

$f = \frac{|M_B|\,l^2}{15{,}59\,EJ}$ bei $x_o = 0{,}577l$

$f_1 = \frac{P\,l_1^2}{3\,EJ}(l + l_1)$

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

15.

$$A = B = P = Q_A = -Q_B$$

$$\max M = \frac{P\,l}{3}$$

$$f = \frac{23\,P\,l^3}{648\,EJ} = \frac{\max M\,l^2}{9{,}39}$$

$$f_Q = \varkappa_Q \frac{P\,l}{3\,GF} = \varkappa_Q \frac{\max M}{GF}$$

16.

$$A = \frac{2\,P\,b}{l} = Q_A; \quad B = \frac{2\,P\,a}{l} = -Q_B$$

$$M_1 = \frac{2\,P\,b}{l}\left(a - \frac{c}{2}\right); \quad M_2 = \frac{2\,P\,a}{l}\left(b - \frac{c}{2}\right)$$

Sonderfall für $a = \frac{l}{2} + \frac{c}{4}$:

$$\max M_1 = \frac{P\,l}{8}(2-\gamma)^2; \quad A = P\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right); \quad B = P\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)$$

$\gamma = \frac{c}{l}$	$\max M_1$	A	B
0	0,500 Pl	1,00 P	1,00 P
0,1	0,451 Pl	0,95 P	1,05 P
0,2	0,405 Pl	0,90 P	1,10 P
0,3	0,361 Pl	0,85 P	1,15 P
0,4	0,320 Pl	0,80 P	1,20 P
0,5	0,281 Pl	0,75 P	1,25 P
0,586	0,250 Pl	0,707 P	1,293 P
> 0,586	Einzellast in Feldmitte maßgebend		

17. $n-1$ gleiche Lasten P

$$A = B = \frac{P\,(n-1)}{2} = Q_A = -Q_B$$

$$M_1 = \frac{P\,l}{2}\,1\,\frac{n-1}{n}$$

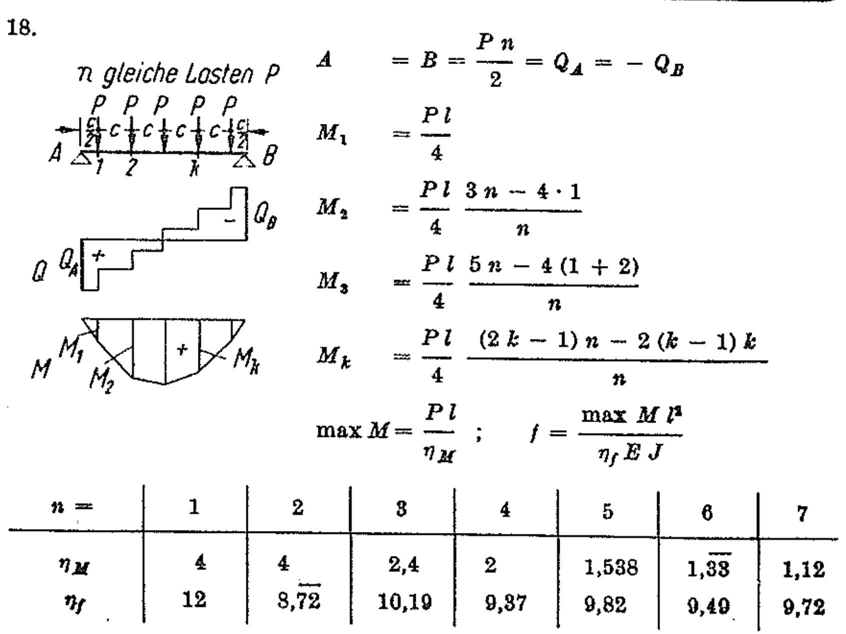
$$M_2 = \frac{P\,l}{2}\,2\,\frac{n-2}{n}$$

$$M_k = \frac{P\,l}{2}\,k\,\frac{n-k}{n}$$

$$\max M = \frac{P\,l}{\eta_M}\;;\quad f = \frac{\max M\,l^2}{\eta_f\,EJ}$$

$n =$	2	3	4	5	6	7
η_M	4	3	2	1,$\overline{66}$	1,$\overline{33}$	1,1$\overline{6}$
η_f	12	9,39	10,11	9,25	9,81	9,56

18.



n gleiche Lasten P

$$A = B = \frac{P\,n}{2} = Q_A = -Q_B$$

$$M_1 = \frac{P\,l}{4}$$

$$M_2 = \frac{P\,l}{4}\,\frac{3\,n - 4\cdot 1}{n}$$

$$M_3 = \frac{P\,l}{4}\,\frac{5\,n - 4\,(1+2)}{n}$$

$$M_k = \frac{P\,l}{4}\,\frac{(2\,k-1)\,n - 2\,(k-1)\,k}{n}$$

$$\max M = \frac{P\,l}{\eta_M}\;;\quad f = \frac{\max M\,l^2}{\eta_f\,E\,J}$$

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
η_M	4	4	2,4	2	1,538	1,$\overline{33}$	1,12
η_f	12	8,72	10,19	9,87	9,82	9,49	9,72

$$\xi = \frac{x}{l}\,; \qquad \alpha = \frac{a}{l}\,; \qquad \beta = \frac{b}{l}\,; \qquad \gamma = \frac{c}{l}$$

19.

$A \quad = B = \dfrac{q\,l}{2} = Q_A = -\,Q_B$

$Q\,(x) \quad = \dfrac{q\,l}{2}\,(1 - 2\,\xi)\,; \qquad \max M = \dfrac{q\,l^2}{8}$

$M\,(x) \quad = \dfrac{q\,l^2}{2}\,(\xi - \xi^2) = 4 \max M\, \omega_R$

$f \quad = \dfrac{5}{384}\,\dfrac{q\,l^4}{EJ} = \dfrac{\max M\, l^2}{9{,}6\,EJ}$

$w\,(x) \quad = \dfrac{q\,l^4}{24\,EJ}\,(\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4) = \dfrac{q\,l^4}{24\,EJ}\,\omega_{P1}$

20.

$A \quad = \dfrac{q\,c}{2}\,(2 - \gamma) = Q_A$

$B \quad = \dfrac{q\,c^2}{2\,l} = -\,Q_B\,; \qquad M_1 = \dfrac{q\,c^2}{2}\,(1 - \gamma)$

$\max M = \dfrac{q\,c^2}{2}\,(1 - \gamma + 0{,}25\,\gamma^2)$ bei $x_0 = c\,(1 - 0{,}5\,\gamma)$

$f_1 \quad = \dfrac{q\,c^3\,(1 - \gamma)}{6\,EJ}\,(l - 0{,}75\,c)$

21.

$A \quad = B = q\,c = Q_A = -\,Q_B$

$\max M = \dfrac{q\,c^2}{2}$

$M\,(x) = q\,x\,(c - 0{,}5\,x)$ für $x \le c$

$f \quad = \dfrac{q\,l^2\,c^2}{48\,EJ}\,(3 - 2\,\gamma^2)$

22.

$A = B = \frac{q\,c}{2} = Q_A = -\,Q_B$

$\max M = \frac{q\,l\,c}{8}\,(2 - \gamma)$

$M_1 = \frac{q\,l\,c}{4}\,(1 - \gamma)$

$f = \frac{q\,c}{96\,EJ}\,(2\,l^3 - l\,c^2 + 0{,}25\,c^3)$

23.

$A = q\,b\,\gamma = Q_A$

$B = q\,a\,\gamma = -\,Q_B$

$\max M = \frac{q\,a\,b}{2}\,\gamma\,(2 - \gamma)$ bei $x_o = a + c\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)$

$M_1 = \frac{q\,b\,c}{2}\,(2\,\alpha - \gamma)$

$M_2 = q\,a\,c\,(1 - \alpha - \gamma)$

$f_3 = \frac{q\,\gamma}{384\,EJ}\,(l\,c^3 - 16\,a\,b\,c^2 + 128\,a^2\,b^2)$

24.

$A = B = q\,c = Q_A = -\,Q_B$

$M_1 = q\,c\,(a - 0{,}5\,c)$

$M_2 = \max M = q\,a\,c$

$f = \frac{q\,l^4}{24\,EJ}\,\alpha \cdot \gamma\,(3 - 4\,\alpha^2 - \gamma^2)$

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

25.

$$A = \frac{1}{6} q\, l = Q_A; \quad B = \frac{1}{3} q\, l = -Q_B$$

$$Q(x) = \frac{q\, l}{6} (1 - 3\, \xi^2)$$

$$\max M = \frac{q\, l^2}{9 \sqrt{3}} \text{ bei } x_0 = 0{,}577\, l$$

$$M(x) = \frac{q\, l\, x}{6} (1 - \xi^2) = \frac{q\, l^2}{6} \omega_D$$

$$f = 0{,}00652 \frac{q\, l^4}{EJ} \text{ bei } x_1 = 0{,}519\, l$$

$$w(x) = \frac{q\, l^3\, x}{360\, EJ} (7 - 10\, \xi^2 + 3\, \xi^4)$$

26.

$$A = \frac{l}{6} (2\, q_A + q_B) = Q_A$$

$$B = \frac{l}{6} (q_A + 2\, q_B) = -Q_B$$

$$Q(x) = \frac{q_A\, l}{6} (2 - 6\, \xi + 3\, \xi^2) + \frac{q_B\, l}{6} (1 - 3\, \xi^2)$$

$$M(x) = \frac{q_A\, l^2}{6} (2\, \xi - 3\, \xi^2 + \xi^3) + \frac{q_B\, l^2}{6} (\xi - \xi^3) = \frac{l^2}{6} (q_A\, \omega_D' + q_B\, \omega_D)$$

Aus nachstehender Tafel ist für $q_B > q_A$

mit $P = \frac{q_A + q_B}{2} l$: $\max M = \frac{P\, l}{n}$ bei $x_0 = \xi_0\, l$

$\frac{q_A}{q_B}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ξ_0	0,577	0,566	0,555	0,545	0,536	0,528	0,520	0,514	0,508	0,504	0,500
n	7,79	7,82	7,85	7,89	7,91	7,93	7,94	7,96	7,98	7,99	8,00

$E\, J\, f = 0{,}01303\, P \cdot l^3$ zwischen $\xi = 0{,}500$ (Fall 19) und $\xi = 0{,}519$ (Fall 25)

27.

$$A = B = \frac{q\,l}{4} = Q_A = -Q_B$$

$$Q\,(x) = \frac{q\,l}{4}\,(1 - 4\,\xi^2) \quad \text{für } x \leq \frac{l}{2}$$

$$M\,(x) = \frac{q\,l^2}{12}\,(3\,\xi - 4\,\xi^3) \quad \text{für } x \leq \frac{l}{2}$$

$$M\,(x) = \frac{q\,l^2}{12}\,\omega_\Delta\,; \quad \max M = \frac{q\,l^2}{12}$$

$$f = \frac{q\,l^4}{120\,EJ} = \frac{\max M\,l^2}{10\,EJ}$$

$$w\,(x) = \frac{q\,l^3\,x}{120\,EJ}\left(\frac{25}{8} - 5\,\xi^2 + 2\,\xi^4\right)$$

28.

$$A = \frac{q}{6}\,(l + b) = Q_A$$

$$B = \frac{q}{6}\,(l + a) = -Q_B$$

$$Q_1 = \frac{q}{3}\,(b - a)\,; \qquad M_1 = \frac{q\,a\,b}{3}$$

$$f_1 = \frac{q\,a\,b}{9\,EJ}\left[a\,b + \frac{1}{5\,l}\,(a^3 + b^3)\right]$$

$$x \leq a: \quad Q\,(x) = \frac{q\,l}{6\,\alpha}\,(1 - \beta^2 - 3\,\xi^2)$$

$$M\,(x) = \frac{q\,l}{6\,\alpha}\,x\,(1 - \beta^2 - \xi^2)$$

$$x \geq a: \quad Q\,(x) = \frac{q\,l}{6\,\beta}\,(1 - \alpha^2 - 3\,\xi'^2)\,; \quad M\,(x) = \frac{q\,l}{6\,\beta}\,x'\,(1 - \alpha^2 - \xi'^2)$$

$$a > b: \quad \max M = \frac{2}{3}\,A\,x_0 \qquad \text{bei } x_0 = \sqrt{a\,\frac{l + b}{3}}$$

$$a < b: \quad \max M = \frac{2}{3}\,B\,x_0' \qquad \text{bei } x_0' = \sqrt{b\,\frac{l + a}{3}}$$

Nebenpol	Relative instant center	قطب جانبي
Normalspannung	Normal stress	اجهاد ناظمي
— –Kraft	Normal force	قوة ناظمية
Nullinie	Zero axis	خط صفر
Partielle Differentation	Partial Differentation	مشتق جزئي
Platte	Plate	صفيحة (بلاطة)
—, Kreis –	Circular plate	صفيحة دائرية
Poisson'sche Querkontraktionszahl	Poisson's ratio	عامل بواسون للتقلص العرضي
Polstrahl	Polar line	شعاع قطبي
Potential	Potential	كمون
Prinzip der virtuellen-Arbeit	Theorem of virtual work	مبدأ العمل الوهمي
— — — verrückungen	Theorem of virtual displacements	مبدأ الانتقالات الوهمية
Quer — kraft	Tranversse (shear) force	قوة عرضية
Quer — schnittskern	Core of section	نواة المقطع العرضي
Quer — dehnungszahl	Poisson's ratio	عامل التقلص العرضي (عامل بوا - ون
Rahmen	Frames	إطار
–, Zweigelenk —	Tow – hinged frames	إطار ثنائي المفصل
–, Dreigelenk –	Three – hinged frames	إطار ثلاثي المفصل
Randbedingungen	Bonudary conditions	شروط الاطراف
Schalen	Shell	قشرية
–, Kreiszylinder –	Circular cylindrical shell	قشرية أسطوانية دائرية
Schubmittelpunkt	Shear centre	مركز القص
Schubspannungen	Shearing stress	الاجهادات المماسية (القصية)
Spannungen	Stress	أجهادات
Spannugs – dehnungs – diagram	Stress – strain – diagram	مخطط الاجهاد ـ التغير النسبي
Spannungszustand	State ofstess	حالة الاجهاد
Stab	Bars	قضيب
Stabilitaetstheorie	Theory of stability	نظرية الاستقرار
Stabknickung	Buckling of bars	تحنيب القضبان
Statische Bestimmtheit	Static determinacy	التقرير الستاتيكي

Hauptpol	Instent center (of velocity)	قطب اساسي
Hooke'schses Gesetz	Hooke's law	قانون هوك
Homogen	Homogeneous	متجانس
Isotrop	Isotropic	متشابه(متماثل)الناحي(ايزوتروبي)
Knicklast	Buckling load	حمولة التحنيب
Knickspannung	Buckling stress	اجهاد التحنيب
Knickung	Buckling	التحنيب
Knickung , elastischer—	Elastic buckling	التحنيب المرن
—, plastischer —	Inelastic buckling	التحنيب اللدن
Kompatibilitaetsbedingungen	Compatibility equations	شروط التوافق
Kinematishe Kette	Kinematic chain	سلسلة حركية
— Methode	Kinematic method	طريقة حركية
Kraft	Force	قوة
—, Aeuβere —	External force	قوة خارجية
—, Innere —	Internal force	قوة داخلية
—, Normal —	Normal force	قوة ناظمية
—, Quer —	Transverse force	قوة عرضية
—, Schub —	Shearing force	قوة قص
—, Laengs —	Longitudinal (axial) force	قوة طولية
Kraftgroeβenverfahren	Force Method	طريقة قيم القطع(طريقة القوى)
Last	Load	حمولة
—, Einzel—	Concentrated load	حمولة وحيدة (مركزة)
—, Kritische —	Critical load	حمولة حرجة
Linie , elastische—	Elastic curve	الخط المرن
Matrix	Matrix	ماتريس
Maxwell , Satz von —	Maxwell's law	علاقة ماكسويل
Moment	Moment	عزم
—, Biege —	Bending moment	عزم انعطاف
—, Torsions —	Torsional moment (Torque)	عزم فتل

Dehnung	Strain	تغير نسبي (إنفعال ، تمدد)
Dreigelenk-bogen	Three – hinged arch	قوس ثلاثي المفصل
– – Rahmen	Three – hinged fram	اطار ثلاثي المفصل
Dreigelenk — Träger	Three – hinged beam	جائز (حامل) ثلاثي المفصل
Dreimomentengleichung	Three moment equations	معادلة العزوم الثلاثـة
Diagramm	Diagram	مخطط
Durchbiegung	Deflections	الانتقال الشاقولي
Durchlaufbalken	Continuous beam	جائز مستمر
Dynamisches Effekt	Dynamic Factor	مفعول حركي (ديناميكي)
Einfluβlinie	Influence line	خط التأثير
Elastizitäts - gleichung	Equation of elasticity	معادلة المرونة
– – modul	Modulus of elasticity	عامل المرونة
– – theorie	Theory of elasticity	نظرية المرونة
Energie	Energy	طاقة (قدرة)
—, Kinetishe —	Kinetic energy	طاقة حركية
—, Potentielle —	Potential energy	طاقة كامنة
Euler – Hyperbel	Euler hyperbolic	قطع زائد اويلر
Euler'she Differenialigleichung	Euler differential equations	معادلة اويلر التفاضلية
F' — Figur	F' — figure	شكل – F'
Fachwerk	Truss	جائز شبكي
Fachwerksbogen	Trussed arch	قوس شبكي
Feder	Spring	نابض
— — Konstante	Stiffness of Spring	ثابت النابض
Gelenk	Hinge (link , joint)	مفصل
Gerbertraeger	Gerber beam	جائز جربر
Grad der statischenunbes - timmtheit	Degree of statical indeter - minacy	درجة عدم التقرير الستاتيكي
Hauptachsen	Principal axis	محاور اساسية (رئيسية)
Hauptspannungen	Principal stresses	اجهادات اساسية (رئيسية)

معجم المصطلحات

العربي	الانكليزي	الالماني
المحور الحيادي	Neutral axis	Achse, Neutrale —
عمل	Work	Arbeit
مبدأ العمل الوهمي	Theorem of virtual Work	—, Prinzip der virtuellen —
العمل الوهمي	Virtual work	—, Virtuelle —
مسند	Support	Auflager
مسند ثابت (مسماري)	Hinged Support	—, Festes —
مسند متحرك	Rolling support	—, Bewegliches —
مسند موثوق	Fixed support	—, Eingespanntes —
قوة رد فعل المسند	Support force	— — Kraft
ردود أفعال المساند	Support reaction (bearing reactions)	— — reaktionen
مجهد ، محمل	Strained	Eeansprucht
حمولة	Loading	Belastung
مجـال	Limit	Bereich
مجال مرن	Elastic limit	—, Elastischer
علاقة بتي (قانون بتي)	Betti's law	Betti, Satz von —
خط الانعطاف (الخط المرن)	Elastic curve	Biegelinie
عزم انعطاف	Bending moment	Biege—moment
توزيع (خط) عزم الانعطاف	Bending moment diagram	— — momentenverlauf
صلابة الانعطاف	Flexuaral stiffness (or rigidity or bending resistance)	— — steifigkeit
انعطاف	Bending	Biegung
انعطاف بسيط (صافي)	Simple bending	—, Reine (Einfache) —
انعطاف منحرف	Oblique (double) bending	—, Shiefe —
قوس	Arch	Bogen
مبدأ كاستيليانو	Castigliano's theorem	Castigliano, Satz von —

9. Rüdiger – Kneschke :

Technische MechanikBd 1u.2 .
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1965

10. Marguerre K. :

Technische Mechanik , Teil I u. II
Springer – Verlag Berlin – Heidelberg – New-York, 1965 , 1968 .

11. Betonkalender I u.II Band 1971

Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn . Berlin – Mü – Dü.

12. Göldner H. :

Leitfaden der Technischen Mechanik
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1973.

المراجع العلمية

مراجع باللغة العربية

1. ١ ـ الدكتور عبدالرزاق عرعور :

مقاومة المواد ، للصف الثاني كهرباء .
الطبعة الاولى ، جامعة حلب ١٩٧٣ ـ ١٩٧٤ .

2. ٢ ـ المرشد في المقاومة :

ترجمة الدكتور خالد رشدي بركات والمهندس فاروق عواد ١٩٧٣ .

3. ٣ ـ س تيموشنكو و د . ه . يونغ :

ميكانيك الهندسة ، علم السكون .
ترجمة وجيه القدسي وعبدالرزاق قدورة والوليد ملحس ١٩٧٢ ـ ١٩٧٣

4. ٤ ـ ف . فيودوسيف :

مقاومة المواد .
ترجمة الدكتور خالد رشدي بركات (مطبعة جامعة دمشق ١٩٧٣) .

مراجع باللغة الالمانية

5. Chmelka F. , Melan E. :

Einführung in die Festigkeitslehre .
Wien : Springer Verlag 196) .

6. Chmelka F. , Melan E. :

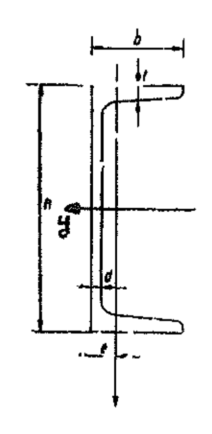
Einführung in die Statik
Wien : Springer Verlag 1951

7. Stahlbau :

Ein Handbuch für Studium und Praxis Bd. I 1961 .
Stahlbau – Varlags-GMBH Klön

8. Rothe A. :

Statik der Stabtragwerke . Bd I u. II .
Berlin: VEB - Verlag für Bauwesen 1965 .



q: Gewicht pro lfd. Meter

الوزن لكل متر طول

الرمز	h	b	d	t	e	F	q	من أجل المحور $y-y$			من أجل المحور $z-z$			
								I_{yy}	$W_o = W_u$	i_y	I_{zz}	W_u	W_o	i_z
[	mm	mm	mm	mm	cm	cm²	kpm⁻¹	cm⁴	cm³	cm	cm⁴	cm³	cm³	cm
8	80	45	6	8	1,45	11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4	6,36	13,4	1,33
10	100	50	6	8,5	1,55	13,5	10,6	206	41,2	3,91	29,3	8,49	18,9	1,47
12	120	55	7	9	1,60	17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	27,0	1,59
14	140	60	7	10	1,75	20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	35,8	1,75
16	160	65	7,5	10,5	1,84	24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	46,4	1,89
18	180	70	8	11	1,92	28,0	22,0	1 350	150	6,95	114	22,4	59,4	2,02
20	200	75	8,5	11,5	2,01	32,2	25,3	1 910	191	7,70	148	27,0	73,6	2,14
22	220	80	9	12,5	2,14	37,4	29,4	2 690	245	8,48	197	33,6	92,1	2,30
24	240	85	9,5	13	2,23	42,3	33,2	3 600	300	9,22	248	39,6	111	2,42
26	260	90	10	14	2,36	48,3	37,9	4 820	371	9,99	317	47,7	134	2,56
28	280	95	10	15	2,53	53,3	41,8	6 280	448	10,9	399	57,2	158	2,74
30	300	100	10	16	2,70	58,8	46,2	8 030	535	11,7	495	67,8	183	2,90
32	320	100	14	17,5	2,60	75,8	59,5	10 870	679	12,1	597	80,6	230	2,81
35	350	100	14	16	2,40	77,3	60,6	12 840	734	12,9	570	75,0	238	2,72
40	400	110	14	18	2,65	91,5	71,8	20 350	1020	14,9	846	102	319	3,04

الرمز ∟	a (mm)	b (mm)	d (mm)	c (cm)	f (cm)	u_U (cm)	u_O (cm)	v_U (cm)	v_O (cm)	$\cot\varphi_o$ (—)	F (cm^2)	q (kpm^{-1})	من أجل المحور y–y: I_{yy} (cm^4)	من أجل المحور y–y: W_U (cm^3)
75.130.8	75	130	8	4,36	1,65	4,26	2,99	6,01	8,73	0,339	15,9	12,5	276	31,9
75.130.10			10	4,45	1,73	4,24	3,08	6,05	8,66	0,336	19,6	15,4	337	39,4
75.130.12			12	4,53	1,81	4,21	3,18	6,09	8,61	0,332	23,3	18,3	395	46,6
75.150.9	75	150	9	5,28	1,57	4,46	2,90	6,62	9,79	0,265	19,5	15,3	455	46,8
75.150.11			11	5,37	1,65	4,44	2,97	6,66	9,73	0,261	23,6	18,6	545	56,6
75.150.13			13	5,45	1,73	4,42	3,04	6,70	9,67	0,258	27,7	21,7	631	66,1
80.120.8	80	120	8	3,83	1,87	4,20	3,27	5,99	8,23	0,441	15,5	12,2	226	27,6
80.120.10			10	3,92	1,95	4,19	3,37	6,03	8,18	0,438	19,1	15,0	276	34,1
80.120.12			12	4,00	2,03	4,18	3,46	6,06	8,14	0,433	22,7	17,8	323	40,4
80.120.14			14	4,08	2,10	4,17	3,55	6,08	8,10	0,429	26,2	20,5	368	46,4
80.160.10	80	160	10	5,63	1,69	4,76	3,07	7,06	10,5	0,263	23,2	18,2	611	58,9
80.160.12			12	5,72	1,77	4,75	3,15	7,10	10,4	0,259	27,5	21,6	720	70,0
80.160.14			14	5,81	1,85	4,72	3,23	7,16	10,3	0,256	31,8	25,0	823	80,7
90.130.10	90	130	10	4,15	2,18	4,62	3,75	6,69	8,92	0,472	21,2	16,6	358	40,5
90.130.12			12	4,24	2,26	4,60	3,85	6,72	8,88	0,468	25,1	19,7	420	48,0
90.130.14			14	4,32	2,34	4,58	3,93	6,74	8,85	0.465	29,0	22,8	480	55,3
100.150.10	100	150	10	4,80	2,34	5,25	4,10	7,50	10,3	0,44[illegible]	24,2	19,0	552	54,1
100.150.12			12	4,89	2,42	5,24	4,19	7,53	10,2	0,439	28,7	22,6	650	64,2
100.150.14			14	4,97	2,50	5,23	4,28	7,56	10,2	0,435	33,2	26,1	744	74,1
100.200.10	100	200	10	6,93	2,01	5,98	3,75	8,76	13,2	0,266	29,2	23,0	1220	93,2
100.200.12			12	7,03	2,10	5,95	3,84	8,82	13,1	0,264	34,8	27,3	1440	111
100.200.14			14	7,12	2,18	5,92	3,93	8,88	13,0	0,262	40,3	31,6	1650	128
100.200.16			16	7,20	2,26	5,88	4,02	8,93	12,9	0,259	45,7	35,9	1860	145

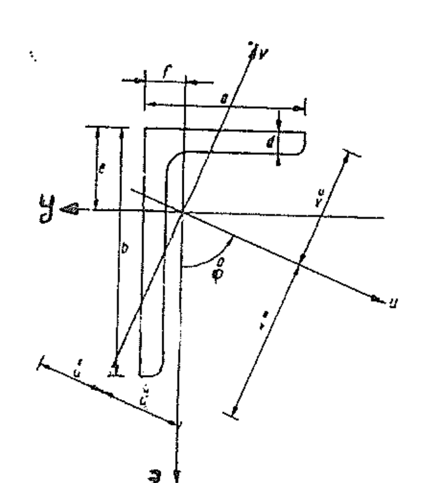
من أجل المحور

y-y		Z-Z					u—u				v—v			
W_O	i_y	I_{ZZ}	W_U	W_O	i_z	I_{yz}	I_{uu}	W_U	W_O	i_U	I_{vv}	W_U	W_O	i_V
cm³	cm	cm⁴	cm³	cm³	cm	cm⁴	cm⁴	cm³	cm³	cm	cm⁴	cm³	cm³	cm
63,3	4,17	68,3	11,7	41,4	2,08	79,5	303	50,4	34,7	4,37	41,8	9,69	13,8	1,61
75,7	4,14	82,9	14,4	47,9	2,06	96,1	369	61,0	42,6	4,34	50,6	11,9	16,4	1,61
87,2	4,12	96,5	17,0	53,3	2,04	111	432	70,9	50,2	4,31	59,6	14,2	18,7	1,60
86,2	4,83	78,3	13,2	48,9	2,00	107	484	73,1	49,4	4,98	50,0	11,2	17,2	1,60
101	4,80	93,0	15,9	56,4	1,98	127	578	86,8	59,4	4,95	59,8	13,5	20,1	1,59
116	4,78	107	18,5	61,8	1,96	145	668	99,7	69,1	4,91	69,4	15,7	22,8	1,58
59,0	3,82	80,8	13,2	43,2	2,29	79,3	261	43,6	31,7	4,10	45,8	10,9	14,0	1,72
70,4	3,80	98,1	16,2	50,3	2,27	96,0	313	52,7	38,9	4,07	56,1	13,4	16,6	1,71
80,8	3,77	114	19,1	56,2	2,25	111	371	61,9	45,6	4,04	66,1	15,8	19,1	1,71
90,2	3,75	130	22,0	61,9	2,23	125	421	69,2	52,0	4,01	75,8	18,2	21,4	1,70
109	5,14	104	16,5	61,5	2,12	142	648	91,8	61,7	5,29	67,0	14,1	21,6	1,70
126	5,11	122	19,6	68,9	2,10	166	763	107	73,4	5,26	78,9	16,6	25,0	1,69
142	5,09	139	22,5	75,1	2,09	188	871	122	84,6	5,23	90,5	18,2	28,9	1,69
86,3	4,11	141	20,6	64,7	2,58	132	420	62,8	47,1	4,46	78,5	17,0	20,9	1,93
99,1	4,09	165	24,4	73,0	2,56	154	492	73,2	55,4	4,43	92,6	20,1	24,1	1,92
111	4,07	187	28,1	79,9	2,54	174	560	83,1	63,3	4,40	106	23,1	26,8	1,91
115	4,78	198	25,8	84,6	2,86	194	637	84,9	61,8	5,13	112	21,3	27,3	2,16
133	4,76	232	30,6	95,9	2,84	227	749	99,5	73,4	5,10	132	25,2	31,5	2,15
150	4,73	264	35,2	106	2,82	258	856	113	83,9	5,07	152	29,1	35,5	2,14
176	6,46	210	26,3	104	2,68	289	1300	148	98,5	6,66	133	22,2	35,5	2,14
205	6,43	247	31,3	118	2,67	339	1530	173	117	6,63	158	26,6	41,1	2,13
232	6,41	282	36,1	129	2,65	386	1760	198	135	6,60	181	30,6	46,1	2,12
258	6,38	316	40,8	140	2,63	430	1970	221	153	6,57	204	34,7	50,7	2,11

الرمز	a	b	d	e	f	u_U	u_O	r	v_O	$\cot\varphi_O$	F	q	من أجل المحور y-y I_{yy}	W_y
L	mm	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	—	cm²	kpm⁻¹	cm⁴	cm³
50 . 65 . 5	50	65	5	1,99	1,25	2,38	2,08	3,61	4,52	0,583	5,54	4,35	23,1	5,11
50 . 65 . 7			7	2,07	1,33	2,37	2,19	3,62	4,50	0,574	7,60	5,97	31,0	6,99
50 . 65 . 9			9	2,15	1,41	2,36	2,28	3,63	4,48	0,567	9,58	7,52	38,2	8,77
50 . 100 . 6	50	100	6	3,49	1,04	2,98	1,91	4,39	6,50	0,263	8,73	6,85	89,7	13,8
50 . 100 . 8			8	3,59	1,13	2,95	2,00	4,44	6,48	0,258	11,5	8,99	116	18,0
50 . 100 . 10			10	3,67	1,20	2,91	2,08	4,49	6,43	0,252	14,1	11,1	141	22,2
55 . 75 . 5	55	75	5	2,31	1,33	2,71	2,27	4,00	5,19	0,530	6,30	4,95	35,5	6,84
55 . 75 . 7			7	2,40	1,41	2,70	2,37	4,02	5,16	0,525	8,66	6,80	47,9	9,39
55 . 75 . 9			9	2,47	1,48	2,70	2,46	4,04	5,14	0,518	10,9	8,59	59,4	11,8
60 . 90 . 6	60	90	6	2,89	1,41	3,16	2,46	4,50	6,14	0,442	8,69	6,82	71 [illegible]	11,7
60 . 90 . 8			8	2,97	1,49	3,15	2,56	4,54	6,11	0,437	11,4	8,96	92,5	15,4
60 . 90 . 10			10	3,05	1,56	3,14	2,66	4,57	6,08	0,431	14,1	11,0	112	18,8
65 . 75 . 6	65	75	6	2,19	1,70	2,75	2,68	4,60	5,28	0,740	8,11	6,37	44,0	8,30
65 . 75 . 8			8	2,28	1,78	2,78	2,79	4,62	5,26	0,736	10,6	8,34	56,7	10,9
65 . 75 . 10			10	2,35	1,86	2,79	2,89	4,64	5,23	0,732	13,1	10,3	68,4	13,3
65 . 80 . 6	65	80	6	2,39	1,65	2,94	2,69	4,63	5,61	0,649	8,41	6,60	52,8	9,41
65 . 80 . 8			8	2,47	1,73	2,94	2,79	4,65	5,59	0,645	11,0	8,66	68 [illegible]	12,3
65 . 80 . 10			10	2,55	1,81	2,95	2,90	4,68	5,56	0,640	13,6	10,7	82 [illegible]	[illegible]
65 . 80 . 12			12	2,63	1,88	2,98	3,00	4,70	5,54	0,634	16,0	12,6	[illegible]	[illegible]
65 . 100 . 7	65	100	7	3,23	1,51	3,48	2,66	4,91	6,83	0,419	11,2	8,77	[illegible]	[illegible]
65 . 100 . 9			9	3,32	1,59	3,46	2,76	4,94	6,78	0,415	14,2	11,1	141	[illegible]
65 . 100 . 11			11	3,40	1,67	3,45	2,85	4,97	6,74	0,410	17,1	13,4	167	25,3
65 . 115 . 8	65	115	8	3,94	1,46	3,73	2,61	5,30	7,63	0,324	13,8	10,9	188	24,8
65 . 115 . 10			10	4,02	1,54	3,72	2,70	5,34	7,57	0,321	17,1	13,4	229	30,6
65 . 130 . 8	65	130	8	4,56	1,37	3,86	2,49	5,71	8,50	0,263	15,1	11,9	269	31,1
65 . 130 . 10			10	4,65	1,45	3,82	2,58	5,76	8,43	0,259	18,6	14,6	331	38,4
65 . 130 . 12			12	4,74	1,53	3,80	2,66	5,81	8,37	0,255	22,1	17,3	376	45,5
75 . 90 . 7	75	90	7	2,67	1,93	3,32	3,11	5,33	6,32	0,683	11,1	8,74	88,1	13,9
75 . 90 . 9			9	2,76	2,01	3,34	3,22	5,35	6,30	0,679	14,1	11,1	110	17,6
75 . 90 . 11			11	2,83	2,09	3,35	3,33	5,37	6,28	0,675	17,0	13,4	130	21,1
75 . 100 . 7	75	100	7	3,06	1,83	3,61	3,10	5,42	6,96	0,553	11,9	9,32	118	17,0
75 . 100 . 9			9	3,15	1,91	3,63	3,22	5,45	6,91	0,549	15,1	11,8	148	21 [illegible]
75 . 100 . 11			11	3,23	1,99	3,65	3,32	5,49	6,87	0,545	18,2	14,3	176	25 [illegible]

من أجل المحور

y − y		z − z					u − u				v − v			
W_o	i_y	I_{zz}	W_U	W_o	i_z	I_{yz}	I_{uu}	W_U	W_O	i_U	I_{vv}	W_U	W_O	i_V
cm³	cm	cm⁴	cm³	cm³	cm	cm⁴	cm⁴	cm³	cm³	cm	cm⁴	cm³	cm³	cm
11,6	2,04	11,9	3,18	9,52	1,47	9,81	28,8	7,98	6,37	2,28	6,21	2,61	2,99	1,06
15,0	2,02	15,8	4,31	11,9	1,44	13,0	38,4	10,6	8,53	2,25	8,37	3,53	3,82	1,05
17,8	2,00	19,4	5,39	13,8	1,42	15,7	47,0	12,9	10,5	2,22	10,5	4,45	4,61	1,05
25,7	3,20	15,3	3,86	14,7	1,32	21,0	95,2	21,7	14,6	3,30	9,78	3,28	5,12	1,06
32,3	3,18	19,5	5,04	17,3	1,31	26,7	123	27,7	19,0	3,28	12,6	4,27	6,30	1,05
38,4	3,16	23,4	6,17	19,5	1,29	31,6	149	33,2	23,2	3,25	15,5	5,33	7,45	1,04
15,4	2,37	16,2	3,89	12,2	1,60	14,2	43,1	10,8	8,30	2,61	8,68	3,20	3,82	17
20,0	2,35	21,8	5,32	15,5	1,59	18,9	57,9	14,4	11,2	2,59	11,8	4,37	4,98	17
24,0	2,33	26,8	6,66	18,1	1,57	23,1	71,3	17,6	13,9	2,55	14,8	5,48	6,02	16
24,8	2,87	25,8	5,61	18,3	1,72	25,2	82,8	18,4	13,5	3,09	14,6	4,62	5,93	1,30
31,1	2,85	33,0	7,31	22,1	1,70	32,2	107	23,6	17,5	3,06	19,0	6,05	7,42	1 29
36,7	2,82	39,6	8,92	25,4	1,68	38,3	129	28,2	21,2	3,02	23,1	7,36	8,68	1,28
20,1	2,33	30,7	6,39	18,1	1,94	21,9	60,2	13,1	11,4	2,73	14,4	5,24	5,37	1,34
24,9	2,31	39,4	8,34	22,1	1,92	27,9	77,3	16,7	14,7	2,70	18,8	6,76	6,74	1,33
29,1	2,29	47,3	10,2	25,4	1,90	33,2	92,7	20,0	17,7	2,66	23,0	8,24	7,96	1,33
22,1	2,51	31,2	6,44	18,9	1,93	24,2	68,5	14,8	12,2	2,85	15,6	5,31	5,80	1,36
27,6	2,49	40,1	8,41	23,2	1,91	30,8	88,0	18,9	15,7	2,82	20,3	6,90	7,28	1,36
32,2	2,46	48,3	10,3	26,7	1,89	36,8	106	22,6	19,1	2,79	24,8	8,41	8,55	1,35
36,3	2,44	55,8	12,1	29,7	1,87	42,0	122	26,0	22,0	2,76	29,2	9,80	9,73	1,35
35,0	3,17	37,6	7,54	24,9	1,84	38,1	128	26,1	18,7	3,39	21,6	6,31	8,12	1,39
42,5	3,15	46,7	9,52	29,4	1,82	47,0	160	32,4	23,6	3,36	27,2	7,83	9,86	1,39
49,1	3,13	55,1	11,4	33,0	1,80	55,1	190	38,2	28,3	3,34	32,6	9,45	11,4	1,38
47,7	3,69	44,2	8,78	30,3	1,79	52,5	205	38,7	26,9	3,85	27,4	7,85	10,5	1,41
57,0	3,66	53,5	10,8	34,7	1,77	62,9	249	46,6	32,9	3,82	33,2	8,92	12,3	1,40
57,7	4,17	44,8	8,72	32,7	1,72	61,5	280	49,0	32,9	4,31	28,6	7,41	11,5	1,38
69,0	4,15	54,2	10,7	37,4	1,71	74,0	340	59,0	40,3	4,27	35,0	9,16	13,6	1,37
79,3	4,12	63,0	12,7	41,2	1,69	85,3	397	68,3	47,4	4,24	41,2	10,8	15,5	1,37
33,0	2,81	55,5	9,98	28,8	2,23	41,6	117	22,0	18,5	3,24	27,1	8,16	8,71	1,66
39,9	2,79	69,1	12,6	34,4	2,21	51,5	145	27,1	23,0	3,21	34,1	10,2	10,6	1,66
45,9	2,77	81,7	18,5	39,1	2,19	60,4	171	31,8	27,2	3,17	40,9	12,2	12,3	1,66
38,6	3,15	56,9	10,0	31,1	2,19	48,6	145	26,8	20,8	3,49	30,1	8,34	9,71	1,60
47,0	3,13	71,0	12,7	37,2	2,17	60,3	181	33,2	26,2	3,47	37,8	10,4	11,7	1,60
54,5	3,11	84,0	15,3	42,2	2,15	70,9	214	39,0	31,1	3,44	45,4	12,4	13,7	1,58



q: Gewicht pro lfd. Meter — الوزن لكل متر طول

الرمز	a	b	d	e	f	u_U	u_O	v_U	v_O	$\cot\varphi_o$	F	q	من أجل المحور y-y I_{yy}	W_U
∟	mm	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	—	cm²	kpm⁻¹	cm⁴	cm³
20 · 30 · 3 20 · 30 · 4	20	30	3 4	0,99 1,03	0,50 0,54	1,04 1,03	0,86 0,91	1,51 1,52	2,04 2,02	0,431 0,423	1,42 1,85	1,11 1,45	1,25 1,59	0,62 0,81
20 · 40 · 3 20 · 40 · 4	20	40	3 4	1,43 1,47	0,44 0,48	1,19 1,18	0,79 0,83	1,77 1,80	2,61 2,57	0,259 0,252	1,72 2,25	1,35 1,77	2,79 3,59	1,08 1,42
30 · 45 · 4 30 · 45 · 5	30	45	4 5	1,48 1,52	0,74 0,78	1,58 1,58	1,27 1,32	2,26 2,27	3,07 3,05	0,436 0,430	2,87 3,53	2,25 2,77	5,78 6,99	1,91 2,35
30 · 60 · 5 30 · 60 · 7	30	60	5 7	2,15 2,24	0,68 0,76	1,77 1,73	1,20 1,28	2,67 2,72	3,90 3,83	0,256 0,248	4,29 5,85	3,37 4,59	15,6 20,7	4,04 5,50
40 · 50 · 3 40 · 50 · 4 40 · 50 · 5	40	50	3 4 5	1,48 1,52 1,56	0,99 1,03 1,07	1,87 1,84 1,84	1,62 1,67 1,73	2,85 2,85 2,88	3,50 3,50 3,49	0,632 0,629 0,625	2,63 3,46 4,27	2,06 2,71 3,35	6,58 8,54 10,4	1,87 2,47 3,02
40 · 60 · 5 40 · 60 · 6 40 · 60 · 7	40	60	5 6 7	1,96 2,00 2,04	0,97 1,01 1,05	2,09 2,08 2,07	1,68 1,72 1,77	3,01 3,02 3,03	4,08 4,06 4,04	0,437 0,433 0,429	4,79 5,68 6,55	3,76 4,46 5,14	17,2 20,1 23,0	4,25 5,03 5,79
40 · 80 · 6 40 · 80 · 8	40	80	6 8	2,85 2,94	0,88 0,95	2,42 2,38	1,55 1,65	3,53 3,57	5,21 5,15	0,259 0,253	6,89 9,01	5,41 7,07	44,9 57,6	8,73 11,4

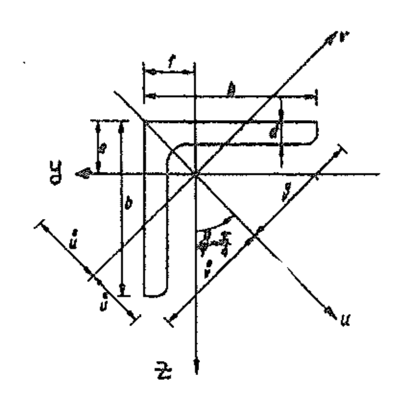
من أجل المحور														
y – y		z – z					u – u				v – v			
W_O	i_y	I_{zz}	W_U	W_O	i_z	I_{yz}	I_{uu}	W_U	W_O	i_U	I_{vv}	W_U	W_O	i_V
cm³	cm	cm⁴	cm³	cm³	cm	cm⁴	cm⁴	cm³	cm³	cm	cm⁴	cm³	cm³	cm
1,26	0,94	0,44	0,29	0,88	0,56	0,43	1,43	0,95	0,70	1,00	0,25	0,24	0,29	0,42
1,54	0,93	0,55	0,38	1,02	0,55	0,53	1,81	1,19	0,90	0,99	0,33	0,32	0,36	0,42
1,95	1,27	0,47	0,30	1,07	0,52	0,64	2,96	1,67	1,13	1,31	0,30	0,25	0,38	0,42
2,44	1,26	0,60	0,39	1,25	0,52	0,81	3,79	2,11	1,47	1,30	0,39	0,33	0,47	0,42
3,91	1,42	2,05	0,91	2,77	0,85	2,01	6,65	2,94	2,17	1,52	1,18	0,75	0,93	0,64
4,60	1,41	2,47	1,11	3,17	0,84	2,39	8,02	3,53	2,63	1,51	1,44	0,91	1,09	0,64
7,26	1,90	2,60	1,12	3,82	0,78	3,55	16,5	6,18	4,23	1,69	1,69	0,95	1,41	0,63
9,24	1,88	3,41	1,52	4,49	0,76	4,56	21,8	8,01	5,69	1,93	2,28	1,32	1,78	0,62
4,45	1,58	3,76	1,25	3,80	1,20	2,97	8,46	2,97	2,42	1,79	1,89	1,01	1,17	0,85
5,62	1,57	4,86	1,64	4,72	1,19	3,82	10,9	3,82	3,11	1,78	2,46	1,34	1,47	0,84
6,67	1,56	5,89	2,01	5,50	1,18	4,60	13,3	4,62	3,81	1,76	3,02	1,64	1,75	0,84
8,78	1,89	6,11	2,02	6,30	1,13	5,98	19,8	6,58	4,85	2,03	3,50	1,67	2,08	0,86
10,1	1,88	7,12	2,38	7,05	1,12	6,94	23,1	7,65	5,69	2,02	4,12	1,98	2,40	0,85
11,3	1,87	8,07	2,74	7,69	1,11	7,81	26,3	8,68	6,51	2,00	4,73	2,29	2,67	0,85
15,8	2,55	7,59	2,44	8,63	1,05	10,4	47,6	13,5	9,14	2,63	4,90	2,02	3,16	0,84
19,6	2,53	9,68	3,18	10,2	1,04	13,0	60,9	17,1	11,8	2,60	6,41	2,69	3,88	0,84

الرمز	b	d	$e=f$	u_U	u_O	$v_U=v_O$	F	q	من أجل المحور $x-x,\ y-y$: $I_{xx}=I_{yy}$	W_U	W_O
L	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm²	kpm⁻¹	cm⁴	cm³	cm³
100 . 100 . 10	100	10	2,82	3,54	3,99	7,07	19,2	15,1	177	24,7	62,8
100 . 100 . 12		12	2,90	3,57	4,10		22,7	17,8	207	29,2	71,4
100 . 100 . 14		14	2,98	3,60	4,21		26,2	20,6	235	33,5	78,9
100 . 100 . 16		16	3,06	3,63	4,32		29,6	23,2	262	37,7	85,6
110 . 110 . 10	110	10	3,07	3,89	4,34	7,78	21,2	16,6	239	30,1	77,9
110 . 110 . 12		12	3,15	3,93	4,45		25,1	19,7	280	35,7	88,9
110 . 110 . 14		14	3,21	3,98	4,54		29,0	22,8	319	41,0	99,4
120 . 120 . 11	120	11	3,36	4,24	4,75	8,49	25,4	19,9	341	39,5	101
120 . 120 . 13		13	3,44	4,27	4,86		29,7	23,3	394	46,0	116
120 . 120 . 15		15	3,51	4,31	4,96		33,9	26,6	446	52,5	127
120 . 120 . 17		17	3,59	4,34	5,08		38,1	29,9	493	58,7	137
130 . 130 . 12	130	12	3,64	4,60	5,15	9,19	30,0	23,6	472	50,4	130
130 . 130 . 14		14	3,72	4,63	5,26		34,7	27,2	540	58,2	145
130 . 130 . 16		16	3,80	4,66	5,37		39,3	30,9	605	65,8	159
140 . 140 . 13	140	13	3,92	4,96	5,54	9,90	35,0	27,5	638	63,3	163
140 . 140 . 15		15	4,00	4,99	5,66		40,0	31,4	723	72,3	181
140 . 140 . 17		17	4,08	5,02	5,77		45,0	35,3	805	81,2	197
150 . 150 . 14	150	14	4,21	5,31	5,95	10,6	40,3	31,6	845	78,2	201
150 . 150 . 16		16	4,29	5,34	6,07		45,7	35,9	949	88,7	221
150 . 150 . 18		18	4,36	5,38	6,17		51,0	40,1	1050	99,3	241
160 . 160 . 15	160	15	4,49	5,67	6,35	11,3	46,1	36,2	1100	95,6	246
160 . 160 . 17		17	4,57	5,70	6,46		51,8	40,7	1230	108	269
160 . 160 . 19		19	4,65	5,73	6,58		57,5	45,1	1350	118	290
180 . 180 . 16	180	16	5,02	6,39	7,11	12,7	55,4	43,5	1680	130	335
180 . 180 . 18		18	5,10	6,41	7,22		61,9	48,6	1870	145	367
180 . 180 . 20		20	5,18	6,44	7,33		68,4	53,7	2040	160	394
200 . 200 . 16	200	16	5,52	7,09	7,80	14,1	61,8	48,5	2340	162	424
200 . 200 . 18		18	5,60	7,12	7,92		69,1	54,3	2600	181	464
200 . 200 . 20		20	5,68	7,15	8,04		76,4	59,9	2850	199	502

من أجل المحور									الرمز
z — z, y — v		u — u				v — v			
$i_y = i_z$	I_{yz}	I_{uu}	$W_U = W_O$	i_U	I_{vv}	W_U	W_O	i_V	
cm	cm^4	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm^3	cm	L
3,04	104	280	39,6	3,82	73,3	20,7	18,4	1,95	100 . 100 . 10
3,02	121	328	46,4	3,80	86,2	24,1	21,0	1,95	100 . 100 . 12
3,00	137	372	52,6	3,77	98,3	27,3	23,4	1,94	100 . 100 . 14
2,97	151	413	58,4	3,74	111	30,6	25,6	1,93	100 . 100 . 16
3,36	140	379	48,7	4,23	98,6	25,3	22,7	2,16	110 . 110 . 10
3,34	164	444	57,1	4,21	116	29,5	26,1	2,15	110 . 110 . 12
3,32	186	505	64,9	4,18	133	33,4	29,3	2,14	110 . 110 . 14
3,66	201	541	63,7	4 62	140	33,0	29,5	2,35	120 . 120 . 11
3,64	232	625	73,6	4,59	162	37,9	33,3	2,34	120 . 120 . 13
3,63	260	705	83,0	4,56	186	43,2	37,5	2,34	120 . 120 . 15
3,60	287	778	91,6	4,51	208	47,9	41,0	2,34	120 . 120 . 17
3,97	278	750	81,6	5,00	194	42,1	37,7	2,54	130 . 130 . 12
3,94	317	857	93,3	4,97	223	48,2	42,4	2,53	130 . 130 . 14
3,92	354	959	104	4,94	251	53,9	46,7	2,52	130 . 130 . 16
4,27	376	1010	102	5,38	262	52,8	47,3	2,74	140 . 140 . 13
4,25	425	1150	116	5,36	298	59,7	52,7	2,73	140 . 140 . 15
4,23	471	1280	129	5,33	334	66,5	57,9	2,72	140 . 140 . 17
4,58	498	1340	126	5,77	347	65,3	58,3	2,94	150 . 150 . 14
4,56	558	1510	142	5,74	391	73,2	64,4	2,93	150 . 150 . 16
4,54	612	1670	158	5,70	438	81,4	71,0	2,93	150 . 150 . 18
4,88	648	1750	155	6,15	453	79,9	71,3	3,14	160 . 160 . 15
4,86	722	1950	173	6,13	506	88,8	78,3	3,13	160 . 160 . 17
4,84	791	2140	189	6,10	558	97,4	84,8	3,12	160 . 160 . 19
5,51	1000	2690	212	6,96	679	106	95,5	3,50	180 . 180 . 16
5,49	1110	2970	234	6,93	757	118	105	3,49	180 . 180 . 18
5,47	1210	3260	257	6,90	830	129	113	3,49	180 . 180 . 20
6,15	1400	3740	265	7,78	948	133	121	3,91	200 . 200 . 16
6,13	1550	4150	294	7,75	1050	147	133	3,90	200 . 200 . 18
6,11	1690	4540	322	7,72	1160	162	144	3,89	200 . 200 . 20

الرمز	b	d	$e=f$	u_U	u_O	$v_U=v_O$	F	q	من أجل المحور $z-z,\ y-y$ $I_{zz}=I_{yy}$	W_U	W_O
L	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm^2	kpm^{-1}	cm^4	cm^3	cm^3
50 . 50 . 5	50	5	1,40	1,76	1,98	3,54	4,80	3,77	11,0	3,05	7,86
50 . 50 . 6		6	1,45	1,77	2,04		5,69	4,47	12,8	3,61	8,83
50 . 50 . 7		7	1,49	1,78	2,11		6,56	5,15	14,6	4,15	9,80
50 . 50 . 9		9	1,56	1,82	2,21		8,24	6,47	17,9	5,20	11,5
55 . 55 . 6	55	6	1,56	1,94	2,21	3,89	6,31	4,95	17,3	4,40	11,1
55 . 55 . 8		8	1,64	1,97	2,32		8,23	6,46	22,1	5,72	13,5
55 . 55 . 10		10	1,72	2,00	2,43		10,1	7,90	26,3	6,97	15,3
60 . 60 . 6	60	6	1,69	2,11	2,39	4,24	6,91	5,42	22,8	5,29	13,5
60 . 60 . 8		8	1,77	2,14	2,50		9,03	7,09	29,1	6,88	16,4
60 . 60 . 10		10	1,85	2,17	2,62		11,1	8,69	34,9	8,41	18,9
65 . 65 . 7	65	7	1,85	2,29	2,62	4,60	8,70	6,83	33,4	7,18	18,1
65 . 65 . 9		9	1,93	2,32	2,73		11,0	8,62	41,3	9,04	21,4
65 . 65 . 11		11	2,00	2,36	2,83		13,2	0,31	48,8	10,8	24,4
70 . 70 . 7	70	7	1,97	2,47	2,79	4,95	9,40	7,38	42,4	8,43	21,5
70 . 70 . 9		9	2,05	2,50	2,90		11,9	9,34	52,6	10,6	25,7
70 . 70 . 11		11	2,13	2,53	3,01		14,3	11,2	61,8	12,7	29,0
75 . 75 . 7	75	7	2,09	2,63	2,95	5,30	10,1	7,94	52,4	9,67	25,1
75 . 75 . 8		8	2,13	2,65	3,01		11,5	9,03	58,9	11,0	27,7
75 . 75 . 10		10	2,21	2,68	3,12		14,1	11,1	71,4	13,5	32,3
75 . 75 . 12		12	2,29	2,71	3,24		16,7	3,11	82,4	15,8	36,0
80 . 80 . 8	80	8	2,26	2,82	3,20	5,66	12,3	9,66	72,3	12,6	32,0
80 . 80 . 10		10	2,34	2,85	3,31		15,1	11,9	87,5	15,5	37,4
80 . 80 . 12		12	2,41	2,89	3,41		17,9	14,1	102	18,2	42,3
80 . 80 . 14		14	2,48	2,93	3,51		20,6	16,1	115	20,8	46,4
90 . 90 . 9	90	9	2,54	3,18	3,59	6,36	15,5	12,2	116	18,0	45,7
90 . 90 . 11		11	2,62	3,21	3,70		18,7	14,7	138	21,6	52,7
90 . 90 . 13		13	2,70	3,24	3,81		21,8	17,1	158	25,1	58,5
90 . 90 . 16		16	2,81	3,29	3,97		26,4	20,7	186	30,1	66,2

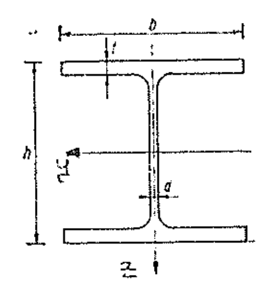
من أجل المحور									الرمز
$z - z$, $y - y$		$u - u$			$v - v$				
$i_y = i_z$	I_{yz}	I_{uu}	$W_U = W_O$	i_U	I_{vv}	W_U	W_O	i_V	
cm	cm^4	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm^3	cm	L
1,51	6,41	17,4	4,92	1,90	4,59	2,61	2,32	0,98	50 · 50 · 5
1,50	7,56	20,4	5,76	1,89	5,24	2,96	2,57	0,96	50 · 50 · 6
1,49	8,58	23,1	6,53	1,88	6,02	3,38	2,85	0,96	50 · 50 · 7
1,47	10,2	28,1	7,94	1,85	7,67	4,21	3,47	0,97	50 · 50 · 9
1,66	10,1	27,4	7,04	2,08	7,24	3,73	3,28	1,07	55 · 55 · 6
1,64	12,7	34,8	8,95	2,06	9,35	4,75	4,03	1,07	55 · 55 · 8
1,62	15,0	41,4	10,6	2,02	11,3	5,65	4,65	1,06	55 · 55 · 10
1,82	13,4	36,1	8,51	2,29	9,43	4,47	3,95	1,17	60 · 60 · 6
1,80	17,0	46,1	10,9	2,26	12,1	5,65	4,84	1,16	60 · 60 · 8
1,78	20,3	55,1	13,0	2,23	14,6	6,73	5,57	1,15	60 · 60 · 10
1,96	19,6	53,0	11,5	2,47	13,8	6,03	5,27	1,26	65 · 65 · 7
1,94	24,1	65,4	14,2	2,44	17,2	7,41	6,30	1,26	65 · 65 · 9
1,91	28,1	76,8	16,7	2,42	20,7	8,77	7,31	1,25	65 · 65 · 11
2,12	24,8	67,1	13,6	2,67	17,6	7,13	6,31	1,37	70 · 70 · 7
2,10	30,6	83,1	16,8	2,64	22,0	8,80	7,59	1,36	70 · 70 · 9
2,08	35,8	97,6	19,7	2,61	26,0	10,3	8,64	1,35	70 · 70 · 11
2,28	31,3	83,6	15,8	2,88	21,1	8,02	7,15	1,45	75 · 75 · 7
2,26	34,5	93,3	17,6	2,85	24,4	9,21	8,11	1,46	75 · 75 · 8
2,25	41,6	113	21,3	2,83	29,8	11,1	9,55	1,45	75 · 75 · 10
2,22	47,7	130	24,5	2,79	34,7	12,8	10,7	1,44	75 · 75 · 12
2,42	42,7	115	20,3	3,06	29,6	10,5	9,25	1,55	80 · 80 · 8
2,41	51,6	139	24,6	3,03	35,9	12,6	10,9	1,54	80 · 80 · 10
2,39	59,0	161	28,4	3,00	43,0	14,9	12,6	1,53	80 · 80 · 12
2,36	66,4	181	32,0	2,96	48,6	16,6	13,9	1,54	80 · 80 · 14
2,74	68,2	184	28,9	3,45	47,8	15,0	13,3	1,76	90 · 90 · 9
2,72	80,9	218	34,3	3,41	57,1	17,8	15,4	1,75	90 · 90 · 11
2,69	92,1	250	39,3	3,39	65,9	20,3	17,3	1,74	90 · 90 · 13
2,66	107	294	46,2	3,34	79,1	24,0	19,9	1,73	90 · 90 · 16



q: Gewicht pro lfd. Meter — الوزن لكل متر طول

الرمز									من أجل المحور		
									$x-x,\ y-y$		
	b	d	$e=f$	w_U	w_O	$v_U = v_O$	F	q	$I_{xx}=I_{yy}$	W_U	W_O
L	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm^2	kpm^{-1}	cm^4	cm^3	cm^3
20 . 20 . 3	20	3	0,60	0,70	0,85	1,41	1,12	0,88	0,39	0,28	0,65
20 . 20 . 4		4	0,64	0,71	0,90		1,45	1,14	0,48	0,35	0,75
25 . 25 . 3	25	3	0,73	0,87	1,03	1,77	1,42	1,12	0,79	0,45	1,08
25 . 25 . 4		4	0,76	0,89	1,08		1,85	1,45	1,01	0,58	1,33
25 . 25 . 5		5	0,80	0,91	1,13		2,26	1,77	1,18	0,69	1,48
30 . 30 . 3	30	3	0,84	1,04	1,18	2,12	1,74	1,36	1,41	0,65	1,68
30 . 30 . 4		4	0,89	1,05	1,24		2,27	1,78	1,81	0,86	2,03
30 . 30 . 5		5	0,92	1,07	1,30		2,78	2,18	2,16	1,04	2,35
35 . 35 . 4	35	4	1,00	1,24	1,41	2,47	2,67	2,10	2,96	1,18	2,96
35 . 35 . 5		5	1,04	1,25	1,47		3,28	2,57	3,56	1,45	3,42
35 . 35 . 6		6	1,08	1,27	1,53		3,87	3,04	4,14	1,71	3,83
40 . 40 . 4	40	4	1,12	1,40	1,58	2,83	3,08	2,42	4,48	1,56	4,00
40 . 40 . 5		5	1,16	1,42	1,64		3,79	2,97	5,43	1,91	4,68
40 . 40 . 6		6	1,20	1,43	1,70		4,48	3,52	6,33	2,26	5,28
45 . 45 . 5	45	5	1,28	1,58	1,81	3,18	4,30	3,38	7,83	2,43	6,12
45 . 45 . 7		7	1,36	1,61	1,92		5,86	4,60	10,4	3,31	7,65

من أجل المحور									
$x-x$, $y-y$		$u-u$			$v-v$				الرمز
$i_y = i_x$	I_{yz}	I_{uu}	$W_O = W_U$	i_U	I_{vv}	W_U	W_O	i_V	
cm	cm^4	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm^3	cm	L
0,59	0,24	0,62	0,44	0,74	0,15	0,21	0,18	0,36	20 · 20 · 3
0,58	0,29	0,77	0,55	0,73	0,19	0,27	0,21	0,37	20 · 20 · 4
0,75	0,48	1,27	0,72	0,95	0,31	0,36	0,30	0,47	25 · 25 3
0,74	0,61	1,61	0,91	0,93	0,40	0,45	0,37	0,47	25 · 25 · 4
0,72	0,69	1,87	1,06	0,91	0,50	0,55	0,44	0,47	25 · 25 · 5
0,90	0,84	2,24	1,06	1,14	0,57	0,55	0,48	0,57	30 · 30 · 3
0,89	1,05	2,85	1,34	1,12	0,76	0,72	0,61	0,58	30 · 30 · 4
0,88	1,25	3,41	1,61	1,11	0,91	0,85	0,70	0,57	30 · 30 · 5
1,05	1,72	4,68	1,89	1,33	1,24	1,00	0,88	0,68	35 · 35 · 4
1,04	2,07	5,63	2,28	1,31	1,49	1,19	1,10	0,67	35 · 35 · 5
1,04	2,37	6,50	2,63	1,30	1,77	1,39	1,16	0,68	35 · 35 · 6
1,21	2,62	7,09	2,51	1,52	1,86	1,33	1,18	0,78	40 · 40 · 4
1,20	3,20	8,64	3,05	1,51	2,22	1,56	1,35	0,77	40 · 40 · 5
1,19	3,66	9,98	3,53	1,49	2,67	1,87	1,57	0,77	40 · 40 · 6
1,35	4,58	12,4	3,90	1,70	3,25	2,06	1,80	0,87	45 · 45 · 5
1,33	6,01	16,4	5,16	1,67	4,39	2,73	2,29	0,87	45 · 45 · 7

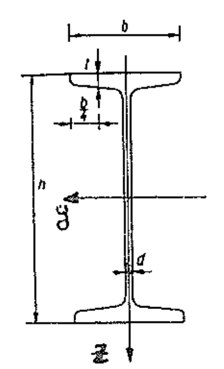


q. Gewicht pro lfd. Meter

الوزن لكل متر طول

الرمز	h	b	d	t	F	q	من أجل المحور					
							ي — ي			ع — ع		
							I_{yy}	$W_o = W_u$	i_y	I_{zz}	$W_o = W_u$	i_z
IP	mm	mm	mm	mm	cm^2	kpm^{-1}	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
18	180	180	9	14	65,8	51,6	3 830	426	7,63	1 360	151	4,55
20	200	200	10	16	82,7	64,9	5 950	595	8,48	2 140	214	5,08
22	220	220	10	16	91,1	71,5	8 050	732	9,37	2 840	258	5,59
24	240	240	11	18	111	87,4	11 690	974	10,3	4 150	346	6,11
26	260	260	11	18	121	94,8	15 050	1 160	11,2	5 280	406	6,61
28	280	280	12	20	144	113	20 720	1 480	12,0	7 320	523	7,14
30	300	300	12	20	154	121	25 760	1 720	12,9	9 010	600	7,65
32	320	300	13	22	171	135	32 250	2 020	13,7	9 910	661	7,60
34	340	300	13	22	174	137	36 940	2 170	14,5	9 910	661	7,55
36	360	300	14	24	192	150	45 120	2 510	15,3	10 810	721	7,51
38	380	300	14	24	194	153	50 950	2 680	16,2	10 810	721	7,46
40	400	300	14	26	209	164	60 640	3 030	17,0	11 710	781	7,49
42½	425	300	14	26	212	166	69 480	3 270	18,1	11 710	781	7,43
45	450	300	15	28	232	182	84 220	3 740	19,0	12 620	841	7,38
47½	475	300	15	28	235	185	95 120	4 010	20,1	12 620	841	7,32
50	500	300	16	30	255	200	113 200	4 530	21,0	13 530	902	7,28
55	550	300	16	30	263	207	140 300	5 100	23,1	13 530	902	7,17
60	600	300	17	32	289	227	180 800	6 030	25,0	14 440	962	7,07
65	650	300	17	32	297	234	216 800	6 670	27,0	14 440	962	6,97
70	700	300	18	34	324	254	270 300	7 720	28,9	15 350	1020	6,88
75	750	300	18	34	333	261	316 300	8 430	30,8	15 350	1020	6,79
80	800	300	18	34	342	268	366 400	9 160	32,7	15 350	1020	6,70
90	900	300	19	36	381	299	506 000	11 250	36,4	16 270	1080	6,53
100	1000	300	19	36	400	314	644 700	12 900	40,1	16 280	1080	6,37

جدول 5 : بعض البروفيلات الفولاذية الهامة



q: Gewicht pro lfd Meter الوزن لكل متر طول

الرمز	h	b	d	t	F	q	من أجل المحور y − y: I_{yy}	$W_o = W_u$	i_y	من أجل المحور z − z: I_{zz}	$W_o = W_u$	i_z
I	mm	mm	mm	mm	cm²	kpm⁻¹	cm⁴	cm³	cm	cm⁴	cm³	cm
8	80	42	3,9	5,9	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
10	100	50	4,5	6,8	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
12	120	58	5,1	7,7	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
14	140	66	5,7	8,6	18,3	14,4	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40
16	160	74	6,3	9,5	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
18	180	82	6,9	10,4	27,9	21,9	1 450	161	7,20	81,3	19,8	1,71
20	200	90	7,5	11,3	33,5	26,3	2 140	214	8,00	117	26,0	1,87
22	220	98	8,1	12,2	39,6	31,1	3 060	278	8,80	162	33,1	2,02
24	240	106	8,7	13,1	46,1	36,2	4 250	354	9,59	221	41,7	2,20
26	260	113	9,4	14,1	53,4	41,9	5 740	442	10,4	288	51,0	2,32
28	280	119	10,1	15,2	61,1	48,0	7 590	542	11,1	364	61,2	2,45
30	300	125	10,8	16,2	69,1	54,2	9 800	653	11,9	451	72,2	2,56
32	320	131	11,5	17,3	77,8	61,1	12 510	782	12,7	555	84,7	2,67
34	340	137	12,2	18,3	86,8	68,1	15 700	923	13,5	674	98,4	2,80
36	360	143	13,0	19,5	97,1	76,2	19 610	1090	14,2	818	114	2,90
40	400	155	14,4	21,6	118	92,6	29 210	1460	15,7	1160	149	3,13
42½	425	163	15,3	23,0	132	104	36 970	1740	16,7	1440	176	3,30
45	450	170	16,2	24,3	147	115	45 850	2040	17,7	1730	203	3,43
47½	475	178	17,1	25,6	163	128	56 480	2380	18,6	2090	235	3,60
50	500	185	18,0	27,0	180	141	68 740	2750	19,6	2480	268	3,72
( ) 55	550	200	19,0	30,0	213	167	99 180	3610	21,6	3490	349	4,02
60	600	215	21,6	32,4	254	199	139 000	4630	23,4	4670	434	4,30

56. Stützensenkung Δ

$$\xi = \frac{x}{l}\,; \quad \alpha = \frac{a}{l}\,; \quad \beta = \frac{b}{l}\,; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

$$A = -B = \frac{12\,EJ}{l^3}(\Delta_B - \Delta_A) = Q_A = Q_B$$

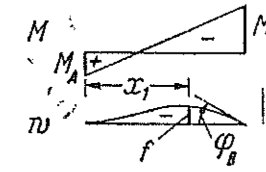
$$Q(x) = \frac{12\,EJ}{l^3}(\Delta_B - \Delta_A)$$

$$M_A = -M_B = -\frac{6\,EJ}{l^2}(\Delta_B - \Delta_A)$$

$$M(x) = -\frac{6\,EJ}{l^2}(\Delta_B - \Delta_A)(1 - 2\,\xi)$$

$$w(x) = \Delta_A + (\Delta_B - \Delta_A)(3\,\xi^2 - 2\,\xi^3)$$

57. Stützenverdrehung



$$A = -B = \frac{6\,EJ}{l^2}\varphi_B = Q_A = Q_B$$

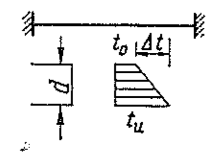
$$M_A = 2\frac{EJ}{l}\varphi_B\,; \qquad M_B = -4\frac{EJ}{l}\varphi_B$$

$$M(x) = 2\frac{EJ}{l}\varphi_B(1 - 3\,\xi)$$

$$f = -\frac{4}{27}\,l\,\varphi_B \text{ bei } x_1 = \frac{2}{3}\,l$$

$$w(x) = -l\,\varphi_B(\xi^2 - \xi^3) = -l\,\varphi_B\,\omega_{T1}$$

58. ungleichmäßige Temperatur Δt

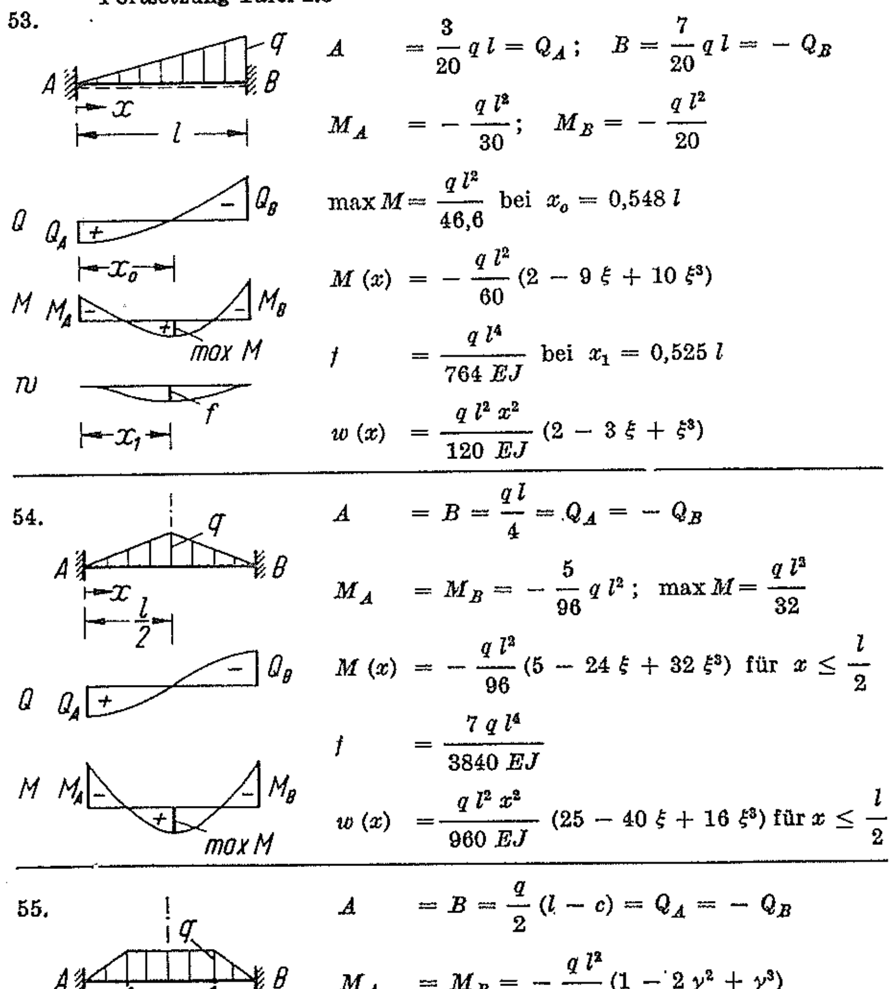


$$A = B = 0$$

$$M_A = M_B = -EJ\,\alpha_T\frac{\Delta t}{d}$$

$$w(x) = 0$$

Fortsetzung Tafel 2.3



53.

$A = \frac{3}{20}\, q\, l = Q_A; \quad B = \frac{7}{20}\, q\, l = -\, Q_B$

$M_A = -\frac{q\, l^2}{30}; \quad M_B = -\frac{q\, l^2}{20}$

$\max M = \frac{q\, l^2}{46{,}6}$ bei $x_o = 0{,}548\, l$

$M\,(x) = -\frac{q\, l^2}{60}\,(2 - 9\,\xi + 10\,\xi^3)$

$f = \frac{q\, l^4}{764\, EJ}$ bei $x_1 = 0{,}525\, l$

$w\,(x) = \frac{q\, l^2\, x^2}{120\, EJ}\,(2 - 3\,\xi + \xi^3)$

54.

$A = B = \frac{q\, l}{4} = Q_A = -\, Q_B$

$M_A = M_B = -\frac{5}{96}\, q\, l^2; \quad \max M = \frac{q\, l^2}{32}$

$M\,(x) = -\frac{q\, l^2}{96}\,(5 - 24\,\xi + 32\,\xi^3)$ für $x \le \frac{l}{2}$

$f = \frac{7\, q\, l^4}{3840\, EJ}$

$w\,(x) = \frac{q\, l^2\, x^2}{960\, EJ}\,(25 - 40\,\xi + 16\,\xi^3)$ für $x \le \frac{l}{2}$

55.

$A = B = \frac{q}{2}\,(l - c) = Q_A = -\, Q_B$

$M_A = M_B = -\frac{q\, l^2}{12}\,(1 - 2\,\gamma^2 + \gamma^3)$

$M_1 = -\frac{q\, l^2}{12}\,(1 - 6\,\gamma + 6\,\gamma^2 + \gamma^3)$

$\max M = \frac{q\, l^2}{24}\,(1 - 2\,\gamma^3)$

$f = \frac{q\, l^4}{1920\, EJ}\,(5 - 20\,\gamma^3 + 16\,\gamma^4)$

50.

$$\xi = \frac{x}{l}\,; \quad \alpha = \frac{a}{l}\,; \quad \beta = \frac{b}{l}\,; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

$$A = B = \frac{P}{2} = Q_A = -Q_B$$

$$M_A = M_B = -\frac{P\,l}{8}\,; \quad \max M = \frac{P\,l}{8}$$

$$M(x) = -\frac{P\,l}{8}(1 - 4\,\xi) \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

$$f = \frac{P\,l^3}{192\,EJ} = \frac{\max M\,l^2}{24\,EJ}$$

$$w(x) = \frac{P\,l\,x^2}{48\,EJ}(3 - 4\,\xi) \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

51.

$$A = B = \frac{q\,l}{2} = Q_A = -Q_B$$

$$M_A = M_B = -\frac{q\,l^2}{12}\,; \quad \max M = \frac{q\,l^2}{24}$$

$$M(x) = -\frac{q\,l^2}{2}\left(\frac{1}{6} - \xi + \xi^2\right)$$

$$f = \frac{q\,l^4}{384\,EJ}$$

$$w(x) = \frac{q\,l^4}{24}(\xi^2 - 2\,\xi^3 + \xi^4)$$

52.

Parabel 2 Ordn

$$A = B = \frac{1}{3}\,q\,l = Q_A = -Q_B$$

$$M_A = M_B = -\frac{1}{15}\,q\,l^2\,; \quad \max M = \frac{3}{80}\,q\,l^2$$

$$M(x) = -\frac{q\,l^2}{15}(1 - 5\,\xi + 10\,\xi^3 - 5\,\xi^4)$$

$$f = \frac{13}{5760}\,\frac{q\,l^4}{EJ}$$

$$w(x) = \frac{q\,l^2\,x^2}{90\,EJ}(3 - 5\,\xi + 3\,\xi^3 - \xi^4)$$

47. Stützensenkung Δ

$$A = -B = \frac{3EJ}{l^3}(\Delta_B - \Delta_A) = Q_A = Q_B$$

$$M_A = -\frac{3EJ}{l^2}(\Delta_B - \Delta_A)$$

$$M(x) = M_A(1-\xi)$$

$$w(x) = \Delta_A \cdot \xi' + \Delta_B \cdot \xi - \frac{1}{2}(\Delta_B - \Delta_A)(\xi' - \xi'^3)$$

$$= \Delta_A \cdot \xi' + \Delta_B \cdot \xi - \frac{1}{2}(\Delta_B - \Delta_A)\,\omega_D'$$

---

48. Stützenverdrehung φ

$$A = -B = -\frac{3EJ}{l^2}\varphi_A = Q_A = Q_B$$

$$M_A = \frac{3EJ}{l}\varphi_A$$

$$M(x) = M_A(1-\xi)$$

$$f = \frac{\varphi_A l}{3\sqrt{3}} \quad \text{bei } x_1 = 0{,}423\, l$$

$$w(x) = \varphi_A \frac{l}{2}(\xi' - \xi'^3) = \varphi_A \frac{l}{2}\omega_D'$$

40.

$$A = -B = \frac{3}{2}\frac{EJ}{l}\alpha_T \frac{\Delta t}{d} = Q_A = Q_B$$

$$M_A = -\frac{3}{2}EJ\,\alpha_T \frac{\Delta t}{d}$$

$$M(x) = M_A(1-\xi)$$

$$w(x) = \frac{l^2}{4}\alpha_T \frac{\Delta t}{d}(\xi^2 - \xi^3) = \frac{l^2}{4}\alpha_T \frac{\Delta t}{d}\omega_{T1}$$

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

45.

$$A = -B = \frac{3}{2}\frac{M}{l} = Q_A = Q_B$$

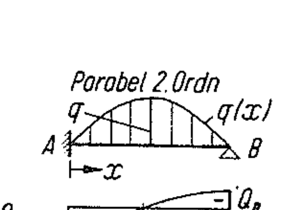
$$M_A = -\frac{M}{2}$$

$$M(x) = \frac{M}{2}(3\xi - 1)$$

$$f = \frac{M l^2}{27 EJ} \text{ bei } x = \frac{2}{3} l$$

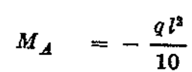
$$w(x) = \frac{M l^2}{4 EJ}(\xi^2 - \xi^3) = \frac{M l^2}{4 EJ}\omega_{T1}$$

46.

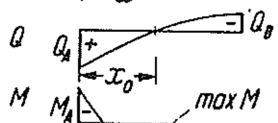


$$A = \frac{13}{30} q l = Q_A; \quad B = \frac{7}{30} q l = -Q_B$$

$$Q(x) = \frac{q l}{30}(13 - 60\xi^2 + 40\xi^3)$$



$$M_A = -\frac{q l^2}{10}$$



$$\max M = \frac{q l^2}{16{,}89} \text{ bei } x_0 = 0{,}601\, l$$

$$M(x) = \frac{q l^2}{30}(-3 + 13\xi - 20\xi^3 + 10\xi^4)$$

$$f = \frac{q l^4}{222{,}5\, EJ} \text{ bei } x_1 = 0{,}573\, l$$

$$w(x) = \frac{q l^2 x^2}{180 EJ}(9 - 13\xi + 6\xi^3 - 2\xi^4)$$

43.

$A = \frac{9}{40} q l = Q_A ; \quad B = \frac{11}{40} q l = - Q_B$

$Q(x) = \frac{q l}{40}(9 - 20 \xi^2) ; \quad M_A = - \frac{7}{120} q l^2$

$\max M = \frac{q l^2}{23,6}$ bei $x_o = 0,671\, l$

$M(x) = - \frac{q l^2}{120}(7 - 27 \xi + 20 \xi^3)$

$f = \frac{q l^4}{328,1\, EJ}$ bei $x_1 = 0,598\, l$

$w(x) = \frac{q l^2 x^2}{240\, EJ}(7 - 9 \xi + 2 \xi^3)$

44.

$A = \frac{11}{16} P = Q_A ; \quad B = \frac{5}{16} P = - Q_B$

$M_A = - \frac{3}{16} P l$

$M_1 = \frac{5}{32} P l$

$f = \frac{P l^3}{48 \sqrt{5}\, EJ}$ bei $x_o = 0,553\, l$

$f_1 = \frac{7 P l^3}{768\, EJ}$

40.

ungleichmäßige Temperatur Δt

$$A = B = Q = M \equiv 0$$

$$w(x) = \frac{l^2}{2}\alpha_T \frac{\Delta t}{d}(\xi - \xi^2) = \frac{l^2}{2}\alpha_T \frac{\Delta t}{d}\omega_R$$

$$f = \frac{l^2}{8}\alpha_T \frac{\Delta t}{d}$$

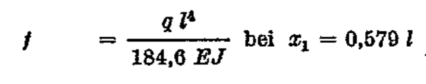
41.

$$A = \frac{5}{8} q\, l = Q_A; \quad B = \frac{3}{8} q\, l = -Q_B$$

$$\max M = \frac{9}{128} q\, l^2 \text{ bei } x_0 = \frac{5}{8} l$$

$$M_A = -\frac{q\, l^2}{8}$$

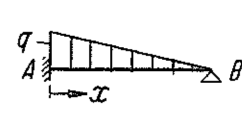
$$M(x) = -\frac{q\, l^2}{8}(1 - 5\xi + 4\xi^2)$$

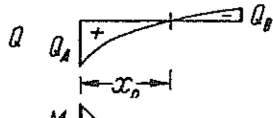


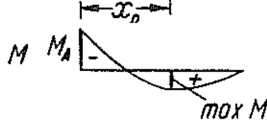
$$f = \frac{q\, l^4}{184{,}6\, EJ} \text{ bei } x_1 = 0{,}579\, l$$

$$w(x) = \frac{q\, l^2 x^2}{48\, EJ}(3 - 5\xi + 2\xi^2)$$

42.







$$A = \frac{2}{5} q\, l = Q_A; \quad B = \frac{q\, l}{10} = -Q_B$$

$$Q(x) = \frac{q\, l}{10}(4 - 10\xi + 5\xi^2); \; M_A = -\frac{q\, l^2}{15}$$

$$\max M = \frac{q\, l^2}{15\sqrt{5}} \quad \text{bei } x_0 = 0{,}553\, l$$

$$M(x) = -\frac{q\, l^2}{30}(2 - 12\xi + 15\xi^2 - 5\xi^3)$$

$$f = \frac{q\, l^4}{419{,}3\, EJ} \text{ bei } x_1 = 0{,}553\, l$$

$$w(x) = \frac{q\, l^2 x^2}{120\, EJ}(4 - 8\xi + 5\xi^2 - \xi^3)$$

37.

$$A = -B = -\frac{M_A}{l} = Q_A = Q_B$$

$$Q(x) = -\frac{M_A}{l}$$

$$M(x) = M_A \xi'$$

$$f = \frac{M_A l^2}{9\sqrt{3}\ EJ} \quad \text{bei} \quad x_1 = 0{,}423\, l$$

$$w(x) = \frac{M_A l^2}{6EJ}(\xi' - \xi'^3) = \frac{M_A l^2}{6EJ}\omega_D'$$

38

$$A = -B = \frac{M_B - M_A}{l} = Q_A = Q_B = Q(x)$$

$$M(x) = M_A \xi' + M_B \xi$$

$$w(x) = \frac{l^2}{6EJ}[M_A(\xi' - \xi'^3) + M_B(\xi - \xi^3)]$$

$$w(x) = \frac{l^2}{6EJ}(M_A \omega_D' + M_B \omega_D)$$

39.

$$A = -B = -\frac{M}{l} = Q_A = Q_B = Q(x)$$

$$M(x) = -M\xi \quad \text{für } x \leq a$$

$$M(x') = M\xi' \quad \text{für } x \geq a$$

$$w(x) = \frac{M l x}{6EJ}(\xi^2 - \alpha^2 - 2\alpha^2\beta + 2\beta^3) \text{ für } x \leq a$$

$$w(x) = -\frac{M l x'}{6EJ}(\xi'^2 + 2\alpha^3 - 2\alpha\beta^2 - \beta^2) \text{ für } x \geq a$$

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

34.

$A = B = \frac{q\,l}{2}(1 - \gamma) = Q_A = -Q_B$

$Q_1 = \frac{q\,l}{2}(1 - 2\gamma); \quad M_1 = \frac{q\,l\,c}{6}(3 - 4\gamma)$

$\max M = \frac{q\,l^2}{24}(3 - 4\gamma^2)$

$f = \frac{q\,l^4}{1920\,EJ}(25 - 40\gamma^2 + 16\gamma^4)$

35.

$A = B = \frac{q\,l}{\pi} = Q_A = -Q_B$

$q(x) = q \sin(\pi\xi); \quad Q(x) = \frac{q\,l}{\pi}\cos(\pi\xi)$

$M(x) = \frac{q\,l^2}{\pi^2}\sin(\pi\xi); \quad \max M = \frac{q\,l^2}{\pi^2}$

$w(x) = \frac{q\,l^4}{\pi^4\,EJ}\sin(\pi\xi)$

$f = \frac{q\,l^4}{\pi^4\,EJ} = \frac{\max M\,l^2}{\pi^2\,EJ}$

36.

$q(x) = 4\,q(\xi - \xi^2)$

$A = B = \frac{q\,l}{3} = Q_A = -Q_B$

$Q(x) = \frac{q\,l}{3}(1 - 6\xi^2 + 4\xi^3)$

$M(x) = q\frac{l^2}{3}(\xi - 2\xi^3 + \xi^4) = q\frac{l^2}{3}\omega_{PJ}$

$\max M = \frac{5}{48}q\,l^2; \quad f = \frac{61\,q\,l^4}{5760\,EJ}$

$w(x) = \frac{q\,l^3\,x}{90\,EJ}(3 - 5\xi^2 + 3\xi^4 - \xi^5)$

$$A = \frac{q\,c}{6}(3-\gamma) = Q_A$$

$$B = \frac{q\,c^2}{6\,l} = -Q_B = -Q_1$$

$$\max M = \frac{q\,c^2}{6\,l}\left(l - c + \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{\gamma}{3}}\right)$$

$$M_1 = \frac{q\,c^2}{6}(1-\gamma)\ ; \qquad x_0 = c - c\sqrt{\frac{\gamma}{3}}$$

$$x \le c: \quad Q(x) = \frac{q\,l}{6\,\gamma}\left[\gamma^2(3-\gamma) - 3\,\xi\,(2\gamma - \xi)\right]$$

$$M(x) = \frac{q\,l^2}{6}\,\frac{\xi}{\gamma}\left[\gamma^2(3-\gamma) - \xi\,(3\gamma-\xi)\right]$$

$$f_1 = \frac{q\,c^3}{360\,EJ}(1-\gamma)(20\,l - 13\,c)$$

33.

$$q(x) = q\,(1-\xi^2)$$

$$A = \frac{5}{12}\,q\,l = Q_A; \quad B = \frac{q\,l}{4} = -Q_B$$

$$Q(x) = \frac{q\,l}{12}(5 - 12\,\xi + 4\,\xi^3)$$

$$\max M = \frac{q\,l^2}{8{,}97} \quad \text{bei } x_0 = 0{,}446\,l$$

$$M(x) = \frac{q\,l^2}{12}(5\,\xi - 6\,\xi^2 + \xi^4)$$

$$f = \frac{11\,q\,l^4}{120\,EJ} \quad \text{bei } x_1 = 0{,}486\,l$$

$$w(x) = \frac{q\,l^3\,x}{360\,EJ}(11 - 25\,\xi^2 + 15\,\xi^3 - \xi^5)$$

29.

$$A = B = \frac{q\,l}{4} = Q_A = -\,Q_B$$

$$Q\,(x) = \frac{q\,l}{4}\,(1 - 4\,\xi + 4\,\xi^2) \ \text{für}\ x \leq \frac{l}{2}$$

$$M\,(x) = \frac{q l\,x}{12}\,(3 - 6\,\xi + 4\,\xi^2) \ \text{für}\ x \leq \frac{l}{2}$$

$$\max M = \frac{q\,l^2}{24}\ ; \qquad f = \frac{3\,q\,l^4}{640\,EJ}$$

$$w\,(x) = \frac{q\,l^3\,x}{120\,EJ}\left(\frac{15}{8} - 5\,\xi^2 + 5\,\xi^3 - 2\,\xi^4\right) \text{für}\, x \leq \frac{l}{2}$$

30.

$$A = B = \frac{q\,c}{2} = Q_A = -\,Q_B$$

$$\max M = M_1 = \frac{q\,c^2}{6}$$

$$x \leq c\ :\ Q\,(x) = \frac{q}{2}\left(c - 2\,x + \frac{x^2}{c}\right)$$

$$M\,(x) = \frac{q}{6}\,x\left(3\,c - 3\,x + \frac{x^2}{c}\right)$$

$$f = \frac{q\,c^3}{240}\,(5\,l^2 - 2\,c^2)$$

31.

$$A = \frac{q\,c}{6}\,(3 - 2\,\gamma) = Q_A\ ; \quad B = \frac{q\,c^2}{3\,l} = -\,Q_B$$

$$\max M = \frac{q\,c^2}{3}\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\,\gamma\right)^3} \ \text{bei}\ x_o = c\,\sqrt{1 - \frac{2}{3}\,\gamma}$$

$$M_1 = \frac{q\,c^2}{3}\,(1 - \gamma)$$

$$x \leq c:\quad Q\,(x) = A - \frac{q\,x^2}{2\,c}$$

$$M\,(x) = \frac{q\,c\,x}{6}\left(3 - 2\,\gamma - \frac{x^2}{c^2}\right)$$

$$f_1 = \frac{q\,c^3}{45\,EJ}\,(1 - \gamma)\,(5\,l - 4\,c)$$

Scheibe	Disks	قرص
—, rotierende—	Rotating disks	قرص دوار
Steife Ecke	Rigid joint	عقدة صلبة
Schub modul	Shear modulus	عامل القص
Theorie erster Ordnung	First order theory	نظرية المرتبة الاولى
— zweiter Ordnung	Second order theory	نظرية المرتبة الثانية
— dritter Ordnung	Third order theory	نظرية المرتبة الثالثة
Torsion	Torsion	فتل
Traegheitsmoment	Moment of inertia	عزم العطالة
Traeger	Beam	جائز (حامل)
Verformungen	Deformations	التغيرات
Vertraeglichkeitsbedingungen	Compatibility	شروط التوافق
Verschiebugen	Displacements	إنتقالات
Werkstoff	Material	مادة التصنيع
Winkelaenderung	Angular deformation	تغير زاوي

الفهرس

علم سكون القوى

علم سكون الاجسام الحاملة

علم مقاومة المواد

الملحق

جدول الخطأ والصواب

هناك أخطاء مطبعية لا تخفى على القارىء من نقص في الأحرف أو في التنقيط وسندرج فيما يلي معظمها :

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
٨	الخامس عشر	الحركة الصلفية	الحركة الصافية
١٩	الشكل 18	الشكل مصور عند الزنكوغراف من الخلف	
٣٥	الخامس من الأسفل	freier Vector	frcier Vector
٣٥	الرابع من الاسفل	hinienflüchtige	linieflüchtige
١١٧	الشكل	شكل 2 , 1 h , e	2 , 1 h , l
١١٨	الشكل		يجب أن يكون الشكل أفقيا
١١٩	شكل 2-4		يجب أن يكون الشكل أفقياً
١٥٧	الثالث من الاسفل	=const.	x=const
١٥٨	السابع من الاسفل		يجب إضافة $+M(x)$ للمعادلة
١٩٧	السابع من الأسفل	$-- + \frac{m_0}{2} x^2$	$--- + \frac{m_0}{2l} x^2$
٢١٥	مخطط M	M=0	M=2
٢٤١	السابع	القطبين	القطعين
٢٤١	المخطط الثاني	7,25 Mp	7,75 Mp
٤٤٨	شكل 2 222		الشكل مقلوب بزاوية 180°
٤٩٦	الاخير قبل الشكل	$d\bar{x}\, d\bar{x}$	$d\bar{x}\, d\bar{y}$

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
٦٩٦	الثالث	kd/cm²	kp/cm²
٧٠٠	الشكل الايسر		شكل 5.21
٧٠٦		٥ ـ ٩ حل المسائل ...	٥ ـ ٧ حل المسائل
٧٠٦		٥ ـ ٩ ـ ١ قضيب ..	٥ ـ ٧ ـ ١ قضيب ..
٧٠٧		٥ ـ ٩ ـ ٢ جائز ...	٥ ـ ٧ ـ ٢ جائز ..
٧٠٨			شكل 5.24
٧١٣		٥ ـ ٧ الحلقات . . .	٥ ـ ٨ الحلقات ..
٧١٤	الشكل 5 33		يدور بزاوية 90° نحو اليسار
٧١٥	الشكل 5.34		« « « « «
٧١٧	الشكل 5.36		يدور بزاويه 180° نحو اليسار
٧١٨		٥ ـ ٨ التأثيرات	٥ ـ ٩ التأثيرات . .
٨٣٥	السادس	تمثل قيماً	هي قيم
٨٥٧	الحادي عشر	وتعين ...	وتعيين ..
٩٤١	الثاني	٢ ـ ٢ أمثلة	٩ ـ ٥ أمثلة
٩٥٥		٩ ـ ١٠ اجراء	٩ ـ ٧ اجراء ...
٩٦٠	المعادلة الاولى	$\frac{\max s_w}{M_w}$	$\frac{\max s_w}{m_w}$
٩٦٠	الثالث عشر	بحمولتين وحيدتين 1و	بحمولتين وحيدتين P_1
٩٨٠	الشكل 9.1		يوضع في الصفحة ٩٨١
٩٨١	الشكل 9.2		يوضع في الصفحة ٩٨٠
١٠٩٣	الرابع	Max M	max M